УДК 539.3

© 1993 г. Л.М. Зубов, А.Н. Рудев

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО БРУСА

Исследуется устойчивость равновесия сжатого прямоугольного бруса из несжимаемого изотропного упругого материала, подчиняющегося условию Адамара. Обнаружена качественная зависимость поведения бруса от принадлежности материала к одному из трех классов, условно названных материалами малой, умеренной и повышенной жесткости. Для материалов малой жесткости бифуркация равновесия сколь угодно толстого бруса происходит при конечном значении критической деформации. Для материалов умеренной жесткости критическая деформация неограниченно возрастает с увеличением относительной толщины бруса, а для материалов повышенной жесткости существует "предельная" толщина, при превышении которой бифуркация равновесия невозможна.

Получены простые критерии, позволяющие определить, к какому классу относится данный конкретный материал. Установлено, что предложенная классификация несжимаемых упругих материалов полна и непротиворечива. Для материалов умеренной и повышенной жесткости найдены необходимые и достаточные условия наличия симметричных и антисимметричных форм потери устойчивости. Отмечено, что в некоторых случаях симметричная бифуркация наступает раньше, чем антисимметричная. Для материалов малой жесткости обнаружена возможность существования (при определенных значениях относительной толщины) двукратных критических значений параметра деформации, которым соответствуют две различных формы выпучивания – симметричная и антисимметричная. Сформулировано условие, достаточное для того, чтобы антисимметричная бифуркация предшествовала симметричной. Рассмотрены конкретные модели несжимаемых упругих материалов. Отмечено, что развитая в статье методика эффективна также при анализе осесимметричной неустойчивости круглой плиты, сжатой равномерным боковым давлением.

1. Постановка и решение краевой задачи. Рассмотрим однородную плоскую деформацию бесконечного бруса прямоугольного поперечного сечения, боковые грани $x = \pm a$ которого загружены равномерно распределенными нормальными усилиями интенсивности q (на единицу площади деформированной конфигурации):

$$X = \lambda x, \quad Y = \lambda^{-1} y, \quad Z = z \quad (\lambda = \text{const})$$
$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant h, \quad -\infty < z < +\infty \tag{1.1}$$

Предполагается, что массовые силы отсутствуют, а лицевые грани $y = \pm h$ свободны от напряжений. Считается также, что брус изготовлен из несжимаемого изотропного упругого материала. В соотношении (1.1) x, y, z и X, Y, Z – декартовы координаты соответственно до и после деформации. Параметры q и λ связаны между собой выражением

$$q = 2(c_1 + c_2)(\lambda^{-2} - \lambda^2)$$
$$c_m \equiv \partial\Pi/\partial I_m \quad (m = 1, 2) \tag{1.2}$$

Здесь П – объемная плотность потенциальной энергии деформации, I_m (m = = 1, 2) – первый и второй главные инварианты меры деформации Фингера [1] (для несжимаемого материала третий инвариант I_3 равен единице). В дальнейшем считается, что потенциал П удовлетворяет условию Адамара [1, 2] и является дважды непрерывно-дифференцируемой функцией инвариантов I_1, I_2 всюду, за исключением, быть может, точки $I_1 = I_2 = 3$, отвечающей недеформированному состоянию (тем самым в рассмотрение включаются и физически существенно нелинейные материалы, у которых закон состояния не допускает линеаризации в окрестности недеформированного состояния).

Обозначим через D область допустимых значений инвариантов I_1, I_2, которая для несжимаемого материала, как можно показать, определяется соотношением

$$D = \{(I_1, I_2):\ I_1 \geqslant 3,\ \ I_2 \geqslant 3,\ \ 4(I_1^2 - 3I_2)^3 - (9I_1I_2 - 2I_1^3 - 27)^2 \geqslant 0\}$$

Пусть l – луч в области D, соответствующий однородной деформации (1.1) и параметрически заданный выражениями $I_1 = I_2 = \lambda^2 + \lambda^{-2} + 1$ $(0 < \lambda < 1)$. Будем полагать, что для точек луча l соблюдается неравенство

$$c_1 + c_2 > 0 \quad ((I_1, I_2) \in l) \tag{1.3}$$

Ограничение (1.3) выражает требование положительности модуля сдвига материала при малой деформации простого сдвига в плоскости XY из равновесного состояния, описываемого формулами (1.1), и совпадает с одним из неравенств Бейкера – Эриксена [1, 2] (для точек луча l). Заметим, что требование (1.3) не противоречит условию Адамара, так как последнее влечет ослабленный вариант неравенства (1.3), а именно, $c_1 + c_2 \geqslant 0 \quad ((I_1, I_2) \in D)$.

В рамках статического подхода исследуем устойчивость равновесной конфигурации (1.1) относительно малых плоских возмущений. Уравнения равновесия, линеаризованные в окрестности состояния (1.1), в случае плоской деформации имеют вид ($\gamma \equiv \lambda^{-2}$)

$$[(1+\varepsilon)\partial_1^2 + \partial_2^2]u + \lambda^{-1}\partial_1 p = 0$$
$$(\partial_1^2 + \partial_2^2)\upsilon + \lambda\partial_2 p = 0 \tag{1.4}$$
$$\gamma\partial_1 u + \partial_2\upsilon = 0$$

$$\varepsilon = \frac{2\lambda^2(1-\gamma^2)^2(c_{11} + 2c_{12} + c_{22})}{c_1 + c_2}, \quad c_{km} \equiv \frac{\partial^2\Pi}{\partial I_k \partial I_m} \quad (k, m = 1,2) \tag{1.5}$$

Здесь u, υ – проекции вектора смещения на оси X, Y декартовой системы координат, ∂_i (i = 1, 2) – операторы дифференцирования по x, y соответственно. Вследствие несжимаемости материала линеаризованные уравнения равновесия (1.4) содержат неизвестную функцию координат p, имеющую размерность давления и определяемую в ходе решения задачи. Последнее уравнение в (1.4) и является линеаризованным условием несжимаемости.

Вывод уравнений (1.4) осуществляется средствами теории наложения малой деформации на конечную [1].

Компоненты линеаризованного тензора напряжений Пиолы [1, 2] выражаются через перемещения u, υ и давление p:

$$g^{-1}P_{11} = (1+\gamma^2+\varepsilon)\partial_1 u + \lambda^{-1}p, \qquad g^{-1}P_{12} = \partial_1\upsilon + \gamma\partial_2 u$$
$$g^{-1}P_{21} = \gamma\partial_1\upsilon + \partial_2 u, \qquad g^{-1}P_{22} = 2\partial_2\upsilon + \lambda p \tag{1.6}$$
$$g^{-1}P_{33} = (\delta + 2c)\partial_1 u + p, \qquad P_{i3} = P_{3i} = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

$$\delta = 4g^{-1}(\lambda+\lambda^{-1})(1-\gamma^2)^2[c_{11} + c_{12}(1+\lambda^2) + c_{22}\lambda^2]$$
$$g = 2(c_1 + c_2), \qquad c = 2g^{-1}c_2\lambda(1-\gamma^2) \tag{1.7}$$

В соответствии с (1.6) линеаризованные граничные условия на лицевых гранях бруса представляются в виде

$$(\gamma\partial_1\upsilon + \partial_2 u)\,|_{y=\pm h} = 0, \qquad (2\partial_2\upsilon + \lambda p)\,|_{y=\pm h} = 0 \tag{1.8}$$

где h – полутолщина бруса до деформации. На боковых гранях $x = \pm a$ выполняются условия "скользящей" заделки [3, 4], т.е. отсутствия касательных напряжений и нормального смещения:

$$u\,|_{x=\pm a} = 0, \qquad (\partial_1\upsilon + \gamma\partial_2 u)\,|_{x=\pm a} = 0 \tag{1.9}$$

Очевидно, что граничным условиям (1.9) можно удовлетворить, разыскивая перемещения u, υ и давление p в одном из следующих видов:

$$u = U(y)\sin kx, \quad \upsilon = V(y)\cos kx, \quad p = \lambda P(y)\cos kx \tag{1.10}$$

$$u = U(y)\cos lx, \quad \upsilon = V(y)\sin lx, \quad p = \lambda P(y)\sin lx \tag{1.11}$$

При этом параметры k, l определяются из условий $\sin ka = 0$, $\cos la = 0$, то есть

$$k = k_m = \frac{\pi m}{a}, \quad l = l_m = \frac{\pi(2m-1)}{2a} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.12}$$

Внося (1.10) в (1.4), (1.8), для амплитудных функций U, V, P получим однородную краевую задачу

$$U'' - (1+\varepsilon)k^2U - kP = 0$$
$$V'' - k^2V + \lambda^2P' = 0 \tag{1.13}$$
$$\gamma kU + V' = 0$$

$$(U' - \gamma kV)\,|_{y=\pm h} = 0, \qquad (2V' + \lambda^2P)\,|_{y=\pm h} = 0 \tag{1.14}$$

где штрих означает дифференцирование по y. Задача (1.13), (1.14) допускает, очевидно, решения двух типов. Для первого из них амплитуда прогиба $V(y)$ является четной, а для второго – нечетной функцией от y; при этом форма потери устойчивости соответственно антисимметрична и симметрична относительно срединной плоскости $y = 0$ бруса. Следовательно, решение первого типа естественно назвать антисимметричным, а второго – симметричным. Антисимметричное решение соответствует изгибным формам потери устойчивости бруса.

