

УДК 536.423.1

© 1993 г. А.П. Курячий

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ, ИНДУЦИРУЕМОГО ВДУВОМ ГАЗА ЧЕРЕЗ СТЕНКИ КАНАЛА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Предлагается метод расчета течения газа в узком плоском канале конечной длины. Газ вдувается через стенки канала и вытекает из него во внешнюю среду с заданным давлением. Расчеты проводятся в приближении Прандтля. Особенностью предложенного метода является возможность определения характеристик течения для различных значений характерного числа Маха на основе результатов одного расчета, проведенного при фиксированном числе Рейнольдса. Существенно упрощена процедура учета эллиптичности рассматриваемой задачи.

Течения, индуцируемые вдувом газа через стенки каналов конечной длины, моделировались (например, [1, 2]) при некоторых существенных упрощениях. На основе решения уравнений Навье – Стокса исследовалось [3] течение в плоском замкнутом канале при испарении и конденсации на одной его стенке и наличии рециркуляционной зоны.

1. Рассматривается плоское течение в канале длиной $2l^*$ и шириной $2h^*$. Течение индуцируется вдувом газа в канал через проницаемые стенки с постоянной плотностью расхода J^* и температурой газа T_0^* . Из канала через его открытые концы газ вытекает в окружающее пространство, в котором задано давление p_e^* (звездочкой обозначены размерные величины). Основным интересом представляет нахождение распределения давления по длине канала в зависимости от определяющих параметров задачи $l^*, h^*, J^*, p_e^*, T_0^*$.

Для численного решения задачи вводится прямоугольная система координат с началом, расположенным в середине одной (нижней) стенки канала, осью x^* , направленной вдоль канала, и осью y^* , перпендикулярной его стенкам. При выполнении условия $h^*/l^* \ll 1$ течение в канале можно рассчитывать в приближении Прандтля [4].

Если для представления уравнений в безразмерном виде в качестве характерных значений использовать такие определяющие параметры задачи, как полудлину канала l^* и давление внешней среды p_e^* , то в уравнениях импульса и энергии при членах с градиентом давления появится характерное число Маха

$M_0 = (R^*T_0^* / \gamma)^{1/2} J^* l^* / (p_e^* h^*)$, где R_e^* и γ – газовая постоянная и показатель адиабаты.

Кроме того, для решения параболических уравнений Прандтля необходимо задать начальные условия в центре канала $x = 0$. Они могут быть получены из решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получающихся при разложении уравнений Прандтля в окрестности $x = 0$. В эту систему уравнений войдут неизвестные заранее значения давления в центре канала и его второй производной по x . Последняя величина может быть определена, как показано ниже, путем удовлетворения одному из двух граничных условий для вертикальной скорости. Для определения же величины давления при $x = 0$ необходим алгоритм, обеспечивающий учет влияния внешнего давления p_e^* на давление в канале при "докритических" режимах истечения из него. Например, давление в центре канала можно определять каким-либо итерационным методом, задавая его значения, проводя расчет до выходного сечения канала и проверяя условие совпадения значения давления в выходном сечении с p_e^* на "докритических" режимах. При "сверхкритических" режимах истечения внешнее давление не влияет на течение в канале, и в этом случае надо проверять выполнение "критических" условий в выходном сечении. Что подразумевается в данной работе под термином "критический" режим, будет пояснено в дальнейшем.

Решение рассматриваемой задачи существенно упрощается, если в качестве характерного значения давления при записи уравнений в безразмерном виде использовать давление в центре канала p_0^* , которое будет определено после решения краевой задачи. При этом, как будет показано ниже, существенно упрощается учет влияния внешнего давления на "докритических" режимах и столь же просто определяется распределение давления при "сверхкритических" режимах.

