ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. ТОМ 57, ВЫП. 3 1993

УДК 532.5

 А.М. Тер-Крикоров

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА ПЛОСКИМ СТРАТИФИЦИРОВАННЫМ ПОТОКОМ

В линеаризованной постановке рассматривается задача обтекания тела плоским произвольно стратифицированным потоком конечной толщины. Теорема Тихонова и Самарского [1] о единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в плоском случае распространяется на несимметричные условия излучения и с ее помощью исследуется характер неединственности решения линеаризированной задачи обтекания тела. Существование решения изучается методами теории потенциала. При коэффициенте излучения стремящемся к нулю обосновываются "дипольные приближения" решения задачи обтекания.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоский установившийся поток идеальной тяжелой несжимаемой жидкости с произвольной устойчивой стратификацией и со свободной границей, обтекающий тело, расположенное внутри потока или на горизонтальном дне. Начало координат выбирается на дне, ось y направлена вверх, ось x вдоль потока. При $x \to -\infty$ поток асимптотически невозмущен, его скорость равна U, глубина – H, характерный размер препятствия по вертикали – h, ускорение силы тяжести – g. Величины U и H берутся в качестве единиц скорости и длины и уравнения записываются в безразмерных переменных. Кусочно-гладкая функция $\rho(y)$ задает распределение плотности в невозмущенном потоке, причем $d\rho \leqslant 0$, $\rho \geqslant \rho_0 > 0$.

Предполагается, что полная энергия частицы в невозмущенном потоке достаточна для того, чтобы частица могла в поле силы тяжести подняться с равновесного уровня на высоту $h/2$. В этом случае препятствие не может "запереть поток" и картина линий тока имеет качественно тот же характер, что и для случая обтекания тела однородным потоком. На границе тела имеются только две критические точки и только одна линия тока разветвляется в этих критических точках. На любой линии тока координата x монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Если положить

$$-\rho'(y)/\rho(y) = \varepsilon a^2(y), \quad \nu = gH/U^2, \quad \varepsilon\nu = k^2$$

и через $\zeta(x, y)$ обозначить отклонение по вертикали жидкой частицы от равновесного состояния, то точное уравнение движения имеет вид

$$\Delta\varsigma + a^2(y-\varsigma)(k^2\varsigma + \varepsilon\partial\varsigma/\partial y - \tfrac{1}{2}\varepsilon(\nabla\varsigma)^2) = 0 \tag{1.1}$$

Пусть $y = Y(x)$ – уравнение неизвестной свободной границы, $x = x_0(s)$,

$y = y_0(s)$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$ – уравнение границы γ тела Ω. Тогда система граничных условий имеет вид

$$\varsigma(x,0)=0, \quad \varsigma(x,Y(x))=Y(x)-1, \quad \lim_{x\to-\infty}\varsigma(x,y)=0 \tag{1.2}$$

$$\partial\varsigma/\partial y - \nu\varsigma - \tfrac{1}{2}(\nabla\varsigma)^2 = 0 \quad \text{при} \quad y = Y(x)$$

$$\varsigma(x_0(s),\ y_0(s)) = y_0(s) - \psi_0 \tag{1.3}$$

Неизвестная функция $Y(x)$ и неизвестная постоянная ψ_0 должны быть определены в процессе решения.

2. Линеаризация. Предполагаем, что параметр ε достаточно мал и что отклонение ординаты жидкой частицы от ее невозмущенного значения также мало, т.е. размеры тела малы по сравнению с глубиной потока. Линеаризуя уравнение (1.1), получаем уравнение Гельмгольца с показателем преломления $k^2a^2(y)$

$$\frac{\partial^2\varsigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varsigma}{\partial y^2} + k^2a^2(y)\varsigma = 0 \tag{2.1}$$

На величину параметра k ограничения не накладываются. После линеаризации граничных условий (1.2) получаем

$$\varsigma(x,0)=0, \quad \frac{\partial\varsigma}{\partial y}(x,1) - \nu\varsigma(x,1) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty}\varsigma(x,y)=0 \tag{2.2}$$

Граничное условие (1.3) не изменяется.