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный вид решения краевой задачи (1.13), (1.14) для двух указанных случаев

$$U = \beta[\omega_2(1+\omega_1^2)\Phi_1^{\pm}(y) - \omega_1(1+\omega_2^2)\Phi_2^{\pm}(y)]$$
$$V = \beta[(\omega_2^2+\gamma^2)\Psi_1^{\mp}(y) - (\omega_1^2+\gamma^2)\Psi_2^{\mp}(y)] \tag{1.15}$$
$$P = k\beta[\omega_2^3(\omega_1^4-1)\Phi_1^{\pm}(y) - \omega_1^3(\omega_2^4-1)\Phi_2^{\pm}(y)]$$

$$\beta[(\omega_1^2+\gamma^2)^2\omega_2\Phi_1^{\mp}(h)-(\omega_2^2+\gamma^2)^2\omega_1\Phi_2^{\mp}(h)]=0 \qquad (1.16)$$

$$\Phi_m^+(y)=\frac{\mathrm{sh}(\omega_m ky)}{\mathrm{ch}(\omega_m kh)},\quad \Phi_m^-(y)=\frac{\mathrm{ch}(\omega_m ky)}{\mathrm{sh}(\omega_m kh)}$$

$$\Psi_m^+(y)=\frac{\mathrm{sh}(\omega_m ky)}{\mathrm{sh}(\omega_m kh)},\quad \Psi_m^-(y)=\frac{\mathrm{ch}(\omega_m ky)}{\mathrm{ch}(\omega_m kh)}$$

$(m = 1, 2)$

Верхние индексы плюс, минус в (1.15), (1.16) отвечают антисимметричному решению, нижние – симметричному. Здесь

$$\omega_{1,2}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{\mu+2\gamma}\pm\sqrt{\mu-2\gamma})$$
$$\mu=1+\gamma^2+\varepsilon,\quad \beta=(\omega_1^2-\omega_2^2)^{-1} \qquad (1.17)$$

Формулы (1.15), (1.16) пригодны при $\omega_1 \neq \omega_2$. Случай совпадающих характеристических чисел ($\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$) получается из (1.15), (1.16) предельным переходом $\omega_1 \to \omega$, $\omega_2 \to \omega$.

Если неизвестные u, υ, p искать в виде (1.11), то соответствующая краевая задача для амплитудных функций U, V, P и ее решения в антисимметричном и симметричном случаях получаются из (1.13)–(1.16) заменой $k \sim -l$. Для краткости найденные таким способом соотношения будем называть сопутствующими соотношениям (1.13)–(1.16).

Два уравнения (1.16) (а также им сопутствующие) определяют бифуркационные значения параметра γ соответственно для антисимметричных и симметричных форм потери устойчивости и в дальнейшем называются характеристическими.

2. Исследование характеристических уравнений. Классификация изотропных несжимаемых упругих материалов. После подстановки в уравнение (1.16) и сопутствующее ему уравнение значений $k = k_m$ и $l = l_m$ соответственно (согласно (1.12)) характеристические уравнения можно представить в виде

$$\beta[(\omega_1^2+\gamma^2)^2\omega_2\,\mathrm{cth}\,\omega_1\sigma_m\tau-(\omega_2^2+\gamma^2)^2\omega_1\,\mathrm{cth}\,\omega_2\sigma_m\tau]=0 \qquad (2.1)$$

$$\beta[(\omega_1^2+\gamma^2)^2\omega_2\,\mathrm{th}\,\omega_1\sigma_m\tau-(\omega_2^2+\gamma^2)^2\omega_1\,\mathrm{th}\,\omega_2\sigma_m\tau]=0 \qquad (2.2)$$

$$\tau\equiv h/a,\quad \sigma_m=\pi m/2\qquad (m=1,2,3,\ldots) \qquad (2.3)$$

Первое из них отвечает антисимметричному случаю, второе – симметричному. При четных m критическим значениям параметра γ, определяемым уравнениями (2.1), (2.2), соответствуют формы выпучивания типа (1.10) (где $k = \sigma_m/a$), а при нечетных m – формы выпучивания типа (1.11) (где $l = \sigma_m/a$).

Анализ уравнений (2.1), (2.2) свидетельствует о том, что при принятых в разд. 1 ограничениях на потенциал П возможны три существенно различных варианта:

1) бифуркация равновесного состояния (1.1) бруса имеет место при произвольном значении относительной толщины τ, причем потеря устойчивости сколь угодно толстого бруса происходит при конечной величине критической деформации γ_*;

2) бифуркация равновесия бруса также имеет место при любом значении параметра τ, но критическая деформация γ_* неограниченно возрастает с увеличением τ до ∞;

3) бифуркация равновесия бруса невозможна при $\tau > \tau_*$, где τ_* – некоторое фиксированное значение величины τ (называемое в дальнейшем "предельной" толщиной); если $\tau \leqslant \tau_*$, то, как правило, бифуркация равновесия имеет место (хотя возможны исключения).

Первая ситуация типична для большинства известных моделей несжимаемых упругих материалов [1, 5, 6] (Трелоара, Муни–Ривлина, Бартенева–Хазановича, Клоснера–Сегала, Хатчинсона–Беккера–Лэндела и других). Примеры потенциалов, для которых имеет место вторая или третья ситуации, приводятся в разд. 3.

Таким образом, все несжимаемые изотропные упругие материалы целесообразно разбить на три группы. Для краткости будем называть их материалами малой, умеренной и повышенной жесткости (в соответствии со случаями *1–3*).

Для точной формулировки полученных результатов введем обозначения:

$$R(\gamma) = \gamma^3 - 2\gamma^2 - \gamma - \mu(\gamma), \quad \gamma \in L \equiv (1, +\infty) \tag{2.4}$$

$$\Gamma_R^+ = \{\gamma \in L\colon\ R(\gamma) > 0\}, \quad \Gamma_R^- = \{\gamma \in L\colon\ R(\gamma) < 0\}$$

$$\Gamma_R^0 = \{\gamma \in L\colon\ R(\gamma) = 0\} \tag{2.5}$$

$$\Delta(\gamma) = \mu(\gamma) - 2\gamma, \quad \Sigma(\gamma) = \mu(\gamma) + 2\gamma, \quad \gamma \in L \tag{2.6}$$

$$\Gamma_\Delta^- = \{\gamma \in L\colon\ \Delta(\gamma) < 0\} \tag{2.7}$$

$$F(\gamma) = \sqrt{\frac{|\Delta|}{\Sigma}}\operatorname{arch} q_1 - \arccos q_2, \quad \gamma \in \overline{\Gamma_\Delta^-} \setminus \Gamma_R^0 \tag{2.8}$$

$$q_1 = \frac{\gamma(\gamma^2 + 1 + \mu)}{|\gamma(\gamma - 1)^2 - \Sigma|}, \quad \gamma \in L \setminus \Gamma_R^0; \quad q_2 = \frac{\gamma(\gamma^2 + 1 + \mu)}{|\gamma(\gamma + 1)^2 + \Delta|}, \quad \gamma \in L \tag{2.9}$$

$$G(\gamma) = F(\gamma) - \pi, \quad \gamma \in \overline{\Gamma_\Delta^-} \setminus \Gamma_R^0$$

$$\Gamma_G^+ = \{\gamma \in \overline{\Gamma_\Delta^-} \setminus \Gamma_R^0\colon\ G(\gamma) \geqslant 0\} \tag{2.10}$$

Черта сверху означает операцию замыкания множества, косая черта – теоретико-множественную разность.