Представляя произведение плотности газа на вертикальную скорость в виде $\rho^* v^* = J^* V$, где V – неизвестная функция, и выбирая в качестве характерного значения плотности величину $\rho_0^* = p_0^*/(R^* T_0^*)$, на основе уравнения неразрывности получим выражение для характерного значения продольной скорости течения $u_0^* = J^* L^* R^* T_0^*/(\rho_0^* h^*)$. Здесь L^* – эффективная длина, имеющая порядок полудлины канала l^* , которая вводится таким образом, что выполняется равенство $p_0^*/(\rho_0^* u_0^{*2}) = 1$. Отсюда следует выражение

$$L^* = \frac{\rho_0^* h^*}{J^* \sqrt{R^* T_0^*}} \quad (1.1)$$

Характерная длина L^* введена с целью исключения из уравнений числа Маха. В безразмерных координатах $x = x^*/L^*$ и $y = y^*/h^*$ система уравнений Прандтля с соответствующими граничными условиями имеет вид:

$$\frac{\rho}{T} u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dp}{dx} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\rho}{T} u \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \left[u \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$V = \int_y^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pu}{T} \right) dy \quad \left(\text{Re} = \frac{J^* h^*}{\mu_0^*}, \quad \text{Pr} = \frac{c_p^* \mu_0^*}{\eta_0^*} \right)$$

$$y = 0; \quad u = 0, \quad T = 1, \quad V = 1 \quad (1.3)$$

$$y = 1: \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

Здесь c_p^* – теплоемкость газа, μ_0^* и η_0^* – коэффициенты вязкости и теплопроводности при температуре T_0^* . При записи (1.2) использовано уравнение состояния совершенного газа. Граничные условия (1.4) являются условиями симметрии, справедливыми при вдуве газа на обеих стенках канала одинаковой интенсивности. Последнее условие (1.3) используется для определения градиента давления dp/dx в каждом рассчитываемом сечении канала.

Начальные условия для параболических уравнений (1.2) находятся из решения краевой задачи, полученной разложением искомых функций в окрестности $x = 0$

$$u = xU(y) + \dots, \quad V = V(y) + \dots, \quad T = T(y) + \dots, \quad dp/dx = xP + \dots \quad (1.5)$$

В результате подстановки (1.5) в (1.2)–(1.4) получим следующую краевую задачу:

$$\frac{U^2}{T} + VU' + P = \frac{1}{\text{Re}} (\mu U')', \quad VT' = \frac{1}{\text{RePr}} (\mu T')', \quad V = \int_y^1 \frac{U}{T} dy \quad (1.6)$$