3. Интегральное представление решения. Как известно, функция Грина $G(x, y, \eta)$ удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца с правой частью $\delta(x)\ \delta(y-\eta)$ и граничным условиям (2.2).

При помощи метода разделения переменных нетрудно вывести, что [2]

$$G(x,y,\eta) = \theta(x)\sum_{n=1}^{N}\kappa_n^{-1}\varphi_n(y)\varphi_n(\eta)\sin(\kappa_n x) + \sum_{n=1+N}^{\infty}(2\kappa_n)^{-1}\varphi_n(y)\varphi_n(\eta)e^{-|\kappa_n x|} \tag{3.1}$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда, равная нулю при $x < 0$ и единице при $x \geqslant 0$, $\{\varphi_n(y)\}$ – ортонормированная система собственных функций соответствующей задачи Штурма–Лиувилля, $\kappa_1^2,\ldots,\kappa_N^2$ положительные собственные значения, $-\kappa_i^2$, $i > N$ – отрицательные собственные значения.

Если воспользоваться известной асимптотикой собственных значений и собственных функций при $n \to \infty$, то можно показать, что

$$G(x,y,\eta) \sim (2\pi)^{-1}\ln\sqrt{x^2+(y-\eta)^2} \quad \text{при} \quad x\to 0,\ y\to\eta \tag{3.2}$$

Если применить формулу Грина, воспользоваться соотношением (3.2) и тем, что $\zeta(x, y) \to 0$ при $x \to -\infty$, а $G(x-\xi, y, \eta) \to 0$ при $\xi \to +\infty$, то для решения, обладающего правильной нормальной производной [3] на контуре γ, получим интегральное представление

$$\varsigma(x,y) = -\int_{\gamma} G(x-\xi,y,\eta)\frac{\partial\varsigma}{\partial\eta}(\xi,\eta)ds \tag{3.3}$$

4. Теорема единственности решения внешней задачи Дирихле. Пусть T_Ω – полоса $0 \leqslant y \leqslant 1$, из которой удалена внутренность области Ω. Внешнюю задачу Дирихле поставим следующим образом: найти функцию $\zeta(x, y)$, дважды непрерывно дифференцируемую во внутренности T_Ω, непрерывную на $\overline{T}_\Omega$, удовлетворяющую внутри области T_Ω уравнению (2.1) и граничным условиям (2.2), а также условию $\varsigma|_\gamma = f(s)$, где $f(s)$ – известная непрерывная функция.

Теорема единственности. Пусть Ω – выпуклая область, $a(y)$ – кусочно-аналитическая функция, $k > 0$. Решение внешней задачи Дирихле с правильной нормальной производной на γ – единственно.

Достаточно показать, что при $f(s) \equiv 0$ решение $\zeta(x, y) \equiv 0$. Пусть область Ω лежит в прямоугольнике $|x| < a$, $0 < y < 1$. Подставляя разложение (3.1) в формулу (3.3), получаем, что при $x > a$ справедлива формула

$$\varsigma(x,y) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \sin\kappa_n(x-\delta_n)\varphi_n(y) + \tfrac{1}{2}\sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n e^{-\kappa_n x}\varphi_n(y) \tag{4.1}$$

Выражения для чисел α_n и δ_n через криволинейные интегралы по контуру γ несущественны для дальнейшего рассуждения.

