УДК 537.84

© 1993 г. В.М. Коровин

О СИЛЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА КАПЛЮ В ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ, ПРИ НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Рассматривается движение сферической капли в градиентном нестационарном потоке вязкой жидкости, движущейся в собственном магнитном поле пространственно неоднородного электрического тока, протекающего сквозь жидкость с находящимися в ней каплями и порождающего вихревые силы Лоренца. Проводимость капель отличается от проводимости несущей жидкости, ввиду чего каждая капля создает локальную неоднородность в распределении электромагнитного поля, оказывающую существенное влияние на течение вблизи капли. С использованием метода решений уравнений Стокса, содержащих вихревые объемные силы [1], получена формула для силы, действующей на каплю.

В имеющихся работах (библиография приведена в [2]) исследовано влияние однородного электрического тока на картину гидродинамических линий тока и коэффициент сопротивления при обтекании частиц однородным потоком.

1. При малых магнитных числах Рейнольдса R_m система уравнений магнитной гидродинамики, описывающая движение однородной жидкости в собственном магнитном поле протекающих по ней постоянных электрических токов, подведенных от внешнего источника, имеет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \rho[\partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}] = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} + c^{-1}\mathbf{j}\times\mathbf{H} + \rho\mathbf{g} \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi c^{-1}\mathbf{j}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – скорость, ρ, p – плотность и давление $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ – магнитное и электрическое поля, $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести, μ, σ – динамическая вязкость и проводимость, c – скорость света. Ввиду малости R_m пренебрегается различием электрических полей в движущихся друг относительно друга системах отсчета. При записи уравнений (1.1) используется неподвижная декартова прямоугольная система координат x_1, x_2, x_3. Рассматривается случай пространственно неоднородного распределения плотности тока $\mathbf{j}$, так что силы Лоренца имеют вихревой характер [2]. В дальнейшем под $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, $\mathbf{E}(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ понимается решение конкретной задачи, сформулированной для системы уравнений (1.1), (1.2).

Пусть в некоторый момент времени в рассматриваемый поток помещаются капли несмешивающейся проводящей жидкости. Пренебрегая гидродинамическим и электромагнитным взаимодействием капель, вычислим силу, действующую на отдельную каплю. С этой целью воспользуемся подходом, предложенным в обычной гидродинамике при вычислении силы, действующей на частицу в градиентном потоке при малых числах Рейнольдса, характеризующих движение жидкости относительно частицы [3].

Обозначим $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t)$ траекторию центра тяжести O рассматриваемой капли и введем подвижную прямоугольную систему координат $\xi_i = x_i - X_i$ ($i = 1, 2, 3$) с началом в точке O, совершающую вместе с каплей поступательное движение со скоростью $\mathbf{V} = d\mathbf{X}/dt$. В общем случае течение жидкостей, рассматриваемое относительно неинерциальной системы отсчета ξ_1, ξ_2, ξ_3 (относительное движение) описывается уравнениями

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_k = 0, \quad \rho_k[\partial\mathbf{u}_k / \partial t + (\mathbf{u}_k\nabla)\mathbf{u}_k] =$$

$$= -\nabla p_k + \mu_k\Delta\mathbf{u}_k + (4\pi)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H}_k \times \mathbf{H}_k + \rho_k(\mathbf{g} - d\mathbf{V}/dt), \quad k = 1,2 \tag{1.3}$$

Величины с индексом 1 относятся к капле, а с индексом 2 – к несущей жидкости. Уравнения для полей $\mathbf{H}_k$, $\mathbf{E}_k$ аналогичны (1.2). После исключения из этих уравнений $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ получаем

$$\Delta\mathbf{H}_k = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H}_k = 0, \quad k = 1,2 \tag{1.4}$$