$$y = 0: \quad U = 0, \quad T = 1, \quad V = 1; \quad y = 1: \quad U' = T' = 0$$

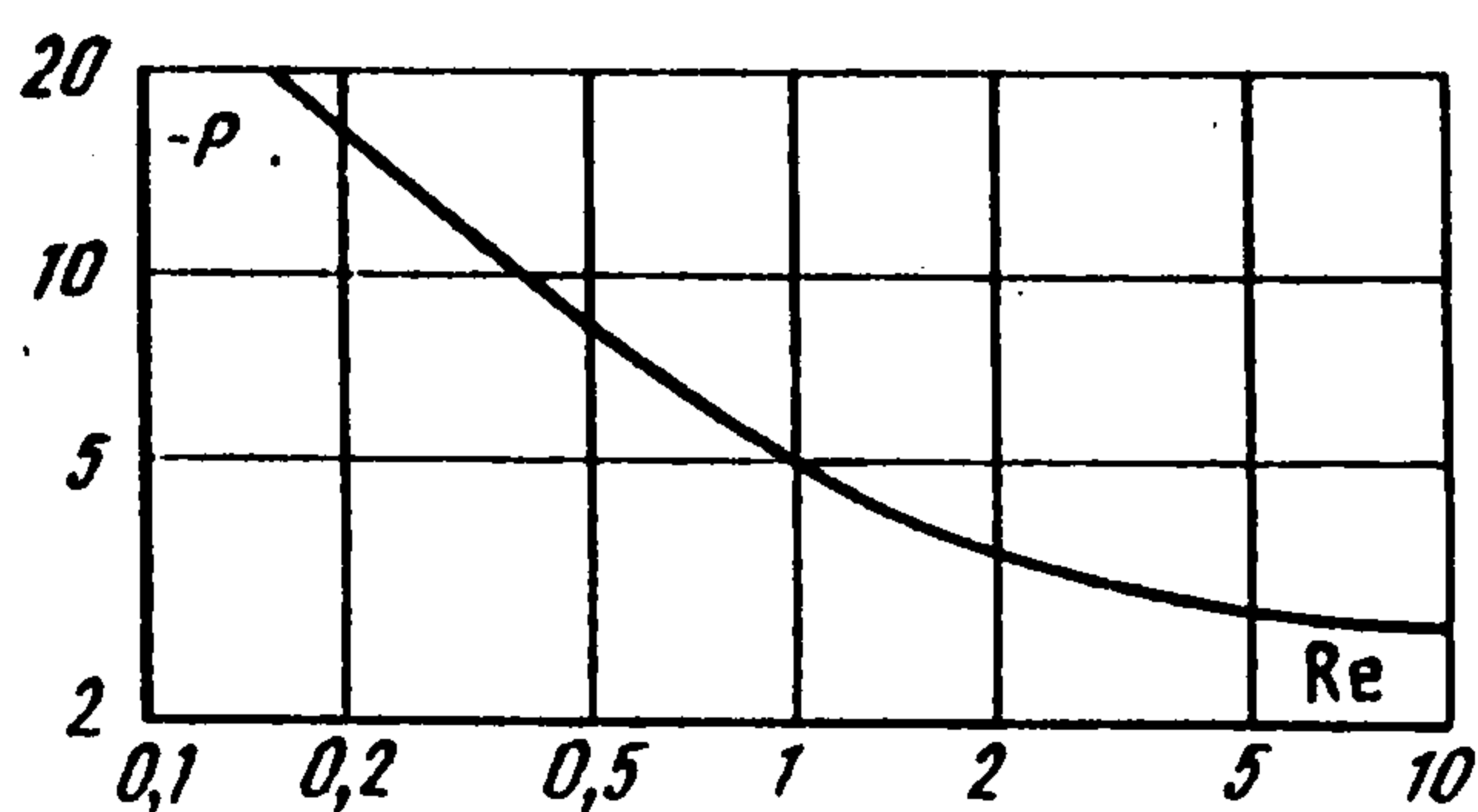
Штрихом обозначено дифференцирование по y .

Для системы уравнений четвертого порядка (1.6) относительно неизвестных функций U и T имеется пять граничных условий. Одно из них, а именно $V(0) = 1$, используется для определения входящей в (1.6) величины $P = d^2p(0)/dx^2$, которая находится методом секущих в процессе итерационного решения краевой задачи (1.6). Никакие другие неопределенные параметры в эту задачу не входят. Если давление относить к p_e^* , то в уравнения, аналогичные (1.6), кроме P войдет еще одна неизвестная величина $p(0)$. Поскольку количество граничных условий при этом не изменится, для определения $p(0)$ необходимо использовать условия согласованности в выходном сечении канала, о чем говорилось выше.

При $\text{Pr} = \text{const}$ значения параметра P зависят только от числа Рейнольдса. Эта зависимость величины $-P$ от Re при $\text{Pr} = 1$ представлена на фиг. 1.

Профили $U(y)$, $V(y)$, $T(y)$ и величина P , полученные из решения задачи (1.6), при учете разложений (1.5), используются в качестве начальных условий при решении задачи (1.2)–(1.4). Давление в канале $p(x)$ определяется путем интегрирования по x градиента dp/dx , причем начальное значение при интегрировании $p(0) = 1$.

2. В процессе решения краевой задачи (1.2)–(1.4), которое осуществляется на основе численного метода второго порядка точности по обеим переменным [5], в каждом рассчитываемом сечении x находится средний коэффициент скорости $\langle \lambda \rangle$. Применяется следующая процедура осреднения [6]: в каждой точке разностной сетки по y в рассматриваемом сечении канала по рассчитанным профилям скорости $u(x, y)$ и температуры $T(x, y)$ определяются местное число Маха



Фиг. 1

$M = u/\sqrt{\gamma T}$, коэффициент скорости $\lambda = M\{(\gamma+1)/[2+(\gamma-1)M^2]\}^{1/2}$ и температура торможения $T_t = T/\tau(\lambda)$, где $\tau(\lambda) = 1 - \lambda^2(\gamma-1)/(\gamma+1)$.