Рассмотрим систему функций

$$\psi_k(x,y) = \begin{cases} \cos\kappa_x(x-\delta_k)\varphi_k(y), & k = 1,\dots,N \\ e^{\kappa_k x}\varphi_k(y), & k > N \end{cases} \tag{4.2}$$

удовлетворяющих уравнению (2.1) и граничным (2.2) при $y = 0$ и $y = 1$. Применяя к функциям $\zeta(x, y)$ и $\psi_k(x, y)$ формулу Грина в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, получаем

$$\int_C \left(\psi_k \frac{\partial\varsigma}{\partial n} - \varsigma\frac{\partial\psi_k}{\partial n}\right) ds = 0, \quad k \geqslant 1 \tag{4.3}$$

В силу граничных условий интегралы по горизонтальным сторонам прямоугольника обращаются в нуль. Подставляя в (4.3) формулы (4.1) и (4.2) и воспользовавшись ортонормированностью системы $\varphi_k(y)$, получаем, что интегралы по вертикальным сторонам прямоугольника не зависят от a и b и равны $\kappa_k\alpha_k$. Следовательно, $\zeta \equiv 0$ при $x > a$. Аналогично доказывается, что $\zeta \equiv 0$ при $x < -a$.

Пусть $\{0, y_1, \dots, y_{n-1}, 1\}$ – такое разбиение отрезка (0, 1), что на каждом из интервалов (y_{i-1}, y_i) функция $a(y)$ аналитична, T_i – полоса $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < 1$, $T_{i\Omega} = T_i \setminus \Omega$. В силу выпуклости области Ω область $T_{i\Omega}$ распадается на две компоненты связности, причем при $(x; y) \in T_{i\Omega}$ и $|x| > a$ функция $\zeta(x, y) \equiv 0$. Так как функция $\zeta(x, y)$ аналитична в области $T_{i\Omega}$, то в силу теоремы единственности для аналитических функций $\zeta(x, y) \equiv 0$ в $T_{i\Omega}$ ($i = 1,\dots,n$). Таким образом, $\zeta(x, y) \equiv 0$ в области T_Ω.

Если сделать более сильное предположение об аналитичности $a(y)$ в (0, 1), то можно отказаться от условия выпуклости области Ω.

В дальнейшем задача обтекания будет исследоваться методами теории потенциала. При этом существенную роль будет играть внутренняя однородная задача Неймана: найти непрерывную в $\overline{\Omega}$ и дважды непрерывно дифференцируемую внутри Ω функцию $\zeta(x, y)$, имеющую правильную нормальную производную на γ, равную нулю.

Те значения параметра k, для которых однородная внутренняя задача Неймана имеет нетривиальные решения будем называть критическими. Известно, что критические значения, являясь собственными значениями спектральной задачи для уравнения Лапласа, образуют счетное множество, неотрицательны и имеют конечную кратность.

5. Решение задачи обтекания методами теории потенциала. Из (3.2) следует, что функции

$$V^{(0)} = -2\int_0^{s_0} \mu(s) G(x(s)-x, y(s), y, k) ds$$

$$V^{(1)} = -2\int_0^{s_0} \nu(s) \frac{\partial}{\partial n_{\xi\eta}} (x - x(s), y, y(s), k) ds$$

обладают всеми свойствами потенциалов простого и двойного слоев [3].

Если искать решение внешней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя, а решение внутренней однородной задачи Неймана в виде потенциала простого слоя, то получим для определения плотностей слоев союзные интегральные уравнения Фредгольма

$$\mu(\sigma) = 2\int_0^{s_0} \mu(s) K(s, \sigma, k) ds \tag{5.1}$$

$$\nu(\sigma) = 2\int_0^{s_0} \nu(s) K(\sigma, s, k) ds + f(\sigma) \tag{5.2}$$

$$K(\sigma, s, k) = \frac{\partial}{\partial n_{\xi\eta}} G(x(\sigma) - x(s),\ \ y(\sigma), y(s), k)$$

Те значения параметра k, для которых уравнение (5.1) имеет нетривиальные решения, будут критическими.

Пусть k – критическое значение, а $\mu_1(s),\ldots,\mu_m(s)$ – соответствующие собственные функции уравнения (5.1). Известно [3], что уравнение (5.2) имеет решение в том и только в том случае, когда функция $f(s)$ ортогональна $\mu_1(s),\ldots,\mu_m(s)$.