Пусть Г – поверхность капли, а $\eta(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = 0$ – ее уравнение. На поверхности Г выполняются следующие кинематические, динамические и электромагнитные условия:

$$\partial\eta / \partial t + |\nabla\eta| u_{1n} = 0, \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{p}_{n\tau}^{(2)} = \mathbf{p}_{n\tau}^{(1)}, \quad p_{nn}^{(2)} - p_{nn}^{(1)} = \alpha \operatorname{div}\mathbf{n} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2, \quad \sigma_1^{-1}(\operatorname{rot}\mathbf{H}_1)_\tau = \sigma_2^{-1}(\operatorname{rot}\mathbf{H}_2)_\tau \tag{1.6}$$

где $\mathbf{p}_n = p_{ij}э_i n_j$, p_{ij} – гидродинамическая часть тензора напряжений, $э_i$ – векторы базиса системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3, $\mathbf{n} = n_i э_i$ – единичный вектор внешней к Г нормали, α – коэффициент поверхностного натчжения; индексами n, τ отмечены нормальные и касательные к Г составляющие соответствующих векторов. Вдали от капли выполняются условия

$$|\xi|/a \to \infty\colon \quad \mathbf{u}_2 \to \mathbf{u} - \mathbf{V}, \quad \mathbf{H}_2 \to \mathbf{H} \tag{1.7}$$

где a – характерный размер капли.

В отсутствие капель уравнения относительного движения жидкости имеют вид

$$\operatorname{div}\mathbf{U} = 0, \quad \rho_2[\partial\mathbf{U} / \partial t + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U}] = -\nabla P + \mu_2\Delta\mathbf{U} + (4\pi)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H} \times \mathbf{H} + \rho_2(\mathbf{g} - d\mathbf{V}/dt) \tag{1.8}$$

причем $\mathbf{U}(\xi, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{V}(t)$. Пусть l – характерный масштаб расстояния, на котором скорость $\mathbf{U}$ и магнитное поле $\mathbf{H}$ претерпевают существенные изменения; при этом, естественно, $\varepsilon = a/l \ll 1$. Предполагается, что характерная относительная скорость U_* невелика, так что число Рейнольдса R, построенное по U_* и по длине a, мало.

Магнитные поля и распределения гидродинамических параметров вне капли будем искать в виде

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{H} + \mathbf{h}_k, \quad k = 1,2; \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{U} + \mathbf{v}, \quad p_2 = P + q \tag{1.9}$$

По порядку величины масштаб расстояния, на котором происходит существенное изменение возмущений $\mathbf{h}_2$, $\mathbf{v}$, q, определяется размером капли. Подставляя

(1.9) в (1.3) и учитывая (1.8), после отбрасывания величин порядков R, εR, $R_\upsilon = \rho_2 \upsilon_* a/\mu_2$ получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho_2 \partial \mathbf{v}/\partial t = -\nabla q + \mu_2 \Delta \mathbf{v} + \boldsymbol{\psi}_2$$
$$\boldsymbol{\psi}_2 = (4\pi)^{-1}(\operatorname{rot} \mathbf{H}_2 \times \mathbf{h}_2 + \operatorname{rot} \mathbf{h}_2 \times \mathbf{H}) \qquad (1.10)$$

Внутри капли в стоксовом приближении имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0, \quad \rho_1 \partial \mathbf{u}_1/\partial t = -\nabla p_1 + \mu_1 \Delta \mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\psi}_1 + \rho_1(\mathbf{g} - d\mathbf{V}/dt)$$
$$\boldsymbol{\psi}_1 = (4\pi)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_1 \qquad (1.11)$$

Уравнения для вызываемых каплей возмущений магнитного поля сохраняют исходный вид (1.4)

$$\Delta \mathbf{h}_k = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{h}_k = 0, \quad k = 1,2 \qquad (1.12)$$

Считается, что в момент помещения в жидкость капля была сферической. В дальнейшем при движении капли на ее поверхности образуется неоднородное распределение нормальной составляющей $p_{nn}^{(2)}$ вектора напряжений, изменяющее первоначальную форму капли. В отсутствие электромагнитного поля при установившемся движении капли в покоящейся жидкости в случае малых чисел Рейнольдса и Вебера силы поверхностного натяжения в последнем динамическом условии (1.5) существенно превышают неоднородность распределения нормальных напряжений, ввиду чего отклонение формы капли от сферы мало́ [4]. При вычислении действующей на каплю силы в рамках нестационарных уравнений Стокса (библиография имеется в [5]) деформацией сферической капли пренебрегается. В рассматриваемом случае предполагается выполненным условие $We = \rho_2 U_*^2 a/\alpha \ll 1$, и деформация капли не учитывается ввиду малости.