Средняя температура торможения определяется из условия сохранения энергии потока при осреднении

$$\langle T_t \rangle = \int_0^1 Y(\lambda) T_t^{1/2} dy \left(\int_0^1 Y(\lambda) T_t^{-1/2} dy \right)^{-1}, \quad Y(\lambda) = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{1/(\gamma-1)} \frac{\lambda}{\tau(\lambda)}$$

Затем определяется среднее значение скорости звука

$$\langle a_{cr}^* \rangle = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} R^* T_0^* \langle T_t \rangle \right)^{1/2}$$

Условие сохранения импульса при осреднении служит для определения среднего коэффициента скорости

$$\frac{\gamma+1}{2\gamma} Q^* \langle a_{cr}^* \rangle z(\langle \lambda \rangle) = h^* p^* \int_0^1 j(\lambda) dy, \quad z(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda}, \quad j(\lambda) = \frac{1+\lambda^2}{\tau(\lambda)} \quad (2.1)$$

$$Q = \int_0^h \rho^* u^* dy^*$$

где Q^* – расход в рассматриваемом сечении канала.

Выражая расход через рассчитанные профили $u(x, y)$ и $T(x, y)$ и подставляя полученное выражение в (2.1), окончательно получим уравнение

$$\langle \lambda \rangle + \frac{1}{\langle \lambda \rangle} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{\langle T_t \rangle} \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{u}{T} dy \right)^{-1} \int_0^1 j(\lambda) dy \quad (2.2)$$

При этом берется корень $\langle \lambda \rangle \leq 1$.

Решение задачи (1.2)–(1.5) осуществляется до сечения x_m , в котором $\langle \lambda \rangle = 1$.

Распределение давления вдоль канала, соответствующее определенному значению его полудлины l^* , находится следующим образом. Выходному сечению канала соответствует значение координаты $x_l = l^*/L^*$, которое с учетом (1.1) определяется выражением

$$x_l = \frac{J^* l^*}{p_0^* h^*} (R^* T_0^*)^{1/2} \quad (2.3)$$

в которое входит неизвестная пока величина p_0^* .

Далее предполагается, что, если значение $\langle \lambda \rangle$, определяемое из (2.2), в выходном сечении канала меньше единицы, то давление в этом сечении равно

внешнему: $p^*(l^*) = p_e^* = p_0^* p_l$, где $p_l = p(x_l)$ – рассчитанное значение. Подставляя отсюда значение p_0^* в (2.3), получаем уравнение для определения координаты выходного сечения канала

$$x_l = \sqrt{\gamma} M_0 p(x_l), \quad M_0 = \frac{p_0^*}{p_e^*}, \quad p_0^* = \frac{J^* l^*}{h^*} \left(\frac{R^* T_0^*}{\gamma} \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

Здесь введено эффективное число Маха M_0 , которое зависит от внешнего давления p_e^* , не входящего в параметры задачи (1.2)–(1.6). Физический смысл величины M_0 будет прояснен ниже.

Уменьшение величины p_e^* при постоянных J^* , h^* , l^* , T_0^* приводит, как следует из (2.4), к увеличению x_l , причем это происходит до тех пор, пока $x_l < x_m$. При достижении числом Маха значения $M_{0m} = x_m / [\sqrt{\gamma} p(x_m)]$ в выходном сечении канала достигается значение $\langle \lambda \rangle = 1$. Предполагается, что при $M_0 \geq M_{0m}$ (M_{0m} функция числа Re) устанавливается "критический" режим "запирания" канала, при котором изменение внешнего давления не оказывает влияния на течение в канале. В этом случае значение x_m соответствует координате выходного сечения канала, а давление в его центре определяется из (2.3)

$$p_0^* = \frac{J^* l^*}{x_m h^*} (R^* T_0^*)^{1/2} = p_e^* \frac{\sqrt{\gamma}}{x_m} M_0 \quad (2.5)$$