Заметим, что $k = 0$ – простое критическое значение. Соответствующее решение внутренней задачи Неймана тождественно равно единице в области Ω. Если это решение представить в виде потенциала простого слоя, то плотность этого потенциала будем обозначать через $\mu_0(s)$. При $k = 0$ уравнение (5.1) и соответствующая внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа имеют решение в том и только в том случае, когда функция $f(s)$ ортогональна $\mu_0(s)$.

Если k не является критическим значением, то, как следует из теории потенциала, уравнение (5.2) и внешняя задача Дирихле разрешимы для произвольной непрерывной функции $f(s)$. Интересно, что при $k > 0$ внешняя задача Дирихле разрешима, даже если k есть критическое значение. Для симметричных условий излучения это утверждение доказано в [4]. Приведем доказательство для плоского случая и несимметричных условий излучения.

Пусть $k > 0$ – критическое значение кратности m, а $\mu_1(s),\ldots,\mu_m(s)$ – соответствующие собственные функции уравнения (5.1). Будем искать решение внешней задачи Дирихле в следующем виде:

$$\varsigma(x,y) = V^{(1)}(x,y) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i G(x - a_i, y, b_i, k),\ \ (a_i, b_i) \in \Omega \tag{5.3}$$

Для определения плотности $\nu(\sigma)$ получаем интегральное уравнение

$$\nu(\sigma) = 2\int_0^{s_0} \nu(s)K(\sigma,s,k)ds + f(\sigma) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i G(x(\sigma)-a_i,\ y(\sigma), b_i, k)$$

Для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы свободный член был ортогонален $\mu_1(\sigma),\ldots,\mu_m(\sigma)$. Для определения постоянных α_i получаем систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i V_j(a_i,b_i) = c_j, \quad c_j = -\int_0^{s_0} f(\sigma)\mu_j(\sigma)d\sigma \tag{5.4}$$

$$V_j(x,y) = \int_0^{s_0} G(x(\sigma)-x, y, y(\sigma), k)\mu_j(\sigma)d\sigma$$

Система (5.4) разрешима в том и только в том случае, когда ее детерминант отличен от нуля

$$\det\left|V_j(a_i,b_i)\right| \neq 0 \tag{5.5}$$

Покажем, что можно так выбрать точки (a_i,b_i), что условия (5.5) будет выполнено. Если это не так, то при любых точках $(x_i,y_i)\in\Omega$, $i = 1,\ldots,m$ будет выполнено условие

$$F(x_1,y_1,\ldots,x_m,y_m) = \det\left|V_j(x_i,y_i)\right| = 0 \tag{5.6}$$

Поскольку потенциал простого слоя $V_j(x,y)$ непрерывен в замкнутой области T, то соотношение (5.6) выполнено для любых точек $(x_i,y_i)\in\overline{\Omega}$. Заметим теперь, что по каждой паре переменных функция F является решением уравнения Гельмгольца, во внешней области $T\setminus\Omega$, обращающееся в ноль на границе области. В силу единственности решения внешней задачи Дирихле соотношение $F\equiv 0$ выполнено во всей полосе T. Поэтому скачок нормальной производной функции F при переходе через границу области равен нулю для любой группы (ξ_i,η_i). Воспользовавшись правилом вычисления производной определителя и тем, что скачок нормальной производной потенциала простого слоя при переходе через границу области равен плотности потенциала из (5.6) получаем, что

$$\det\left|\mu_j(\sigma_i)\right| = 0 \tag{5.7}$$

для любого набора точек $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$ на отрезке $[0, s_0]$. Как нетрудно показать, из линейной независимости функций $\mu_1(\sigma),\ldots,\mu_m(\sigma)$ следует, что найдутся на отрезке $[0, s_0]$ такие точки $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$, что $\det\left|\mu_j(\sigma_i)\right|\neq 0$, что противоречит равенству (5.7).

Полученное противоречие доказывает, что возможен такой выбор точек $(a_i,b_i)\in\Omega$, при котором условие (5.5) удовлетворено и, следовательно, система (5.4) и соответственно внешняя задача Дирихле для уравнения Гельмгольца имеют решение.