Теорема 1. Допустим, что потенциал П удовлетворяет условию Адамара, требованию (1.3) и ограничениям

$$R(\gamma) < 0, \quad \gamma \in L \tag{2.11}$$

$$\lim_{\gamma \to 1+0} \frac{\Sigma(\gamma)}{\gamma - 1} > 0 \tag{2.12}$$

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \frac{\mu(\gamma)}{\gamma^4} > 0 \tag{2.13}$$

Тогда существует "предельная" толщина τ_*, при превышении которой бифуркация равновесия однородной конфигурации (1.1) невозможна, т.е. ни одно из характеристических уравнений (2.1), (2.2) не имеет решений относительно γ (для всех $m \geqslant 1$). Если же $\tau \leqslant \tau_*$, то справедливы следующие утверждения.

1. характеристическое уравнение (2.1) при заданном $m \geqslant 1$ разрешимо относительно γ тогда и только тогда, когда соблюдается условие

$$m\tau \in T^- \setminus \{0\} \tag{2.14}$$

где T^- – некоторое ограниченное замкнутое множество, состоящее из конечного или счетного семейства непересекающихся отрезков:

$$T^- = \bigcup_{n=1}^{n^-} [t_n^-, \theta_n^-] \quad (1 \leqslant n^- \leqslant +\infty) \tag{2.15}$$

$$t_1^- = \inf T^- \geqslant 0, \quad \sup T^- \leqslant \tau_*$$

$$t_{n-1}^- \leqslant \theta_{n-1}^- < t_n^- \leqslant \theta_n^- \quad (n = 2,3,\ldots,n^-)$$

Множество T^- всегда не пусто, но не обязательно покрывает отрезок $[0, \tau_*]$. При выполнении условия

$$\left[\varlimsup_{\gamma \to 1+0} \frac{\Sigma(\gamma)}{\gamma - 1} = +\infty\right] \vee \left[\varlimsup_{\gamma \to +\infty} \frac{\mu(\gamma)}{\gamma^4} = +\infty\right] \tag{2.16}$$

имеет место равенство $t_1^- = 0$, в противном случае справедливо неравенство $t_1^- > 0$.

2. Если выполняется соотношение (см. обозначения (2.7)–(2.10))

$$(\Gamma_\Delta^- = \phi) \vee (\Gamma_G^+ = \phi) \tag{2.17}$$

то характеристическое уравнение (2.2) не имеет решений относительно γ при любом $m \geqslant 1$. Кроме того, множество T^- состоит из одного отрезка:

$$T^- = [t_1^-, \theta_1^-], \quad t_1^- \geqslant 0, \quad \theta_1^- = \tau_*$$

3. Если соблюдается требование

$$\Gamma_G^+ \neq \phi \tag{2.18}$$

то существует такое ограниченное замкнутое множество T^+, представимое в виде конечного или счетного объединения непересекающихся отрезков

$$T^+ = \bigcup_{n=1}^{n^+} [t_n^+, \theta_n^+] \quad (1 \leqslant n^+ \leqslant +\infty) \tag{2.19}$$

$$t_1^+ = \inf T^+ > 0, \quad \sup T^+ \leqslant \tau_*$$

$$t_{n-1}^+ \leqslant \theta_{n-1}^+ < t_n^+ \leqslant \theta_n^+ \quad (n = 2,3,\ldots,n^+)$$

что для всякого заданного значения $m \geqslant 1$ характеристическое уравнение (2.2) разрешимо тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$m\tau \in T^+ \tag{2.20}$$

4. При заданном $\tau > 0$ антисимметричные формы выпучивания существуют в том и только в том случае, когда найдется значение $m \geqslant 1$, для которого удовлетворено условие (2.14). В частности, при выполнении соотношений (2.16), (2.17) антисимметричные формы существуют для всех $\tau \leqslant \tau_*$ (и только для них).

5. При заданном $\tau > 0$ симметричные формы выпучивания имеются тогда и только тогда, когда соблюдается требование (2.18) и существует значение $m \geqslant 1$ такое, для которого справедливо соотношение (2.20). В частности, если имеет место условие (2.17), то симметричные формы отсутствуют для всех $\tau > 0$.

Замечания к теореме 1.

1°. Если соблюдается требование (2.18), то симметричные формы выпучивания могут наступать раньше, чем антисимметричные. Отметим также, что достаточным условием отсутствия симметричных форм служит неравенство $\Delta(\gamma) \geqslant 0$ $(\gamma \in L)$.

2°. В общем случае равенство $T^+ \cup T^- = [0, \tau_*]$ несправедливо, т.е. и при $\tau \leqslant \tau_*$ могут существовать такие значения τ, для которых уравнения (2.1), (2.2) решений не имеют и бифуркация равновесия невозможна.

3°. Для большей компактности формулировки теоремы в тех исключительных случаях, когда $m\tau = \tau_*$ и величина $\mu(\gamma)/\gamma^4$ имеет конечный предел при $\gamma \to +\infty$, в число решений уравнения (2.1) включается и возможное иногда "предельное" решение $\gamma = +\infty$. Последнее не имеет механического смысла и в конкретной ситуации может быть легко отсеяно.

4°. Не исключены ситуации, когда "предельная" толщина τ_* является изолированной в следующем смысле: существует окрестность W_* точки τ_* такая, что при $\tau \in W_*$ бифуркация равновесия бруса имеет место тогда и только тогда, когда $\tau = \tau_*$.

5°. Критические значения параметра γ, соответствующие симметричным формам потери устойчивости (при наличии последних), не выходят за пределы отрезка (1, 3).

6°. Можно показать, что множества $T^{\pm}$ состоят из конечного набора отрезков, если для всякого $n \geqslant 1$ уравнение $F(\gamma) = n\pi$ имеет не более чем конечное число решений на любом ограниченном подмножестве луча L. Для краткости назовем это ограничение на потенциал П F-условием. Геометрический смысл F-условия состоит в том, что у множества точек ветвления вещественных спектральных кривых $k = k(\gamma)$ краевой задачи (1.13), (1.14) отсутствуют точки сгущения в любой конечной части полуплоскости $\gamma > 1$, $|k| < +\infty$. Физически его можно трактовать как требование более или менее плавного изменения механических характеристик материала в процессе его деформирования. Как правило, F-условие соблюдается; нарушение его возможно лишь в отдельных случаях, не представляющих практического интереса (например, для быстро осциллирующих потенциалов П, вряд ли способных претендовать на адекватное описание поведения реальных материалов). Таким образом, чаще всего множества $T^{\pm}$ образованы конечным числом отрезков.

Доказательство теоремы 1 (и всех последующих) слишком объемно и потому опускается. Заметим лишь, что определение критических значений параметра γ можно, очевидно, осуществлять в два этапа. Вначале строятся зависимости $\theta = \theta(\gamma)$ исходя из уравнений

$$\beta[(\omega_1^2 + \gamma^2)^2 \omega_2 \operatorname{cth} \omega_1\theta - (\omega_2^2 + \gamma^2)^2 \omega_1 \operatorname{cth} \omega_2\theta] = 0 \tag{2.21}$$

$$\beta[(\omega_1^2 + \gamma^2)^2 \omega_2 \operatorname{th} \omega_1\theta - (\omega_2^2 + \gamma^2)^2 \omega_1 \operatorname{th} \omega_2\theta] = 0 \tag{2.22}$$

а затем находятся точки пересечения построенных кривых (в плоскости (γ, θ)) с прямыми

$$\theta = \sigma_m \tau \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.23}$$

Величины σ_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ определяются формулой (2.3). Абсциссы указанных точек совпадают с бифуркационными значениями параметра γ. Таким образом, проблема сводится к изучению расположения спектральных кривых уравнений (2.21), (2.22). Из-за вещественности правых частей в равенствах (2.23) можно ограничиться исследованием лишь вещественной части спектра. Для частных моделей несжимаемых упругих материалов подробный анализ уравнений

(2.21), (2.22) (по существу совпадающих с характеристическими уравнениями теории однородных решений для предварительно напряженных упругих плит) содержится, например, в [7, 8] (материалы Трелоара, Муни–Ривлина), [9] (материалы Бартенева–Хазановича, Черных–Шубиной)[1].