Поскольку из условий задачи известной величиной является внешнее давление, то давление в канале должно быть выражено через p_e^* . При $M_0 \leq M_{0m}$ из (2.4) находится x_l , и на основании полученного из решения (1.2)–(1.6) распределения $p(x)$ строится распределение отнесенного к p_e^* давления в канале $p'(x') = p(x)/p_l$, где $x' = x/x_l$. При $M_0 \geq M_{0m}$, как следует из (2.5), $p'(x') = p(x) \sqrt{\gamma} M_0 / x_m$, где $x' = x/x_m$. Получим теперь оценку значения среднего числа Маха в выходном сечении канала

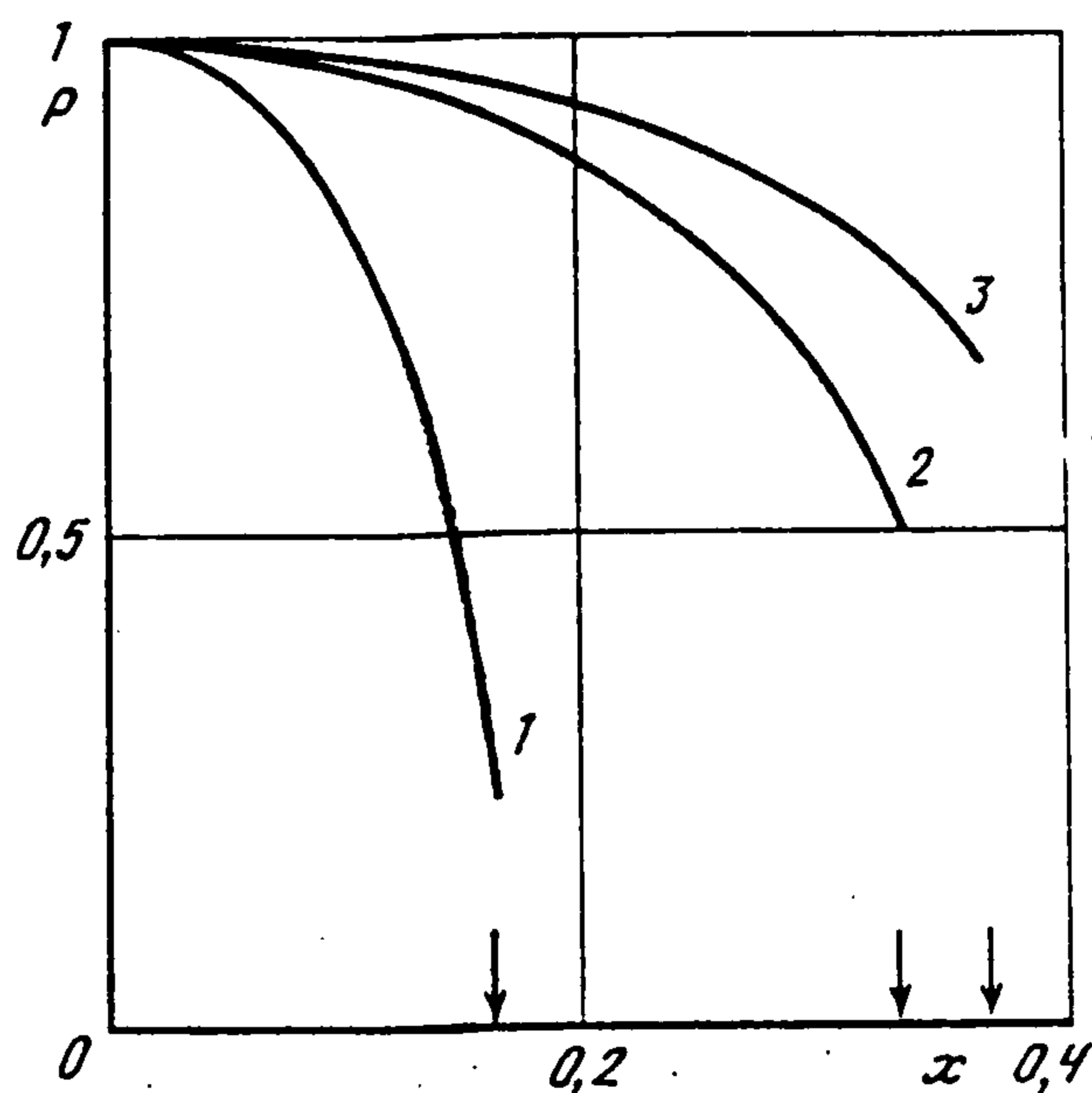
$$\langle M \rangle = \langle u^* \rangle (\gamma R^* \langle T^* \rangle)^{-1/2} \left(\langle u^* \rangle = \frac{1}{h^*} \int_0^h u^*(l^*, y^*) dy^* \right)$$