Введем сферическую систему координат r, ϑ, φ с полюсом в точке 0: $\xi_1 = r \sin\vartheta \cos\varphi$, $\xi_2 = r \sin\vartheta \sin\varphi$, $\xi_3 = r\cos\vartheta$. В пренебрежении отклонением формы капли от сферы $r = a$ краевые условия (1.5), (1.6) при учете (1.9) запишем в виде

$$u_{1n} = 0, \quad \upsilon_n = -U_n^0, \quad \mathbf{u}_{1\tau} - \mathbf{v}_\tau = \mathbf{U}_\tau^0 \qquad (1.13)$$

$$\mu_1 \partial \mathbf{u}_{1\tau}/\partial r - \mu_2 \partial \mathbf{v}_\tau/\partial r = (\mu_1 - \mu_2) a^{-1} \mathbf{u}_{1\tau}, \quad \mathbf{U}^0 = \mathbf{U}(0,t)$$
$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2, \quad \sigma_1^{-1}(\operatorname{rot} \mathbf{h}_1)_\tau - \sigma_2^{-1}(\operatorname{rot} \mathbf{h}_2)_\tau = (\sigma_2^{-1} - \sigma_1^{-1})(\operatorname{rot} \mathbf{H}|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}})_\tau \qquad (1.14)$$

В правых частях второго и третьего краевого условия (1.13), а также второго условия (1.14) опущены малые порядка ε. При подстановке выражений (1.9) в (1.7) получаем

$$r/a \to \infty: \quad \mathbf{v} \to 0, \quad \mathbf{h}_2 \to 0 \qquad (1.15)$$

Предполагается, что в начальный момент времени жидкости покоятся:

$$t = 0: \quad \mathbf{u}_1 = 0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{V} = 0 \qquad (1.16)$$

Таким образом, расчет вызываемых каплей возмущений гидродинамического и магнитного полей сводится к решению задачи (1.10) – (1.16). Физический смысл имеют, естественно, лишь ограниченные решения с ограниченными производными.

2. При вычислении силы $\mathbf{F}$, действующей на каплю, необходимо учесть воздействие несущей жидкости и электромагнитного поля:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_m; \quad \mathbf{F}_l = \int\limits_{r=a} \mathbf{p}_n^{(2)} d\sigma, \quad \mathbf{F}_m = \int\limits_{r=a} \mathbf{T}_n^{(2)} d\sigma, \quad \mathbf{T}_n = T_{ij} \mathbf{э}_i n_j \tag{2.1}$$

$$T_{ij} = (4\pi)^{-1}(H_i H_j - \tfrac{1}{2} H^2 \delta_{ij}); \quad \delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j, \quad \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j$$

В рамках принятого подхода $p_{ij}^{(2)}$ записывается аналогично представлению гидродинамического поля (1.9)

$$p_{ij}^{(2)} = \Pi_{ij} + \pi_{ij}; \quad \Pi_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu_2 \left(\frac{\partial U_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial U_j}{\partial \xi_i} \right), \quad \pi_{ij} = -q\delta_{ij} + \mu_2 \left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial \xi_i} \right)$$

так что первое слагаемое в выражении для силы (2.1) по формуле Гаусса–Остроградского преобразуется к виду

$$\mathbf{F}_l = \mathbf{F}_l^0 + \mathbf{F}_l^1; \quad \mathbf{F}_l^0 = \int\limits_{r \le a} (-\nabla P + \mu_2 \Delta \mathbf{U}) d\tau, \quad \mathbf{F}_l^1 = \int\limits_{r=a} \pi_n d\sigma, \quad \pi_n = \pi_{ij} \mathbf{э}_i n_j \tag{2.2}$$