Теорема 2. Пусть выполняются все требования посылки теоремы 1, кроме неравенства (2.13), вместо которого соблюдается условие

$$\lim_{\gamma\to+\infty} \frac{\mu(\gamma)}{\gamma^4} = 0 \tag{2.24}$$

Тогда бифуркация равновесия сжатого бруса имеет место для всех $\tau > 0$, причем при неограниченном возрастании толщины τ критическое значение $\gamma_*(\tau)$ параметра γ неограниченно растет. Кроме того, справедливы следующие утверждения:

1) при выполнении условия

$$\overline{\lim_{\gamma\to1+0}} \frac{\Sigma(\gamma)}{\gamma - 1} = +\infty \tag{2.25}$$

характеристическое уравнение (2.1) разрешимо относительно γ при произвольных $m \geqslant 1$, $\tau > 0$;

2) при нарушении соотношения (2.25) для всякого фиксированного значения $\tau > 0$ существует целое число $m_*(\tau) \geqslant 1$ такое, что характеристическое уравнение (2.1) не имеет решений при $m < m_*(\tau)$ и имеет хотя бы одно решение при $m \geqslant m_*(\tau)$;

3) если соблюдается требование (2.17), то характеристическое уравнение (2.2) не имеет решений при любых $m \geqslant 1$, $\tau > 0$;

4) выполняется положение *3* заключения теоремы 1;

5) антисимметричные формы выпучивания существуют для произвольной толщины $\tau > 0$;

6) справедливо положение *5* заключения теоремы 1.

Замечания к теореме 2.

1°. Для произвольной толщины τ бифуркационное значение γ_* параметра γ определено, как правило, неоднозначно. Утверждение теоремы о поведении $\gamma_*(\tau)$ при $\tau \to \infty$ не зависит от выбора γ_* и потому корректно. В частности, можно понимать под $\gamma_*(\tau)$ наименьшее критическое значение величины γ для данной толщины τ; в этом случае $\gamma_*(\tau)$ является, вообще говоря, кусочно-непрерывной функцией параметра τ на луче $(0, +\infty)$.

2°. В условиях теоремы 2 сохраняют силу замечания 5°, 6° к теореме 1 (последнее из них применительно в множеству T^+).

Теорема 3. Допустим, что выполняются следующие требования:

1) потенциал П удовлетворяет условию Адамара и ограничению (1.3);

2) функция $R(\gamma)$ имеет на луче L изолированный нуль γ_0, причем множество Γ_R^0 конечно и соблюдаются неравенства ($\gamma^0 = \sup \Gamma_R^0$, $\gamma_0 < \gamma_1 \leqslant +\infty$, $0 < \alpha < \gamma^0 - 1$)

[1] См. также: *Рудев А.Н.* Однородные решения для упругой плиты при аффинной начальной деформации / Ростов-на-Дону, 1980, 31 с. – Деп. в ВИНИТИ. 04.07.80. № 3937–80.

$$R(\gamma) < 0, \quad \gamma \in L^- \equiv (1, \gamma_0); \quad R(\gamma) > 0, \quad \gamma \in L^+ \equiv (\gamma_0, \gamma_1)$$
$$R(\gamma) < 0, \quad \gamma \in (\gamma^0 - \alpha, \gamma^0); \quad R(\gamma) > 0, \quad \gamma \in (\gamma^0, +\infty) \tag{2.26}$$

3) если $\Delta(\gamma_0) = 0$, то точка γ_0 не является предельной для множества Γ_G^+;

4) величина $\Sigma(\gamma)$ удовлетворяет условию (2.12);

5) если $\Delta(\gamma_0) < 0$, то: а) справедливо неравенство $\inf \Gamma_G^+ > 1$;

б) существует окрестность W точки γ_0 такая, что функция $R(\gamma)$ непрерывно дифференцируема в W, причем $\dot{R}(\gamma_0) > 0$ (точкой обозначена производная по γ).

Тогда бифуркация равновесного состояния (1.1) бруса происходит при всех $\tau > 0$, причем наименьшее критическое значение γ_* параметра γ не превосходит γ_0:

$$\gamma_* \leqslant \gamma_0$$

Кроме того, справедливы следующие утверждения.

1. Антисимметричные и симметричные формы выпучивания существуют при любой толщине $\tau > 0$.

2. При выполнении условия (2.25) характеристическое уравнение (2.1) разрешимо (относительно γ) для произвольных значений $m \geqslant 1, \tau > 0$. При нарушении условия (2.25) существует такая последовательность "минимальных" толщин τ_m^- ($m = 1, 2, 3, \ldots$), что при фиксированном $m \geqslant 1$ уравнение (2.1) разрешимо тогда и только тогда, когда $\tau \geqslant \tau_m^-$. Последовательность τ_m^- ($m = 1, 2, 3, \ldots$) монотонно убывает и стремится к нулю:

$$\lim_{m \to \infty} \tau_m^- = 0 \tag{2.27}$$

3. При соблюдении требования

$$\varlimsup_{\gamma \to +\infty} \frac{|\mu(\gamma)|}{\gamma^{8/3}} = 0 \tag{2.28}$$

характеристическое уравнение (2.2) разрешимо для любых $m \geqslant 1, \tau > 0$. Если же условие (2.28) нарушено, то существует такая последовательность "минимальных" толщин τ_m^+ ($m = 1, 2, 3, \ldots$), что при фиксированном $m \geqslant 1$ уравнение (2.2) разрешимо тогда и только тогда, когда $\tau \geqslant \tau_m^+$. Последовательность τ_m^+ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) монотонно убывает и стремится к нулю:

$$\lim_{m \to \infty} \tau_m^+ = 0 \tag{2.29}$$

4. Если выполняется неравенство

$$\Delta(\gamma_0) \geqslant 0 \tag{2.30}$$

то для произвольного $m \geqslant 1$ существует такое значение τ_m толщины τ, что при $\tau \geqslant \tau_m$ наименьшие решения $\gamma_m^-(\tau), \gamma_m^+(\tau)$ уравнений (2.1), (2.2) соответственно удовлетворяют соотношению

$$\gamma_m^\pm(\tau) \in L^\pm \tag{2.31}$$

Последовательность τ_m ($m = 1, 2, 3, \ldots$) монотонно убывает и стремится к нулю. Если же выполняется условие

$$\Delta(\gamma_0) < 0 \tag{2.32}$$

то имеется целое число $N \geq 0$ такое, что справедливы соотношения

$$\gamma_m^{\pm}(\tau_m^{(n)}) = \gamma_0 \quad (m \geq 1,\ n > 2N) \tag{2.33}$$

$$\tau \in (\tau_m^{(2r)}, \tau_m^{(2r+1)}) \Rightarrow \gamma_m^{\pm}(\tau) \in L^{\pm} \quad (m \geq 1,\ r \geq N) \tag{2.34}$$

$$\tau \in (\tau_m^{(2r+1)}, \tau_m^{(2r+2)}) \Rightarrow \gamma_m^{\pm}(\tau) \in L^{\mp} \quad (m \geq 1,\ r \geq N) \tag{2.35}$$

$$\tau_m^{(n)} \equiv \frac{2n}{m\sqrt{|\Delta(\gamma_0)|}} \quad (m \geq 1,\ n \geq 0) \tag{2.36}$$

В формулах (2.31), (2.34), (2.35) индексы плюс, минус берутся одновременно либо верхние, либо нижние.

5. При существовании "минимальных" толщин τ_m^+ или τ_m^- и выполнении неравенства (2.32) для $\tau_m^{\pm}$ имеет место оценка

$$\tau_m^{\pm} \leq \frac{2}{m\sqrt{|\Delta(\gamma_0)|}} \quad (m \geq 1) \tag{2.37}$$

6. Если функция $\Delta(\gamma)$ неотрицательна при $\gamma > 1$ и $\gamma_1 = +\infty$, то соотношение (2.31) справедливо для всех $m \geq 1$, $\tau > 0$, т.е. антисимметричные формы обязательно предшествуют симметричным.

Замечания к теореме 3.

1°. Механический смысл "минимальных" толщин состоит в том, что для некоторых материалов симметричные (или антисимметричные) формы выпучивания с числом узловых линий, равным m, существуют только при $\tau \geq \tau_m^+$ (или $\tau \geq \tau_m^-$). Если для бруса из такого материала зафиксировать значение относительной толщины τ, то ввиду (2.27) (или (2.28)) симметричная (или антисимметричная) бифуркация всегда имеет место, но количество узловых линий не может быть произвольным, а должно превосходить наименьшее значение m, удовлетворяющее неравенству $\tau \geq \tau_m^+$ (или $\tau \geq \tau_m^-$). В качестве примера можно привести потенциал (3.15) при условии $n \in (2/3, 1)$, для которого существуют "минимальные" толщины τ_m^+ (см. разд. 3).