Так как температура поперек канала меняется незначительно, то имеет место оценка

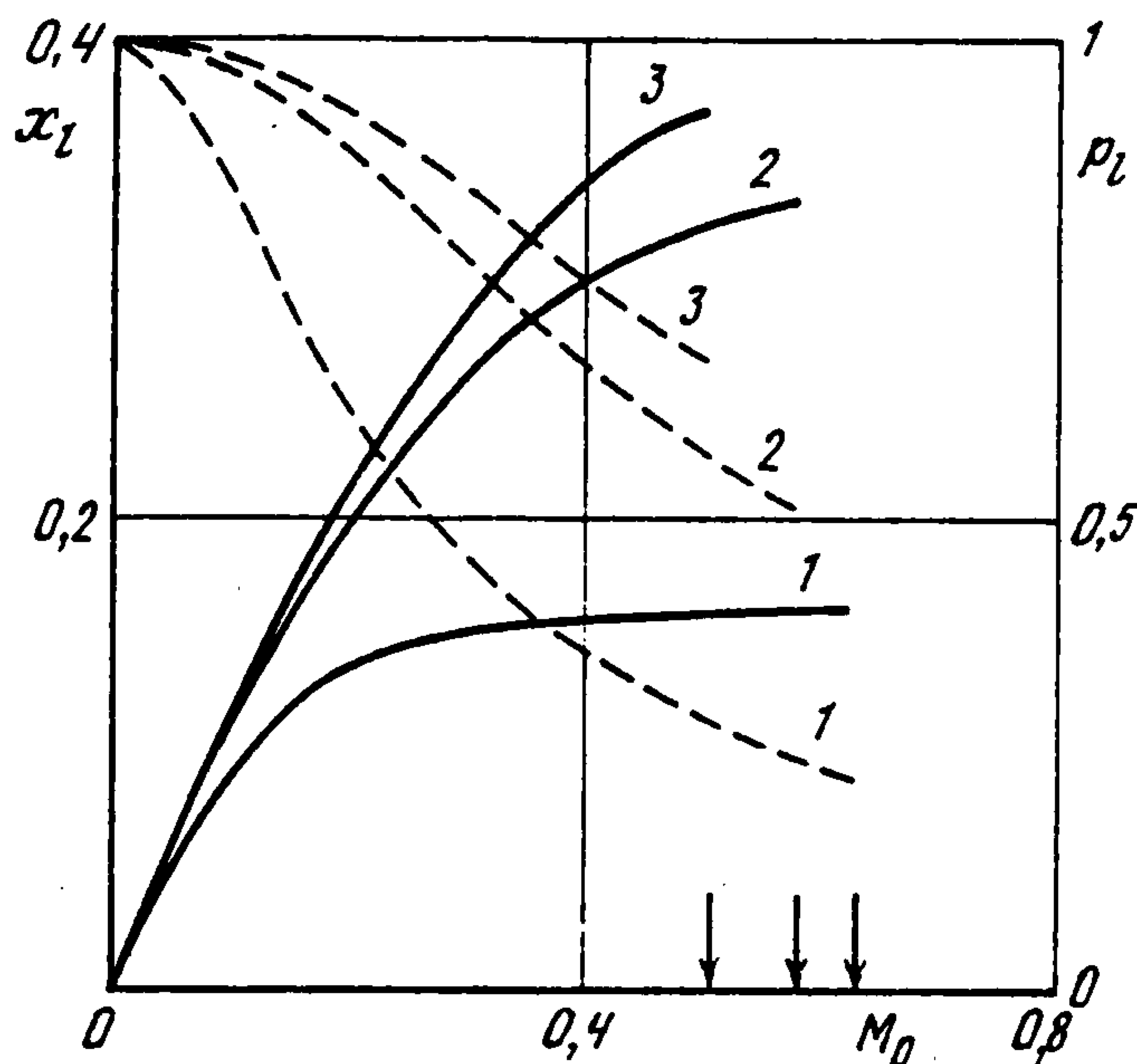
$$Q^* = \frac{p_l^*}{R^*} \int_0^h \frac{u^*}{T^*} dy^* \cong \frac{p_l^* h^*}{R^* T_0^*} \langle u^* \rangle$$