Заметим, что при $m = 1$ доказательство упрощается.

6. Исследование задачи обтекания тела. При решении задачи обтекания в качестве функции $f(s)$ нужно принять $y_0(s)-\psi_0$, как это следует из граничного условия (1.3), где ψ_0 – произвольный параметр на отрезке [0, 1]. Из доказанной единственности и существования решения задачи Дирихле следует, что решение задачи обтекания линейно зависит от произвольного параметра ψ_0.

В рамках модели идеальной жидкости избавиться от неоднозначности можно только за счет привлечения дополнительных гипотез. В случае однородной жидкости принимается гипотеза о равенстве нулю циркуляции скорости или гипотеза Жуковского–Чаплыгина о конечности скорости в острой кромке крыла. Если жидкость неоднородна, то при произвольном значении k вопрос о разумной дополнительной гипотезе остается открытым. Здесь будет предложен подход, применимый в случае слабо стратифицированной жидкости, т.е. при $k \to 0$.

Так как критические значения параметра k изолированы, и $k = 0$ – простое критическое значение, то будем брать k на отрезке $[0, k_0]$, на котором нет других критических значений, кроме $k = 0$. Было показано, что задача обтекания плоской области сводится к решению внешней задачи Дирихле для уравнения Гельгольца, причем в уравнения и граничные условия входят два параметра ψ_0 и k. В силу единственности решения внешней задачи Дирихле решение задачи обтекания будет зависеть от параметров ψ_0 и k.

Если искать решение задачи обтекания в виде

$$\varsigma = -2\int_0^{s_0} \nu(s)\frac{\partial G}{\partial n_{\xi\eta}}(x - x(s), y, y(s), k)ds + \alpha G(x - a, y, b) \tag{6.1}$$

то для определения плотности $\nu(\sigma)$ получим интегральное уравнение

$$\nu(\sigma, k) = 2\int_0^{s_0} K(\sigma, s, k)\nu(s, k)ds + \alpha G(x(\sigma) - a, y(\sigma), b, k) + y(\sigma) - \psi_0 \tag{6.2}$$

Функция K определяется уравнением (5.2).

При $k > 0$ решение уравнения (6.2) зависит от пяти параметров: k, α, a, b, ψ_0. После подстановки в уравнение (6.1) решения уравнения (6.2) зависимость от параметров α, a, b должна пропасть, так как ζ зависит только от параметров k и ψ_0. Поэтому параметры α, a, b можно выбирать произвольным образом.

При $k = 0$ уравнение (6.2) имеет решение в том и только в том случае, когда выполнено условие

$$\alpha\int_0^{s_0} G_0(x(\sigma) - a, y(\sigma), b)\mu_0(\sigma)d\sigma + \int_0^{s_0}(y(\sigma) - \psi_0)\mu_0(\sigma)d\sigma = 0, \quad G_0 = G|_{k=0} \tag{6.3}$$

где $\mu_0(\sigma)$ – решение союзного однородного уравнения.

Ранее было показано, что можно всегда так выбрать a и b, что коэффициент при параметре α не обращается в нуль. Это позволяет определить α из уравнения (6.3).

Поскольку при $k > 0$ выбор параметра α произволен, то возьмем его таким же, как и при $k = 0$. При этом решение уравнения (6.2) будет непрерывно зависеть от параметра k на всем отрезке $[0, k_0]$.