2°. Неравенство $\Delta(\gamma) \geq 0 (\gamma \in L)$ является достаточным условием для того, чтобы антисимметричные формы предшествовали симметричным, не только в рамках теоремы 3, но и в самом общем случае, когда потенциал П удовлетворяет условию Адамара и ограничению (1.3).

3°. Заключение теоремы 3 остается в силе, если в условии *5* ее посылки опустить положение *a*, а условие *4* заменить требованием

$$\lim_{\gamma \to 1+0} \frac{\Sigma(\gamma)}{\gamma - 1} \geq \sigma_* \tag{2.38}$$

Здесь $\sigma_* = 1{,}11008\ldots$ – единственное положительное решение уравнения $H(\sigma) = \pi$, где функция $H(\sigma)$ определена соотношением

$$H(\sigma) = \frac{2\sqrt{2(\sigma+2)}}{\sigma} - \arccos\frac{\sigma}{\sigma+4}, \quad \sigma \in (0, +\infty)$$

В некоторых случаях проверка неравенства (2.38) бывает предпочтительней.

Из теоремы 3 следует, что при условии (2.32) и $\tau \in (\tau_m^{(2r+1)}, \tau_m^{(2r+2)})$ (по крайней мере для достаточно больших r) m-я симметричная форма потери устойчивости наблюдается при меньшем значении критической деформации, чем m-я антисимметричная форма. Но поскольку в общем случае наименьшее бифуркационное значение параметра γ определяется как $\min_{m\geq 1}\{\gamma_m^-(\tau),\gamma_m^+(\tau)\}$, то не исключены такие значения относительной толщины τ, когда минимум достигается для симметричной формы выпучивания. Следовательно, замечание 1° к теореме 1 сохраняет свою силу и в условиях теоремы 3 (как, впрочем, и теоремы 2). Кроме того, наименьшему критическому значению параметра γ может соответствовать форма выпучивания с несколькими узловыми линиями.

Отметим также, что при справедливости неравенства (2.32) величина γ_0 является совместным решением уравнений (2.1), (2.2) при $\tau=\tau_m^{(n)}(m,n\geq 1)$, т.е. γ_0 – двукратное собственное значение краевой задачи (1.4), (1.8), (1.9), которому соответствуют две различных формы выпучивания – антисимметричная и симметричная. Сказанное дает основание ожидать появления интересных эффектов при анализе закритического поведения упругого тела, но это предмет отдельного исследования.

Теоремы 1–3 являются, очевидно, достаточными признаками наличия у материала повышенной, умеренной и малой жесткости соответственно. Можно показать, что две первых дают не только достаточные, но и необходимые условия. С учетом этого сравнительный анализ теорем 1–3 позволяет сделать следующие выводы:

1) для материалов повышенной жесткости при фиксированном $\tau\leq\tau_*$ возможные формы выпучивания (как антисимметричные, так и симметричные) обладают ограниченным числом узловых линий;

2) для материалов умеренной жесткости количество узловых линий может быть сколь угодно большим в случае антисимметричных форм, но ограничено для симметричных (при фиксированном $\tau > 0$);

3) для материалов малой жесткости (в рамках теоремы 3) существующие формы выпучивания – и антисимметричные, и симметричные – могут иметь сколь угодно большое число узловых линий при произвольном $\tau > 0$.

Теоремы 1–3, выявляя наиболее типичные черты поведения несжимаемых упругих материалов (при принятых в разд. 1 ограничениях на потенциал П), не исчерпывают всего многообразия ситуаций, допускаемых неравенством Адамара. Так, детерминантная функция $R(\gamma)$ может обращаться в нуль в точке γ_0, не меняя знака (см. ниже пример (2.44)), или иметь несколько нулей $\gamma_0^{(1)},\gamma_0^{(2)},\ldots,\gamma_0^{(n)}$ (простых или произвольной кратности), счетный их набор или даже континуальное множество (как ограниченное, так и неограниченное). Дать полное описание всех допустимых вариантов не представляется возможным, и каждый случай, не укладывающийся в схему теорем 1–3, требует отдельного рассмотрения. Тем не менее справедлив следующий общий результат.

Теорема 4. Допустим, что справедливо положение *1* посылки теоремы 3 и выполняется одно из взаимоисключающих друг друга требований, приведенных ниже (см. обозначения (2.5)):

$$\Gamma_R^0 \neq \phi \tag{2.39}$$

$$(\Gamma_R^- = L) \Rightarrow \left[\lim_{\gamma\to 1+0}\frac{\Sigma(\gamma)}{\gamma-1}=0\right] \tag{2.40}$$

$$\Gamma_R^+ = L \tag{2.41}$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

1) при любом $\tau > 0$ хотя бы одно из уравнений (2.1), (2.2) разрешимо относительно γ, то есть происходит бифуркация равновесия однородной конфигурации (1.1);

2) если $\gamma_*(\tau)$ – наименьшее критическое значение параметра γ для заданной толщины τ, то функция $\gamma_*(\tau)$ ограничена на луче $(0, +\infty)$;

3) в том случае, когда соблюдается условие (2.39), для $\gamma_*(\tau)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\gamma_*(\tau) \leqslant \inf \Gamma_R^0 \quad (\inf \Gamma_R^0 > 1) \\ &\gamma_*(\tau) < 3 \quad (\inf \Gamma_R^0 = 1) \end{aligned} \tag{2.42}$$

4) при нарушении условия (2.39) выполняется соотношение

$$\gamma_*(\tau) \equiv 1, \qquad \tau \in (0, +\infty) \tag{2.43}$$

5) имеется неограниченное множество T^- мощности континуума такое, что для всех $\tau \in T^-$ существуют антисимметричные формы потери устойчивости;

6) если соблюдаются требования (2.40), (2.41), то существует неограниченное множество T^+ мощности континуума такое, что для всех $\tau \in T^+$ имеются симметричные формы потери устойчивости;

7) при одновременном существовании множеств T^+, T^- их можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось равенство $T^+ \cup T^- = (0, +\infty)$; в противном случае допустимо считать, что $T^- = (0, +\infty)$.

Замечания к теореме 4.

1°. Вообще говоря, множество критических значений параметра γ для заданной толщины $\tau > 0$ не всегда содержит минимальный элемент. При этом под величиной $\gamma_*(\tau)$ (фигурирующей, в частности, в соотношениях (2.42), (2.43)) следует понимать точную нижнюю границу этого множества.

2°. Если справедливо соотношение (2.39), то возможны ситуации, когда симметричные формы потери устойчивости отсутствуют для всех $\tau > 0$. В качестве примера можно привести потенциал

$$\Pi(I_1, I_2) = d_1\Phi(J_1) + d_2\Phi(J_2) \tag{2.44}$$

$$(d_1 \geqslant 0, \;\; d_2 \geqslant 0, \;\; d_1^2 + d_2^2 \neq 0)$$

$$J_k = \tfrac{1}{2}\left(I_k - 1 + \sqrt{(I_k+1)(I_k-3)}\right) \quad (k = 1,2)$$

где функция $\Phi(t)$ задается интегральным представлением

$$\Phi(t) = \int_1^t \frac{(\theta-1)^{12}(\theta+1)^{27}}{\theta^{39}} e^{\theta/2} d\theta \qquad (t \geqslant 1)$$

Проверка показывает, что потенциал (2.44) удовлетворяет условию Адамара, ограничению (1.3) и соотношению (2.39), причем $\Gamma_R^0 = \{5\}$. Вместе с тем характеристическое уравнение (2.2) не имеет решений при любых $\tau > 0$, $m \geqslant 1$.

3°. Отметим, что в самом общем случае (когда потенциал Π удовлетворяет условию Адамара и ограничению (1.3)) необходимые и достаточные условия отсутствия симметричных форм выпучивания имеют вид

$$\Gamma_R^+ = \phi, \quad \Gamma_R^- \supset (1,3), \quad \Gamma_R^- \cap \Gamma_G^+ = \phi \tag{2.45}$$

В частности, для потенциала (2.44) получаем $\Gamma_R^+ = \phi$, $\Gamma_R^- = L \setminus \{5\}$, $\Gamma_G^+ = \phi$, т.е. требования (2.45) выполнены.

4°. Очевидно, что теорема 4 дает достаточные условия для того, чтобы материал обладал малой жесткостью. Оказывается, соотношения (2.39)–(2.41) не только достаточны, но и необходимы. Учитывая сказанное ранее по поводу теорем 1, 2 и сопоставляя требования (2.11)–(2.13), (2.24), (2.39)–(2.41), приходим к выводу, что предложенная выше классификация несжимаемых упругих материалов полна и непротиворечива.