С другой стороны, $Q^* = J^* l^*$, откуда при учете соотношения $\langle T^* \rangle \cong T_0^*$ получим $\langle M \rangle \cong M_0 p_e^* / p_l^*$. Таким образом, при $M_0 \leq M_{0m}$ характерное число Маха M_0 примерно равно среднему значению числа Маха в выходном сечении.

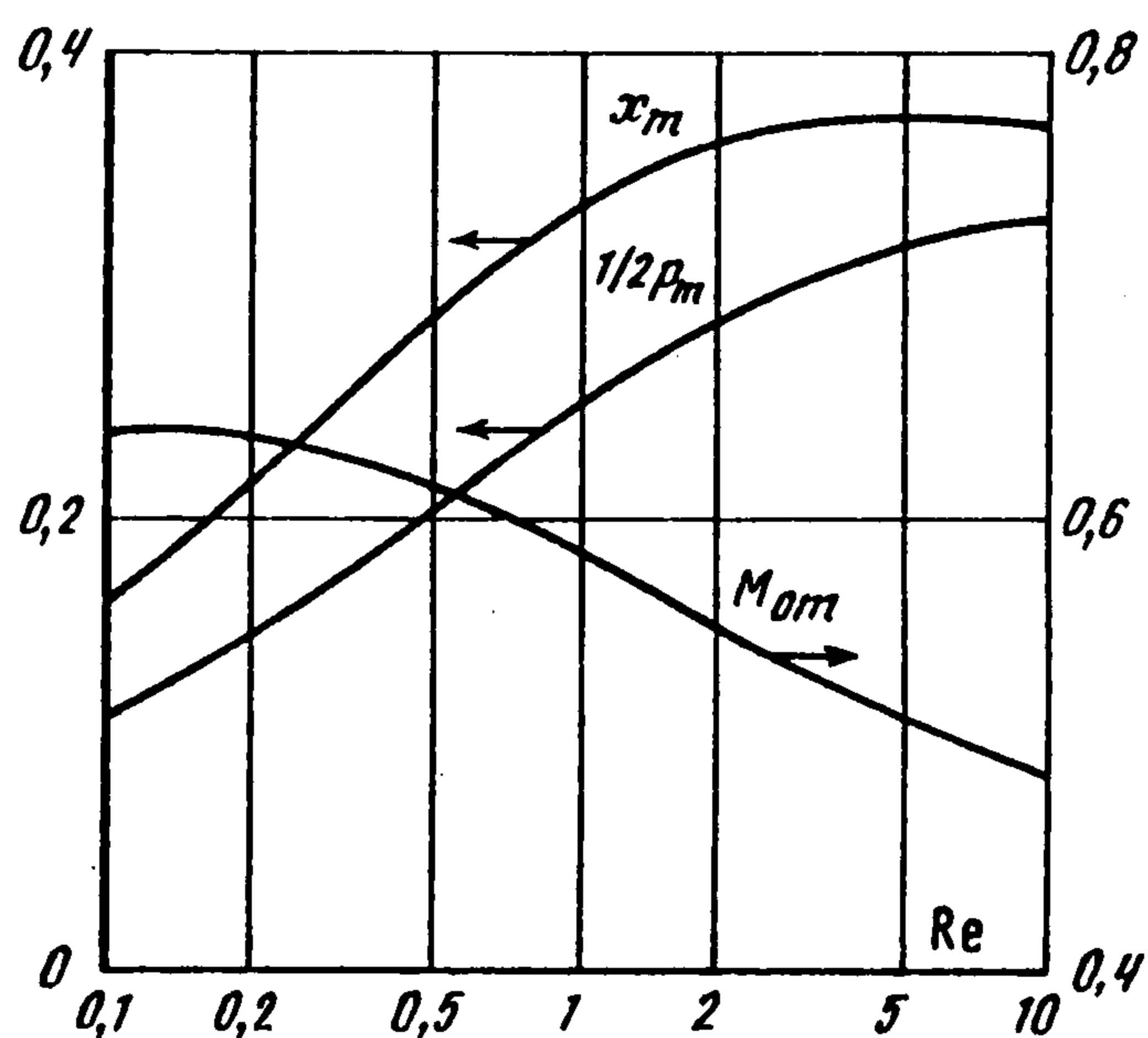
3. Итак, основным преимуществом рассматриваемого метода является возможность определения характеристик течения в канале (например, распределения давления) для разных значений характерного числа M_0 (или внешнего давления) по результатам одного расчета, выполненного при заданном числе Re.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 2 представлены результаты расчета распределения давления в канале $p(x)$ при постоянных значениях $T_0^* = 300^\circ\text{K}$ и $\text{Pr} = 1$ для трех значений числа Рейнольдса: $\text{Re} = 0,1; 1; 10$ (соответственно кривые 1, 2, 3). Стрелками на оси x отмечены значения предельной координаты x_m .