Если течение бесциркуляционное и $\alpha = 0$, то уравнение (6.3) позволяет определить параметр ψ_0, так как коэффициент при этом параметре не может равняться нулю. Действительно, если это не так, то единица ортогональна $\mu_0(\sigma)$ и внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа с функцией $f(s) \equiv 1$ имеет решение в виде потенциала двойного слоя

$$\varsigma = -2\int_0^{s_0} \nu(s)\frac{\partial G_0}{\partial n_{\xi\eta}}(x - x(s), y, y(s))ds \tag{6.4}$$

Из представления (6.4) и из свойств функции G_0 следует, что $\int\limits_{\gamma}(\partial\varsigma/\partial n)ds = 0$ для любого замкнутого контура γ, охватывающего область Ω

Из (3.1) следует, что

$$G_0(x,y,\eta) = \theta(x)\kappa^{-1}\varphi(y)\varphi(\eta)\sin\kappa x + G_1(x,y,\eta) \tag{6.5}$$

где функция G_1 четна по x и экспоненциально убывает при $x \to \infty$. Подставляя (6.5) в (6.4), получаем, что при $|x| > a$ и a достаточно большом справедливо представление

$$\varsigma(x,y) = C\theta(x)\varphi(y)\sin\kappa(x-x_0) + \varsigma_1(x,y)$$

где C и x_0 – некоторые числа, а функция $\zeta_1(x, y) \to 0$ при $x \to \infty$. Положим $x_n = x_0 + \pi n/\kappa$ и $T_n = \{(x,y):(x,y) \in T\setminus\Omega, |x| \leqslant x_n\}$.

Применяя к области T_n формулу Грина и воспользовавшись граничными условиями и выбором κ_n, получаем

$$-\int\limits_{T_n}\int(\nabla\varsigma)^2 dxdy - \nu\int\limits_{-\infty}^{x_n}\varsigma^2(x,1)dx + \int\limits_{\gamma}\varsigma\frac{\partial\varsigma}{\partial n}ds \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{6.6}$$

Так как $\varsigma|_\gamma = 1$, то последний интеграл в формуле (6.6) равен нулю, и следовательно $\nabla\varsigma = 0$ в области T_n. Поскольку n произвольно, то $\nabla\varsigma = 0$ в области $T\setminus\Omega$ и $\zeta = \text{const}$ в $T\setminus\Omega$. Но это невозможно, так как $\varsigma|_\gamma = 1$ и $\zeta \to 0$ при $x \to -\infty$. Итак, при $\alpha = 0$ формула (6.4) определяет значение ψ_0.

7. Дипольные приближения. Запишем формулу (6.1) в виде

$$\varsigma = -2\int\limits_{\gamma}\nu(s,k)\left(\frac{\partial G}{\partial\xi}(x-\xi,y,\eta,k)d\eta - \frac{\partial G}{\partial\eta}(x-\xi,y,\eta,k)d\xi\right) + \tag{7.1}$$
$$+\alpha G(x-x_0,y,y_0,k)$$

Если размеры обтекаемого тела малы по сравнению с глубиной жидкости, и точка $(x_0,y_0)\in\Omega$, то с точностью до величин высших порядков относительно размеров тела из (7.1) получаем

$$\varsigma(x,y) = -2A(k)\frac{\partial G}{\partial\xi}(x-x_0,y,y_0,k) +$$
$$+2B(k)\frac{\partial G}{\partial\eta}(x-x_0,y,y_0,k) + \alpha G(x-x_0,y,y_0,k) \tag{7.2}$$
$$A(k) = \int\limits_{\gamma}\nu(s,k)d\eta, \quad B(k) = \int\limits_{\gamma}\nu(s,k)d\xi, \quad x >> x_0$$

причем постоянная α определяется формулой (6.3).

Формулы (7.2) естественно назвать "дипольным приближением" решения задачи обтекания.

Коэффициенты $A(k)$ и $B(k)$ аналитически зависят от параметра k и при малых k могут быть заменены на $A(0)$ и $B(0)$, причем ошибка при такой замене имеет порядок k^2.