Отметим, что полученные в разд. 2 результаты сохраняют силу и в том случае, когда потенциал П удовлетворяет условию сильной эллиптичности [1, 2], так как последнее обеспечивает справедливость условия Адамара и ограничения (1.3).

3. Примеры. Рассмотрим несколько конкретных примеров, иллюстрирующих положения разд. 2.

1°. *Материал Харт-Смита* [5, 10]

$$\Pi = d_1 \int e^{\nu(I_1-3)^2} dI_1 + d_2 \ln\frac{I_2}{3} \quad (d_1 > 0,\ d_2 \geqslant 0,\ \nu > 0) \tag{3.1}$$

Потенциал (3.1) получен [10] с использованием негауссовской молекулярной теории. Можно доказать следующий достаточный признак справедливости условия Адамара.

Лемма 1. Если упругие постоянные d_1, d_2, ν удовлетворяют неравенствам

$$\frac{d_2}{d_1} < 1, \quad \Phi(\nu) - \frac{d_2}{3d_1} \geqslant 0 \tag{3.2}$$

где функция $\Phi(\nu)$ определяется соотношением

$$\Phi(\nu) = (\sqrt{9\nu^2 + 3\nu} - 3\nu)\exp[\tfrac{1}{2}(9\nu + 1 - 3\sqrt{9\nu^2 + 3\nu})] \tag{3.3}$$

то для модели Харт-Смита (3.1) условие Адамара соблюдается при любых деформациях.

В частности, неравенства (3.2) выполнены при $d_2 = 0$, $\nu = 0{,}25$. На основании формул (1.5), (1.17), (2.4), (2.6) в этом случае получаем

$$\begin{aligned}
&\mu(\gamma) = 1 + \gamma^2 + \lambda^4(1-\gamma^2)^2(1-\gamma)^2 \\
&\Delta(\gamma) = \lambda^4(1-\gamma)^2[\gamma^2 + (\gamma^2-1)^2] \\
&R(\gamma) = -\lambda^4[\gamma^4(\gamma-1)(\gamma-2) + 2\gamma(\gamma^2-1) + 3\gamma^3 + 1] \\
&\Sigma(\gamma) = \lambda^4(1+\gamma)^2[\gamma^2 + (1-\gamma)^4]
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Поскольку для $\gamma \in (1, 2]$ выполняются неравенства $|(\gamma-1)(\gamma-2)| \leqslant 1/4$, $\gamma^4 \leqslant 16$, $3\gamma^3 + 1 > 4$, то условие (2.11) теоремы 1 удовлетворено. Требования (2.12), (2.13) также справедливы (это легко проверить с помощью формул (3.4), учитывая, что $\lambda = \gamma^{-1/2}$). Поэтому при $d_2 = 0$, $\nu = 0{,}25$ материал Харт-Смита обладает повышенной жесткостью, т.е. существует "предельная" толщина τ_*, при превышении которой бифуркация равновесия сжатого бруса невозможна. Численными методами для τ_* найдено значение $\tau_* = 0{,}7338$.

Заметим, что из выражений (3.4) следует неравенство $\Delta(\gamma) > 0$ $(\gamma > 1)$. Значит, согласно формулам (2.7)–(2.10) получаем $\Gamma_\Delta^- = \phi$, $\Gamma_G^+ = \phi$, и на основании положения *5* заключения теоремы 1 приходим к выводу, что симметричные формы выпучивания отсутствуют для всех $\tau > 0$. Кроме того, в силу утверждения *2* теоремы 1 множество

T^- совпадает в данном случае с отрезком $[0, \tau_*]$ ($t_1^- = 0$, так как условие (2.16) соблюдается).

Результаты расчета "предельной" толщины τ_* для материала Харт-Смита при различных значениях упругих постоянных, удовлетворяющих неравенствам (3.2), приводятся ниже ($n \equiv d_2/d_1$)

ν	3,0	5,0	6,0	8,0	10,0	20,0	20,0	20,0
n	0,2	0,3	0,99	0,99	0,99	0,99	0,4	0,1
τ_*	0,4298	0,4039	0,4042	0,3893	0,3788	0,3474	0,3408	0,3371

2°. *Пятиконстантный материал Александера* [5, 11]

$$\Pi = d_1 \int e^{k_1 (I_1 - 3)^2} dI_1 + d_2 (I_2 - 3) + d_3 \ln \frac{I_2 - 3 + k_2}{k_2}$$

$$(d_1 > 0,\ d_2 \geqslant 0,\ d_3 \geqslant 0,\ k_1 > 0,\ k_2 > 0) \tag{3.5}$$

Потенциал (3.5), хорошо согласующийся [11] с результатами экспериментов на хлоропреновом каучуке, дает еще один пример материала, обладающего "предельной" толщиной. Заметим, что при $d_2 = 0$, $k_2 = 3$ энергия (3.5) с точностью до обозначений совпадает с потенциалом Харт-Смита (3.1)

Лемма 2. Пусть упругие постоянные, фигурирующие в выражении (3.5), удовлетворяют хотя бы одному из наборов условий (где функция Φ определена соотношением (3.3)):

$$d_3 \leqslant 8 d_2 k_2 \tag{3.6}$$

$$\Phi(k_1) - \frac{3 d_3}{d_1 k_2^2} \geqslant 0,\quad k_2 \leqslant 6 \tag{3.7}$$

$$\Phi(k_1) - \frac{d_3}{4 d_1 (k_2 - 3)} \geqslant 0,\quad k_2 > 6 \tag{3.8}$$

Тогда для материала Александера (3.5) условие Адамара соблюдается при любых деформациях.

Доказательство опускается.

Вычисляя $\mu(\gamma)$ по формулам (1.17), (1.5), получаем

$$\mu(\gamma) = 1 + \gamma^2 + 4 k_1 \lambda^4 (1 - \gamma^2)^2 \left[(\gamma - 1)^2 - \frac{n_2 \gamma^3}{2 k_1 r^2} e^{-s} \right] \left[1 + \left(n_1 + \frac{n_2 \gamma}{r} \right) e^{-s} \right]^{-1},$$

$$n_1 \equiv \frac{d_2}{d_1},\quad n_2 \equiv \frac{d_3}{d_1} \tag{3.9}$$

$$r \equiv (\gamma - 1)^2 + k_2 \gamma,\quad s \equiv k_1 \lambda^4 (\gamma - 1)^4$$

Из представления (3.9) видим, что при $\gamma \to +\infty$ $\mu(\gamma) \sim 4 k_1 \gamma^4$, т.е. требование (2.13) теоремы 1 выполнено. Выражения для $R(\gamma)$, $\Delta(\gamma)$ и $\Sigma(\gamma)$ находятся с помощью соотношений (2.4), (2.6) и (3.9) (опускаем их из-за громоздкости). Отметим только, что при $\gamma \to 1$ $\Sigma(\gamma) \to 4$, и требование (2.12) соблюдается. Постоянные d_1, d_2, d_3, k_1, k_2 можно подобрать таким образом, чтобы выполнялось условие (2.11) теоремы 1 и хотя бы одно из требований (3.6)–(3.8) леммы 2. В частности, достаточными условиями отрицательности $R(\gamma)$ для всех $\gamma > 1$ служат соотношения

$$k_1 \geqslant 0{,}5,\quad d_2 \leqslant d_1,\quad d_3 = 0 \tag{3.10}$$

Следовательно, полагая, например, $d_1 = d_2 = k_1 = k_2 = 1$, $d_3 = 0$, удовлетворим одновременно требованию (3.6) леммы 2 и достаточным условиям (3.10) отрицательности $R(\gamma)$.

Таким образом, для указанных значений упругих постоянных материал Александера (3.5) обладает повышенной жесткостью.

Заметим также, что при справедливости ограничений (3.10) непосредственной проверкой можно убедиться в том, что при $\gamma > 0$ для функции $\Delta(\gamma)$ имеет место оценка снизу

$$\Delta(\gamma) \geqslant (1-\gamma)^2[1+\lambda^4(\gamma^2-1)^2] \geqslant 0 \tag{3.11}$$

В силу теоремы 1 неравенство (3.11) свидетельствует о том, что в рассматриваемом случае симметричные формы выпучивания невозможны для всех $\tau > 0$.