На фиг. 3 изображены зависимости от числа M_0 координаты выходного сечения канала x_l , определяемой из уравнения (2.4), (сплошные кривые) и давления в этом сечении p_l (штриховые кривые). При нахождении величины x_l используются распределения фиг. 2. Нумерация кривых на фиг. 3 та же, что и на фиг. 2.

Видно, что с увеличением числа Рейнольдса возрастает значение x_l . Давление в центре канала $p_0^* = p_c^*/p_l$ при этом также возрастает, и, следовательно, растет перепад давления в канале.

На фиг. 4 представлены зависимости от числа Рейнольдса координаты выходного сечения канала в режиме "запирания" x_m , давления $p_m = p(x_m)$ и предельного значения числа Маха M_{0m} , при котором устанавливается этот режим.

На основе представленных результатов можно делать выводы о качественных зависимостях характеристик течения в канале от размерных параметров задачи l^* , h^* , J^* , p_e^* , T_0^* .

ЛИТЕРАТУРА

1. Новиков П.А., Маленко Г.Л., Любин Л.Я. Исследование распределения давления между параллельными пластинами при молекулярно-вязкостном режиме течения пара в процессе сублимации льда // ИФМ. 1974. Т. 26. № 1. С. 58–63.
2. Носик В.И. Сопряженная задача испарения в длинном канале при малых числах Рейнольдса // ИФЖ. 1987. Т. 52. № 3. С. 374–381.
3. Van Ooijen H., Hoogendoorn C.J. Vapor flow calculations in a flat-plate heat pipe // AIAA Journal. 1979. V. 17. No. 11. P. 1251–1259.
4. Williams J.C. Viscous compressible and incompressible flow in slender channels // AIAA Journal. 1963. V. 1. No. 1. P. 186–195.
5. Денисенко О.В., Провоторов В.П. Исследование течений вязкого газа при умеренных числах Рейнольдса // Труды ЦАГИ. 1985. Вып. 2269. С. 111–127.
6. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969. 824 с.

Жуковский

Поступила в редакцию
3.XII.1991