Аналогичным образом преобразуется второе слагаемое

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{r \le a} \left[(\mathbf{H}_1 \nabla)\mathbf{H}_1 - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{H}_1^2 \right] d\tau = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{r \le a} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_1 d\tau = \mathbf{F}_m^0 + \mathbf{F}_m^1$$

$$\mathbf{F}_m^0 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{r \le a} \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H} d\tau, \quad \mathbf{F}_m^1 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{r \le a} (\operatorname{rot} \mathbf{h}_1 \times \mathbf{H}_1 + \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{h}_1) d\tau$$

В результате при учете уравнения относительного движения жидкости (1.8) формулу для силы (2.1) запишем в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}_l^1 + \mathbf{F}_m^1; \quad \mathbf{F}^0 = \mathbf{F}_l^0 + \mathbf{F}_m^0 = \rho_2 \int\limits_{r \le a} \left[\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) - \mathbf{g} \right] d\tau \tag{2.3}$$

Выражение в круглых скобках представляет ускорение $d\mathbf{u}/dt$ частицы жидкости по отношению к неподвижной системе координат x_1, x_2, x_3. Пренебрегая изменением $d\mathbf{u}/dt$ в области интегрирования, находим

$$\mathbf{F}^0 = \frac{4\pi a^3}{3} \rho_2 \left(\left. \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|_{\mathbf{x} = \mathbf{X}(t)} - \mathbf{g} \right)$$

По форме это выражение совпадает с полученным ранее [3], но при этом ускорение $d\mathbf{u}/dt$ зависит от распределения сил Лоренца в жидкости.

Для вычисления силы $\mathbf{F}_m^1$, порождаемой возмущением электромагнитного поля, вызываемым каплей, требуется найти решение задачи (1.12), (1.14), (1.15). При построении решения воспользуемся [6] векторными сферическими гармониками $\mathbf{P}_{mn}(\vartheta, \varphi)$, $\mathbf{B}_{mn}(\vartheta, \varphi)$, $\mathbf{C}_{mn}(\vartheta, \varphi)$:

$$\mathbf{P}_{mn} = Y_{mn} \mathbf{a}_r, \quad Y_{mn} = e^{im\varphi} P_n^m(\cos\vartheta); \quad m = 0, 1, \ldots, n; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mathbf{B}_{mn} = \frac{r}{\sqrt{n(n+1)}} \nabla Y_{mn}, \quad \mathbf{C}_{mn} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \operatorname{rot}[r Y_{mn} \mathbf{a}_r]; \quad \begin{matrix} m = 0, 1, \ldots, n; \\ n = 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

и угловыми функциями $\mathbf{D}_{mn}^\alpha(\vartheta, \varphi)$ ($\alpha = 1, \ldots, 6$), образующими на сфере полную ортогональную систему:

$$\mathbf{D}^1_{mn} = \sqrt{n(n+1)}\mathbf{C}^e_{mn}, \quad \mathbf{D}^3_{mn} = \sqrt{n+1}[\sqrt{n+2}\mathbf{B}^e_{m,n+1} + \sqrt{n+1}\mathbf{P}^e_{m,n+1}]$$

$$\mathbf{D}^5_{mn} = \sqrt{n}[\sqrt{n-1}\mathbf{B}^e_{m,n-1} - \sqrt{n}\mathbf{P}^e_{m,n-1}]$$

Здесь $\mathbf{a}_r$ – единичный вектор вдоль координатной линии r; индексом e отмечаются действительные части соответствующих выражений, а индексом o – мнимые части. Выражения $\mathbf{D}^2_{mn}$, $\mathbf{D}^4_{mn}$, $\mathbf{D}^6_{mn}$ получаются из $\mathbf{D}^1_{mn}$, $\mathbf{D}^3_{mn}$, $\mathbf{D}^5_{mn}$ заменой индекса e на o.