Результаты расчета "предельной" толщины τ_* для нескольких наборов упругих постоянных приводятся ниже

k_1	5,0	10,0	15,0	20,0	20,0	20,0	20,0	40,0
k_2	28,0	6,0	5,0	3,0	3,0	3,0	9,0	20,0
n_1	30,0	20,0	5,0	1,0	2,0	3,0	40,0	1,0
n_2	10,0	3,9	2,0	0,99	0,99	0,99	3,0	100,0
τ_*	0,5514	0,4878	0,4191	0,3683	0,3815	0,3912	0,4665	0,3756

Отметим, что в работах [12, 13] на основе приближенного решения задачи устойчивости установлено существование "предельной" толщины для материалов Трелоара и Муни–Ривлина, что не соответствует действительности. В самом деле, отвечающие этим материалам потенциалы имеют соответственно вид

$$\Pi = d(I_1-3), \quad d = \text{const} > 0 \tag{3.12}$$

$$\Pi = d_1(I_1-3)+d_2(I_2-3), \quad d_1, d_2 = \text{const} > 0 \tag{3.13}$$

В обоих случаях на основании формул (1.5), (1.17), (2.4), (2.6) получаем

$$\begin{gathered} \mu(\gamma) = 1+\gamma^2, \quad R(\gamma) = \gamma^3 - 3\gamma^2 - \gamma - 1 \\ \Delta(\gamma) = (\gamma-1)^2, \quad \Sigma(\gamma) = (\gamma+1)^2 \end{gathered} \tag{3.14}$$

Условие Адамара для моделей (3.12), (3.13) справедливо при любых деформациях [1, 14]. Исходя из представления (3.14) для функции $R(\gamma)$, нетрудно установить, что на луче L она имеет единственный нуль $\gamma_0 = 3{,}38298$, причем $R(\gamma) < 0$ для $\gamma \in (1, \gamma_0)$ и $R(\gamma) > 0$ для $\gamma > \gamma_0$. Следовательно, положения *1* и *2* посылки теоремы 3 соблюдаются. Справедливость допущений *3–5* указанной посылки проверяется тривиально с помощью выражений (3.14) для $\Delta(\gamma)$ и $\Sigma(\gamma)$. Значит, выполнены все требования теоремы 3, т.е. потеря устойчивости бруса происходит при всех $\tau > 0$, что противоречит выводу [12, 13] о наличии у этих материалов "предельной" толщины. В силу теоремы 3 симметричные формы выпучивания (с произвольным числом $m \geqslant 1$ узловых линий) существуют для моделей (3.12), (3.13) при любом значении $\tau > 0$, но вследствие положительности функции $\Delta(\gamma)$ наступают всегда позже антисимметричных форм. Этот факт согласуется с результатом работы [15].

3°. *Гипотетический материал с потенциалом*

$$\begin{gathered} \Pi = d_1 \int e^{k_1(I_1-3)^n} dI_1 + d_2 \int e^{k_2(I_2-3)^n} dI_2 \\ (d_1 > 0, \ d_2 > 0, \ k_1 > 0, \ k_2 > 0, \ n > 0) \end{gathered} \tag{3.15}$$

Применяя методику работы [16], можно показать, что условие Адамара для модели (3.15) выполняется при любых деформациях. Для величины $\mu(\gamma)$ по формулам (1.5), (1.17) получаем

$$\mu(\gamma) = 1+\gamma^2+2n(1+\gamma)^2\frac{(d_1k_1+d_2k_2)(\gamma-1)^{2n}}{(d_1+d_2)\gamma^n} \tag{3.16}$$

Выражения для функций $R(\gamma)$, $\Delta(\gamma)$, $\Sigma(\gamma)$ находятся с помощью соотношений (2.4), (2.6), (3.16). Не выписывая их явно, отметим, что $\Sigma(\gamma)$ удовлетворяет неравенству (2.12), $\Delta(\gamma)$ – неотрицательна для всех $\gamma > 0$, а достаточные условия отрицательности $R(\gamma)$ (при $\gamma > 0$) имеют вид

$$n \geqslant 1, \quad \frac{d_1k_1 + d_2k_2}{d_1 + d_2} > \frac{3^{n+1}}{n2^{2n+1}} \tag{3.17}$$

Первое из неравенств (3.17) является также необходимым, так как можно показать, что при $n < 1$ функция $R(\gamma)$ обязательно имеет на луче $(1, +\infty)$ хотя бы один нуль.

Из представления (3.16) следует, что при $\gamma \to +\infty$ величина $\mu(\gamma)$ ведет себя как $M\gamma^{n+2}$ ($M = \text{const} > 0$). Следовательно, если соблюдаются достаточные условия (3.17) отрицательности $R(\gamma)$, то при $n \geqslant 2$ выполняются все требования теоремы 1, а при $1 \leqslant$ $\leqslant n < 2$ – теоремы 2. При $n < 1$ имеет место случай $\Gamma_R^0 \neq \phi$, т.е. справедлива посылка теоремы 4.

Итак, при $n \geqslant 2$ гипотетический материал (3.15) обладает повышенной жесткостью, при $1 \leqslant n < 2$ – умеренной, а при $0 < n < 1$ – малой жесткостью. Так как $\Delta(\gamma) \geqslant 0$ ($\gamma > 0$), то в первых двух случаях симметричные формы выпучивания невозможны (а в третьем, хотя и существуют для всех $\tau > 0$, наступают позже, чем антисимметричные).

Отметим, что при $n = 1$ знаки интегралов в (3.15) можно очевидно, опустить:

$$\Pi = d_1[e^{k_1(I_1-3)} - 1] + d_2[e^{k_2(I_2-3)} - 1] \tag{3.18}$$

Достаточное условие отрицательности $R(\gamma)$ для потенциала (3.18) получается из (3.17) подстановкой $n = 1$:

$$\frac{d_1k_1 + d_2k_2}{d_1 + d_2} > \frac{9}{8} \tag{3.19}$$

Таким образом, энергия (3.18) (при ограничении (3.19)) представляет материал умеренной жесткости.

Пример (3.15) показывает, что жесткостные свойства материала (в принятом здесь смысле) определяются его способностью к аккумулированию энергии с ростом деформации. Чем она выше, тем устойчивее материал.

4°. *Материал Клоснера–Сегала* [5, 17]

$$\Pi = d_0(I_1 - 3) + d_1(I_2 - 3) + d_2(I_2 - 3)^2 + d_3(I_2 - 3)^3 \tag{3.20}$$

Как показывают эксперименты [17], эта модель удовлетворительно описывает поведение натуральных резин при $I_1, I_2 < 8$. Ограничимся анализом частного случая $d_0 = 0$. При этом можно показать, что для потенциала (3.20) условие Адамара соблюдается при любых деформациях тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$d_1 \geqslant 0, \quad d_3 \geqslant 0, \quad 3d_2 + \sqrt{15 d_1 d_3} \geqslant 0 \tag{3.21}$$

Если добавить к последним ограничение $d_1 + d_3 \neq 0$, то автоматически обеспечивается положительность Π при $I_2 > 3$.

Используя формулы (1.5), (1.17), для параметра $\mu(\gamma)$ находим

$$\mu(\gamma) = 1 + \gamma^2 + 4(1-\gamma^2)^2 \frac{d_2\gamma + 3d_3(\gamma-1)^2}{d_1\gamma^2 + 2d_2\gamma(\gamma-1)^2 + 3d_3(\gamma-1)^4} \tag{3.22}$$

Величины $R(\gamma)$, $\Delta(\gamma)$, $\Sigma(\gamma)$ выражаются через $\mu(\gamma)$ согласно (2.4), (2.6), (3.22) (явные выражения опускаем из-за отсутствия места). Можно показать, что при принятых ограничениях на упругие постоянные функция $R(\gamma)$ имеет на луче $(1, +\infty)$ хотя бы один нуль. Следовательно, соблюдаются требования теоремы 4, и материал Клоснера – Сегала обладает малой жесткостью.

Численное исследование показывает, что в частном случае $d_1 = 60$, $d_2 = -10$, $d_3 = 1$ (этот набор постоянных удовлетворяет условиям (3.21)) функция $R(\gamma)$ имеет на луче $(1, +\infty)$ изолированный нуль $\gamma_0 = 2{,}451325$, при этом выполняются неравенства (2.26) (где можно взять, например, $\gamma_1 = 6$). Справедливость остальных допущений теоремы 3 проверяется тривиально, если учесть равенства $\Delta(\gamma_0) \approx -4{,}64$, $\dot{R}(\gamma_0) \approx 12{,}36$, $\lim_{\gamma \to 1+0} \Sigma(\gamma) = 4$ и воспользоваться замечанием 3° к упомянутой теореме. Рассматриваемый случай интересен тем, что для критических значений параметра γ выполняются соотношения (2.33)–(2.35). В частности, при $\tau = \tau_m^{(n)}$ (см. формулу (2.36)) величина γ_0 является двукратным собственным значением краевой задачи (1.4), (1.8), (1.9).