Покажем как найти коэффициенты $A(0)$ и $B(0)$. Положим в формуле (7.1) $k = 0$ и воспользуемся тем, что при $k = 0$ функция $\zeta = \mathrm{Im}(z - w(z))$, где $w(z)$ – комплексный потенциал, а $G = \mathrm{Im}\, H$, где $H(z,\varsigma,\bar{\varsigma})$ – известная аналитическая функция, имеющая логарифмическую особенность при $z = \zeta$

$$H(z,z_0,\bar{z}_0) = i(2\pi)^{-1}\ln(z - z_0) + H_1(z,z_0,\bar{z}_0) \tag{7.3}$$

Из (7.3) следует, что

$$z - w(z) = -2A_0H_\xi + 2B_0H_\eta + \alpha H = \tag{7.4}$$

$$= -iA_0\pi^{-1}(z - z_0)^{-1} - B_0\pi^{-1}(z - z_0)^{-1} + H_2(z,z_0,\bar{z}_0)$$

где функция $H_2(z,z_0,\bar{z}_0)$ регулярна в точке $z = z_0$.

Из формулы (7.4) следует, что $\alpha = \Gamma(2\pi)^{-1}$, где Γ – циркуляция скорости по контуру γ. Дифференцируя соотношение (7.4), умножая результат на $z - z_0$, интегрируя по контуру γ и учитывая, что $d\psi|_\gamma = 0$, получаем

$$-\int_\gamma (z - z_0)d\varphi = 2A_0 - 2iB_0$$

$$2A_0 = -\int_\gamma (x - x_0)d\varphi,\quad 2B_0 = \int_\gamma (y - y_0)d\varphi$$

При произвольном движении тела со скоростью (U, V) комплексный потенциал представляется в виде $w = Uw_1 + Vw_2 + \Gamma w_4$ [5], причем $\psi_1|_\gamma = -y$, $\psi_2|_\gamma = -x$. В рассматриваемом случае $w = -w_1 + \Gamma w_4 - z$, и поэтому

$$2B_0 = \int_\gamma (y - y_0)(-dx - d\varphi_1 + \Gamma d\varphi_4) = -\int_\gamma y\,dx - \int_\gamma \psi_1 d\varphi_1 +$$

$$+\int_\gamma (y - y_0)d\varphi_4 = -S - \lambda_{11} + \Gamma\eta_0$$

$$-2A_0 = \int_\gamma (x - x_0)(-dx - d\varphi_1 + \Gamma d\varphi_4) =$$

$$= \int_\gamma \psi_2 d\varphi_1 + \Gamma\int_\gamma (x - x_0)d\varphi_4 = -\lambda_{12} + \Gamma\xi_0$$

где S – площадь области Ω, λ_{11} и λ_{12} – соответствующие присоединенные массы, а (ξ_0, η_0) – конформный центр тяжести области Ω [5].

Подставляя выражения для коэффициентов в формулу (7.2), получаем, что на расстояниях, значительно превышающих диаметр тела, справедлива приближенная формула

$$\varsigma(x,y) = (-\lambda_{12} + \Gamma\xi_0)G_\xi(x - x_0, y, y_0, k) +$$

$$+(-S - \lambda_{11} + \Gamma\eta_0)G_\eta(x - x_0, y, y_0, k) + \Gamma(2\pi)^{-1}G(x - x_0, y, y_0, k) \tag{7.5}$$

Если $\Gamma = 0$ и $\lambda_{12} = 0$, то из (7.5) получается более простая формула, полученная [6] для случая распределенных источников.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М; Л.: Гостехиздат, 1951. 659 с.
2. *Бежанов К.А., Тер-Крикоров А.М.* Исследование спектральной задачи теории стратифицированных течений идеальной несжимаемой тяжелой жидкости // Дифференц. уравнения. 1987. т. 23. № 11. С. 1843–1857.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. 436 с.
4. *Векуа И.Н.* О метагармонических функциях. // Труды Тбилисского мат. ин-та. 1943. Т. XII. С. 105–194.
5. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидродинамика. М.: Гостехиздат. 1955. Т. 1. 560 с.
6. *Miles J., Huppert H.* Lee waves in a stratified flow. Pt. 4. Perturbation approximations // J. Fluid Mech. 1969. V. 35. Pt 3. P. 497–525.

Долгопрудный

Поступила в редакцию
6.II.1992