Невозмущенное магнитное поле, фигурирующее в краевых условиях (1.14), с точностью до малых порядка r/l имеет следующее представление в окрестности точки O:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + r\left[\mathbf{A} + \frac{\varepsilon^0_{11} - \varepsilon^0_{22}}{12}\mathbf{D}^3_{21} + \frac{\varepsilon^0_{33}}{2}\mathbf{D}^3_{01} + \frac{\varepsilon^0_{12}}{6}\mathbf{D}^4_{21} + \frac{\varepsilon^0_{13}}{3}\mathbf{D}^3_{11} + \frac{\varepsilon^0_{23}}{3}\mathbf{D}^4_{11}\right]$$

$$\mathbf{A} = 2\pi c^{-1}(j^0_1\mathbf{D}^1_{11} + j^0_2\mathbf{D}^2_{11} + j^0_3\mathbf{D}^1_{01}) \tag{2.4}$$

$$\varepsilon^0_{ij} = \tfrac{1}{2}(\partial H_i / \partial x_j + \partial H_j / \partial x_i)_{\mathbf{x}=\mathbf{X}}, \quad \mathbf{H}^0 = \mathbf{H}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{j}^0 = \mathbf{j}(\mathbf{X})$$

Разыскивая решение задачи (1.12), (1.14), (1.15) в виде суммы соленоидальных частных решений векторного уравнения Лапласа [6], разлагающихся по той же системе векторных сферических гармоник, что и выражение в квадратных скобках в правой части (2.4), получаем

$$\mathbf{h}_1 = (\kappa-1)r\mathbf{A}, \quad \mathbf{h}_2 = (\kappa-1)a^3r^{-2}\mathbf{A}, \quad \kappa = 3\sigma_1/(\sigma_1+2\sigma_2) \tag{2.5}$$

При помощи выражений (2.4), (2.5) можно вычислить $\mathbf{F}^1_m$, а также плотность сил Лоренца ψ_1 внутри капли и вызываемое каплей возмущение сил Лоренца ψ_2 в несущей жидкости. Ограничиваясь главными по малому параметру r/l членами разложений, имеем

$$\mathbf{F}^1_m = \tfrac{4}{3}\pi a^3(\kappa-1)\mathbf{f}^0, \quad \mathbf{f}^0 = c^{-1}\mathbf{j}^0 \times \mathbf{H}^0$$

$$\psi_1 = \kappa\mathbf{f}^0, \quad \psi_2 = 2\pi(\kappa-1)c^{-1}(a/r)^3\mathbf{H}^0 \times (j^0_1\mathbf{D}^5_{12} + j^0_2\mathbf{D}^6_{12} + j^0_3\mathbf{D}^5_{02}) \tag{2.6}$$

В рассматриваемом приближении $\mathrm{rot}\,\psi_1 = 0$, в то время как $\mathrm{rot}\,\psi_2 \neq 0$.

3. Метод [1] решения краевых задач для стационарных уравнений Стокса, содержащих вихревые объемные силы, нетрудно обобщить на нестационарный случай. В рамках этого метода поле скоростей строится в виде разложения по угловым функциям $\mathbf{D}^\alpha_{mn}$, а поле давлений – в виде разложения по сферическим функциям Y^e_{mn}, Y^0_{mn}. В приближении Стокса при вычислении силы, действующей на каплю в потоке вязкой несжимаемой жидкости, ненулевой вклад дают [1] лишь члены разложений, содержащие $\mathbf{D}^3_{00}$, $\mathbf{D}^3_{10}$, $\mathbf{D}^4_{10}$, Y_{01}, Y^e_{11}, Y^0_{11}. В разложении поля скоростей для удовлетворения краевым условиям на поверхности капли требуется учесть также члены, содержащие угловые функции $\mathbf{D}^5_{02}$, $\mathbf{D}^5_{12}$, $\mathbf{D}^6_{12}$, выражающиеся через те же самые векторные сферические гармоники $\mathbf{P}_{01}$, $\mathbf{B}_{01}$,