Заметим, что при $\gamma = \gamma_0$ для I_1, I_2 имеем $I_1 = I_2 = 3{,}859267$, что не выходит за пределы экспериментально установленной области применимости потенциала (3.20).

Отметим также, что все проведенные выше рассуждения, относящиеся к материалу Клоснера–Сегала, остаются в силе и для материала Бидермана [5, 18] (последнему соответствует потенциал, получающийся из (3.20) заменой $I_1 \sim I_2$). Модель Бидермана адекватно описывает поведение резин с сернистым наполнителем [18].

5°. *Существенно нелинейный материал с потенциалом*

$$\Pi = d_1(I_1 - 3)^{\nu_1} + d_2(I_2 - 3)^{\nu_2} \tag{3.23}$$

$$(d_1 \geqslant 0,\ \ d_2 \geqslant 0,\ \ d_1^2 + d_2^2 \neq 0,\ \ \nu_1 \geqslant 0{,}5,\ \ \nu_2 \geqslant 0{,}5)$$

При $\nu_1 = \nu_2 = 1$ энергия (3.23) совпадает с потенциалом Муни–Ривлина (3.13). Можно показать, что при указанных ограничениях на упругие постоянные материал (3.23) удовлетворяет условию Адамара при любых деформациях. Отличительная особенность потенциала (3.23) состоит в том, что при ν_1 и ν_2, одновременно не равных 1, материал является физически нелинейным даже при весьма малых деформациях.

Ограничимся здесь частным случаем $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. По формулам (1.5), (1.17), (2.4), (2.6) находим

$$\begin{gathered}\mu(\gamma) = 1 + \gamma^2 + 2(\nu - 1)(1 + \gamma)^2 \\ R(\gamma) = \gamma^3 - (2\nu + 1)\gamma^2 - (4\nu - 3)\gamma - (2\nu - 1) \\ \Delta(\gamma) = (1 - \gamma)^2 + 2(\nu - 1)(1 + \gamma)^2, \quad \Sigma(\gamma) = (2\nu - 1)(1 + \gamma)^2\end{gathered} \tag{3.24}$$

Допустим вначале, что $\nu > 0{,}5$. При этом исследование функции $R(\gamma)$ показывает, что она имеет на луче $(1, +\infty)$ единственный нуль γ_0, причем соблюдаются неравенства (2.26) (где $\gamma_1 = +\infty$), а также условие $\dot{R}(\gamma_0) > 0$. Далее, справедливо соотношение

$$\operatorname{sign}\Delta(\gamma_0) = \operatorname{sign}\left(\nu - \frac{7}{8}\right) \tag{3.25}$$

Кроме того, из выражения (3.24) для функции $\Sigma(\gamma)$ следует, что имеет место равенство (2.25). Из сказанного сразу же вытекает, что при $\nu > 7/8$ выполнены все требования теоремы 3. Если $\nu = 7/8$, то формула (3.25) дает $\Delta(\gamma_0) = 0$. При этом можно показать, что γ_0 равняется трем и выполняется соотношение $\lim_{\gamma \to 3} G(\gamma) = -2\pi/\sqrt{3}$, показывающее, что точка $\gamma_0 = 3$ не является предельной для множества Γ_G^+. Значит, посылка теоремы 3 соблюдается и в этом случае. Наконец, при $\gamma < 7/8$ согласно формуле (3.25) имеем $\Delta(\gamma_0) < 0$. Если учесть равенство (2.25) и воспользоваться замечанием 3° к теореме 3, то опять-таки приходим к выводу, что все условия этой теоремы выполнены. Следовательно, при $\nu > 0{,}5$ рассматриваемый материал обладает малой жесткостью.

Пусть теперь $\nu = 0{,}5$. Тогда в силу (3.24) имеем $R(\gamma) = \gamma(\gamma - 1)^2$, откуда вытекает $\Gamma_R^+ = L$, т.е. соблюдается посылка теоремы 4. Таким образом, и при $\nu = 0{,}5$ потенциал (3.23) определяет материал малой жесткости. Случай $\nu = 0{,}5$ примечателен тем, что для него часть элементарных неравенств, эквивалентных условию Адамара [16], превращаются в равенства (для определенных значений I_1, I_2). Другими словами, при $\gamma_1 = \nu_2 = 0{,}5$ энергия (3.23) принадлежит границе пространства $H(\Pi)$ потенциалов Π, удовлетворяющих условию Адамара. Поведение этого материала при малых деформациях из неискаженного состояния аналогично деформированию жестко-пластического тела. Заметим также, что при $\nu = 0{,}5$ выполняется соотношение (2.43), т.е. для любой толщины τ точная нижняя граница множества критических значений параметра γ совпадает с единицей. Вместе с тем критическая нагрузка q отлична от нуля.

В заключение отметим, что развитый в разд. 2 математический аппарат применим также к исследованию осесимметричной неустойчивости круглой плиты, сжатой равномерным боковым давлением. Все качественные особенности, вскрытые при анализе поведения бруса, остаются в силе и для плиты. В количественном отношении заслуживает внимания тот факт, что в случае материалов повышенной жесткости "предельная" толщина для плиты, как показывает численный эксперимент, оказывается в два-три раза ниже, чем у бруса. В качестве примера приведем по два значения τ_*, вычисленных для плиты из материалов Харт-Смита и Александера соответственно:

$\nu = 3{,}0, \quad n = 0{,}2 \sim \tau_* = 0{,}1647;$

$\nu = 10{,}0, \quad n = 0{,}99 \sim \tau_* = 0{,}1458;$

$k_1 = 20{,}0, \quad k_2 = 3{,}0, \quad n_1 = 1{,}0, \quad n_2 = 0{,}99 \sim \tau_* = 0{,}1412;$

$k_1 = 20{,}0, \quad k_2 = 9{,}0, \quad n_1 = 40{,}0, \quad n_2 = 3{,}0 \sim \tau_* = 0{,}1747$

Остается сравнить эти значения τ_* с данными, приведенными для примеров 1° и 2°.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
2. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
3. *Зубов Л.М.* Об условиях единственности в малом состояния гидростатического сжатия упругого тела // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 3. С. 497–506.
4. *Зубов Л.М.* Выпучивание пластинок из неогуковского материала при аффинной начальной деформации // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 4. С. 632–642.
5. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
6. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986. 332 с.
7. *Зубов Л.М., Рудев А.Н.* Однородные решения для предварительно напряженной упругой плиты // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 920–929.
8. *Рудев А.Н.* К исследованию спектра одной системы однородных решений // Материалы конф. Достижения технического прогресса на службе производства. Псков, 1980. С. 51–54.

9. *Рудев А.Н.* Об одном точном решении задачи устойчивости для упругой толстой плиты // Материалы конф. Достижения технического прогресса на службе производства. Псков, 1980. С. 59–61.
10. *Hart-Smith L.J.* Elasticity parameters for finite deformations of rubber-like materials // Z. Angew. Math. Phys. 1966. B. 17. № 5. S. 608–625.
11. *Alexander H.* A consitutive relation for rubber-like materials // Intern. J. Engng. Sci. 1968. V. 6. N 9. P. 549–563.
12. *Вольвич С.И.* Устойчивость конечных деформаций пластинки // Проблемы устойчивости в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. С. 203–209.
13. *Вольвич С.И., Фокин Ю.Ф.* К теории изгиба пластинок с учетом конечных деформаций // Тр. 6-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку. 1966. М.: Наука, 1966. С. 244–250.
14. *Zee L., Sternberg E.* Ordinary and strong ellipticity in the equilibrium theory of incompressible hyperelastic solids // Arch. for Rat. Mech. and Analysis. 1983. V. 83. No. 1. P. 53–90.
15. *Зеленин А.А., Зубов Л.М.* Поведение толстой круглой плиты после потери устойчивости // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 642–650.
16. *Гурвич Е.Л., Лурье А.И.* К теории распространения волн в нелинейно упругой среде (эффективная проверка условия Адамара) // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 6. С. 110–116.
17. *Klosner J.M., Segal A.* Mechanical characterization of a natural rubber // PIBAL Rep. 69–42. Polytechnic Inst. of Brooklyn. N. J. 1969.
18. *Бидерман В.Л.* Вопросы расчета резиновых деталей // Расчеты на прочность. М.: Машгиз, 1958. Вып. 3. С. 40–87.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
17.VII.1992