$\mathbf{P}^e_{11}$, $\mathbf{B}^e_{11}$, $\mathbf{P}^0_{11}$, $\mathbf{B}^0_{11}$, что и $\mathbf{D}^3_{00}$, $\mathbf{D}^3_{10}$, $\mathbf{D}^4_{10}$. В рассматриваемом случае нестационарных уравнений Стокса части $\mathbf{v}'_k$, p'_k (k = 1, 2) гидродинамических полей ($\mathbf{u}_1, p_1$), ($\mathbf{v}$, q), достаточные для вычисления при помощи (2.2) силы

$$\mathbf{F}^1_l = \int\limits_{r=a} \pi'_n d\sigma; \quad \pi'_n = -p'_2\mathbf{a}_r + \mu_2\left[\frac{\partial \mathbf{v}'_2}{\partial r} - \frac{\mathbf{v}'_2}{r} + \frac{1}{r}\nabla(r v'_{2r})\right] \tag{3.1}$$

следует искать в виде

$$\mathbf{v}'_k = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{w}_k, \quad p'_k = (\mu_k\Delta - \rho_k\partial/\partial t)\operatorname{div}\mathbf{w}_k \tag{3.2}$$

$$\mathbf{w}_\mathbf{k} = x_{k1}(r,t)\mathbf{D}^3_{10} + x_{k2}(r,t)\mathbf{D}^4_{10} + x_{k3}(r,t)\mathbf{D}^3_{00} +$$
$$+ y_{k1}(r,t)\mathbf{D}^5_{12} + y_{k2}(r,t)\mathbf{D}^6_{12} + y_{k3}(r,t)\mathbf{D}^5_{02} \tag{3.3}$$

Подстановка выражения (3.3) в (3.2) приводит к следующей форме записи искомой части гидродинамических полей:

$$\mathbf{v}'_k = -\tfrac{2}{3}[T(x_{k1}, y_{k1})\mathbf{D}^3_{10} + T(x_{k2}, y_{k2})\mathbf{D}^4_{10} + T(x_{k3}, y_{k3})\mathbf{D}^3_{00}] -$$
$$-\tfrac{1}{3}[S(x_{k1}, y_{k1})\mathbf{D}^5_{12} + S(x_{k2}, y_{k2})\mathbf{D}^6_{12} + S(x_{k3}, y_{k3})\mathbf{D}^5_{02}]$$

$$p'_k = \left(\mu_k L_1 - \rho_k\frac{\partial}{\partial t}\right)\left\{Y^e_{11}\left[\frac{\partial x_{k1}}{\partial r} - 2\left(\frac{\partial y_{k1}}{\partial r} + \frac{3y_{k1}}{r}\right)\right] + Y^0_{11}\left[\frac{\partial x_{k2}}{\partial r} - \right.\right.$$
$$\left.\left. -2\left(\frac{\partial y_{k2}}{\partial r} + \frac{3y_{k2}}{r}\right)\right] + Y_{01}\left[\frac{\partial x_{k3}}{\partial r} - 2\left(\frac{\partial y_{k3}}{\partial r} + \frac{3y_{k3}}{r}\right)\right]\right\}$$

$$T(x_{ki}, y_{ki}) = L_0(x_{ki} + y_{ki}) + \frac{3}{r}\left(\frac{\partial y_{ki}}{\partial r} + \frac{y_{ki}}{r}\right)$$

$$S(x_{ki}, y_{ki}) = L_0(x_{ki} + y_{ki}) - \frac{3}{r}\left(\frac{\partial x_{ki}}{\partial r} + \frac{2y_{ki}}{r}\right), \quad i = 1,2,3$$

$$L_n = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}, \quad n = 0,1,2$$

Уравнения, краевые и начальные условия для $\mathbf{v}'_k$, p'_k, совпадают, естественно, с (1.10), (1.11), (1.13), (1.15), (1.16). Подставляя в эти выражения представления (3.2), (3.3) и раскладывая $\psi_1 + \rho_1(\mathbf{g} - d\mathbf{V}/dt)$, ψ_2 в ряды по полной системе угловых функций, приходим к следующим задачам:

$$L_0\left[\left(\mu_1 L_0 - \rho_1\frac{\partial}{\partial t}\right)x_{1i}\right] = a_{1i}, \quad L_2\left[\left(\mu_1 L_2 - \rho_1\frac{\partial}{\partial t}\right)y_{1i}\right] = 0 \tag{3.4}$$

$$L_0\left[\left(\mu_2 L_0 - \rho_2\frac{\partial}{\partial t}\right)x_{2i}\right] = 0, \quad L_2\left[\left(\mu_2 L_2 - \rho_2\frac{\partial}{\partial t}\right)y_{2i}\right] = \frac{a_{2i}}{r^3} \tag{3.5}$$

$$r = a\!: \quad T(x_{1i}, y_{1i}) - S(x_{1i}, y_{1i}) = 0, \quad T(x_{2i}, y_{2i}) - S(x_{2i}, y_{2i}) = \frac{3}{2}U^0_i \tag{3.6}$$

$$2[T(x_{2i}, y_{2i}) - T(x_{1i}, y_{1i})] + S(x_{2i}, y_{2i}) - S(x_{1i}, y_{1i}) = 3U^0_i$$

$$\mu_2 \frac{\partial}{\partial r}[2T(x_{2i},y_{2i})+S(x_{2i},y_{2i})]-\mu_1 \frac{\partial}{\partial r}[2T(x_{1i},y_{1i})+S(x_{1i},y_{1i})]=$$

$$=\frac{\mu_2-\mu_1}{a}[2T(x_{1i},y_{1i})+S(x_{1i},y_{1i})]$$

$$r/a \to \infty:\quad T(x_{2i},y_{2i}) \to 0,\quad S(x_{2i},y_{2i}) \to 0$$

$$t=0:\quad x_{ki}=0,\quad y_{ki}=0$$

Правые части уравнений (3.4), (3.5) – коэффициенты, стоящие в разложениях $\psi_1 + \rho_1(\mathbf{g} - d\mathbf{V}/dt)$, ψ_2 перед теми угловыми функциями, с которыми искомые функции x_{ki}, y_{ki} входят в представление (3.3). Обращаясь к (2.6), получаем

$$a_{1i}=\kappa f_i^0+\rho_1(g_i-dV_i/dt),\quad a_{2i}=\tfrac{1}{4}a^3(\kappa-1)f_i^0,\quad i=1,2,3$$

Воспользовавшись преобразованием Лапласа по времени, найдем решения операторных задач, соответствующих уравнениям (3.4), (3.5) и краевым условиям (3.6). Вычисляемое при помощи этих решений изображение $L(\pi'_n)$ на поверхности капли (при $r=a$) имеет вид

$$L[\pi'_n(a,\vartheta,\varphi,t)]=\frac{\mu_2}{2a}\{[12+\theta s+3\delta(\theta s)(\sqrt{\theta s}-3)]L(\mathbf{U}_n^0)-$$

$$-3[2-\delta(\theta s)(\sqrt{\theta s}+3)]L(\mathbf{U}_\tau^0)\}-\frac{a(\kappa-1)}{4s}\mathbf{f}_n^0;\quad \theta=\frac{\rho_2 a^2}{\mu_2} \tag{3.7}$$

$$\delta(\theta s)=\frac{\mu_1\beta(\lambda)+2\mu_2\gamma(\lambda)}{\mu_1\beta(\lambda)+\mu_2\gamma(\lambda)(\sqrt{\theta s}+3)},\quad \lambda=\frac{\sqrt{\theta s}}{B},\quad B=\frac{\rho_2\mu_1}{\rho_1\mu_2}$$

$$\beta(\lambda)=\lambda\operatorname{ch}\lambda(6+\lambda^2)-3\operatorname{sh}\lambda(2+\lambda^2),\quad \gamma(\lambda)=\operatorname{sh}\lambda(3+\lambda^2)-3\lambda\operatorname{ch}\lambda$$

где s – параметр преобразования Лапласа. Интегрируя выражение (3.7) по поверхности капли и совершая обратное преобразование Лапласа, находим

$$\mathbf{F}_l^1=\frac{2\pi a\mu_2(3\mu_1+2\mu_2)}{\mu_1+\mu_2}\{\mathbf{u}[\mathbf{X}(t),t]-\mathbf{V}(t)\}+\frac{2\pi a^3}{3}\rho_2\frac{d}{dt}\{\mathbf{u}[\mathbf{X}(t),t]-\mathbf{V}(t)\}+$$

$$+6\pi a\mu_2\int_0^t I_1\left(\frac{t-\tau}{\theta}\right)\frac{d}{d\tau}\{\mathbf{u}[\mathbf{X}(\tau),\tau]-\mathbf{V}(\tau)\}d\tau-\frac{\pi a^3}{3}(\kappa-1)\mathbf{f}^0 \tag{3.8}$$

Здесь $I_1(t/\theta)$ – оригинал изображения

$$K_1(\theta s)=\frac{1}{\theta s}\left[\delta(\theta s)(\sqrt{\theta s}+1)-\frac{3\mu_1+2\mu_2}{3(\mu_1+\mu_2)}\right]$$

Полученные численным путем графики функции $\pi^{-1}I_1(t/\theta)$ при различных значениях параметров μ_1/μ_2, B приведены в [5]. В рассматриваемом приближении, как и в случае частиц [2], перестройка течения вблизи капли, вызываемая электромагнитным полем, не оказывает влияния на коэффициент сопротивления капли. Совершая в (3.8) предельный переход при $\mu_2/\mu_1 \to 0$, $\mu_2 = \mathrm{const}$, можно получить выражение для силы в случае твердой частицы.

При помощи (2.6), (3.8) находим суммарную силу электромагнитного происхождения, действующую на каплю

$$\mathbf{F}_s=\pi a^3(\kappa-1)\mathbf{f}^0 \tag{3.9}$$

При неизменном распределении тока в несущей жидкости (в отсутствие капель) $\mathbf{F}_s$ изменяет направление на противоположное при переходе от случая $\sigma_1 > \sigma_2$ к случаю $\sigma_1 < \sigma_2$.

Рассмотрим вкратце вопрос об электромагнитной силе, действующей на непроводящую ($\sigma_1 = 0$) каплю, обтекаемую электрическим током, проходящим по окружающей каплю проводящей жидкости. Магнитное поле внутри капли квазистационарно, так что с достаточной точностью применимы уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_1 = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H}_1 = 0 \tag{3.10}$$

тогда как магнитное поле $\mathbf{H}_2$ в несущей жидкости описывается уравнениями (1.4). В отличие от случая $\sigma_1 \neq 0$ на поверхности непроводящей капли ставится лишь первое условие (1.6) – требование непрерывности магнитного поля. При этом непрерывность касательной составляющей магнитного поля на поверхности капли совместно с первым уравнением (3.10) автоматически обеспечивает обращение в нуль нормальной составляющей плотности тока при $r = a$.

После расчета магнитных полей, следуя изложенной выше процедуре применительно к непроводящей капле, находим $\mathbf{F}_s = -\pi a^3 \mathbf{f}^0$, т.е. формула (3.9) применима как для проводящей, так и для непроводящей капли.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Korovin V.M.* Effect of direct current on the thermocapillary migration of droplets in microgravity // Acta astronaut. 1988. V. 17, № 11/12. P. 1203–1209.
2. *Бояревич В.В., Фрейберг Я.Ж., Шилова Е.И., Щербинин Э.В.* Электровихревые течения. Рига: Зинатне, 1985. 315 с.
3. *Maxey M.R., Riley J.J.* Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 4. P. 883–889.
4. *Taylor T.D., Acrivos A.* On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. Pt. 3. P. 466–476.
5. *Паршикова Н.В.* К расчету силы и момента сил, действующих на каплю в произвольном нестационарном потоке вязкой жидкости // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 5. С. 772–779.
6. *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 886 с.

Москва

Поступила в редакцию 10.II.1991