

УДК 531.36:62-50.

© 1993 г. В.А. Калистратов, С.П. Охезип

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

При аппроксимации параболической задачи Стефана семейством задач оптимального управления, в которых роль управляющего параметра играет форма области определения функции состояния – температуры жидкой фазы, было показано [1, 2, 4] что классическое решение задачи Стефана является пределом решений соответствующих аппроксимационных задач в метриках подходящих функциональных пространств. Исследуется структура аппроксимационных задач оптимального управления, моделирующих задачу Стефана, приводятся необходимые условия разрешимости этих задач и дается обоснование сходимости предлагаемых приближенных методов их решения.

1. Постановка задачи. Рассматривается следующая модель одномерной фронтальной и однофазной задачи Стефана:

$$y'(t, x) = y''(t, x), \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < u(t) \quad (1.1)$$

$$y(0, x) = \varphi_0(x), \quad 0 \leq x \leq u_0 \quad (1.2)$$

$$y(t, 0) = 0, \quad y(t, u(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.3)$$

$$y'(t, u(t)) = -ku'(t), \quad 0 < t \leq T \quad (1.4)$$

$$u(0) = u_0 \quad (1.5)$$

Здесь $y(t, x)$ – температура жидкой фазы в точке x в момент времени t . Функция $\varphi_0(\cdot)$ описывает начальное распределение температуры в жидкой фазе; $u(t)$ – изменение формы области, занятой жидкой фазой. Условие (1.4) является математической формой записи уравнения теплового баланса на границе раздела жидкой и твердой фаз. В модели положено, что температура твердой фазы равна температуре фазового перехода и равна нулю. Точкой обозначено дифференцирование по t , штрихом – по x .

Задаче (1.1)–(1.5) ставится в соответствие [1, 2] задача оптимального управления специальной структуры

$$y_\varepsilon(t, x) - y_\varepsilon''(t, x) + \varepsilon^{-1} U_\varepsilon(t, x; u(\cdot)) y_\varepsilon(t, x) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 \leq x < X$$

$$y_\varepsilon(0, x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in [0, u_0] \\ 0, & x \in (u_0, X] \end{cases}$$

$$y_\varepsilon(t, 0) = y_\varepsilon(t, X) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u'(t) = v(t), \quad u(0) = u_0 \quad (1.6)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – числовой параметр, функция $v(t)$ играет роль управления.

$$U_\varepsilon(t, x; u(\cdot)) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq u(t) \\ \exp[-(x - u(t) - \varepsilon)^2 (x - u(t))^{-2}] & \\ u(t) < x \leq u(t) + \varepsilon & \\ 1, & u(t) + \varepsilon < x \leq X \end{cases} \quad (1.7)$$

На решениях задачи (1.6) задается функционал качества, порожденный условием (1.4)

$$J(\varepsilon, v(\cdot)) = \int_0^T [y'_\varepsilon(t, u(t)) + kv(t)]^2 dt \quad (1.8)$$

В задаче (1.1)–(1.5) по начальной функции $\varphi_0(\cdot)$ можно априорно оценить величину производной $y'(t, x)$ на фронте $x = u(t)$

$$0 \leq y'(t, u(t)) \leq V = k^{-1} \max\{|\varphi_0(x)(x - u_0)^{-1}|, x \in [0, u_0]\} \quad (1.9)$$

Число X выбрано таким образом, чтобы при $t \in (0, T)$ было $u(t) \in (0, X)$, например $X = VT + u_0$.

В качестве множества допустимых управлений $v(t)$ выбирается множество

$$V[0, T] = \{v(\cdot) | v(t) \in [0, V], \text{ п.в. } t \in [0, T]\}$$

Рассматривается следующая основная аппроксимационная задача.

Для заданного $\varepsilon > 0$ требуется найти такое управление $v_\varepsilon^*(\cdot) \in V[0, T]$, что

$$J(\varepsilon, v_\varepsilon^*(\cdot)) = \inf\{J(\varepsilon, v(\cdot)) | v(\cdot) \in V[0, T]\}$$

Сформулируем основные результаты [2], относящиеся к аппроксимационной задаче.

Теорема 1.1. Функционал $J(\varepsilon, v(\cdot))$ полунепрерывен снизу по изменению $v(\cdot)$ в слабой топологии пространства $L_2(0, T)$.

Теорема 1.2. На множестве $V[0, T]$ функционал $J(\varepsilon, v(\cdot))$ достигает точной нижней грани.

Теорема 1.3. Для любой последовательности $u_{\varepsilon_n}(\cdot) \rightarrow u_*(\cdot)$ в $C[0, T]$ при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ имеет место сходимость в $L_2(0, T)$

$$y'_{\varepsilon_n}(t, u_{\varepsilon_n}(t); u_{\varepsilon_n}(\cdot)) \rightarrow y'(t, u_*(t); u_*(\cdot)) \quad (1.10)$$

Здесь $y_\varepsilon(t, x; u(\cdot))$ – решение задачи (1.6), отвечающее выбранной функции $u(\cdot)$, а $y(t, x; u(\cdot))$ – решение уравнения теплопроводности (1.1)–(1.3) в нецилиндрической по переменной t области

$$Q(u) = \{(t, x) | 0 < x < u(t), 0 < t < T\}$$

Теорема 1.4. При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место сходимости

$$u_\varepsilon(\cdot) \rightarrow u_0(\cdot) \quad (u_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t)) \quad \text{в } C[0, T]$$

$$y_\varepsilon(\cdot, \cdot; u_\varepsilon(\cdot)) \rightarrow y_0(\cdot, \cdot) \quad \text{в } L_2(Q(u_0)) \quad (1.11)$$

Здесь $v_\varepsilon(\cdot)$ – функция, доставляющая минимум функционалу $J(\varepsilon, v(\cdot))$ на множестве $V[0, T]$, $y_\varepsilon(\cdot, \cdot; u_\varepsilon(\cdot))$ – соответствующее решение задачи (1.6), $u_0(\cdot)$, $y_0(\cdot, \cdot)$ – классическое решение задачи Стефана (1.1)–(1.5).

Из теоремы 1.4 следует, что любая последовательность $\{u_{\varepsilon_n}^*(\cdot), y_{\varepsilon_n}^*(\cdot, \cdot)\}$, решающая аппроксимационную задачу, сходится к $\{u_0(\cdot), y_0(\cdot, \cdot)\}$ и при достаточно малых $\varepsilon_n > 0$ может быть выбрана в качестве приближенного решения задачи Стефана.

Таким образом, возникает вопрос о построении множества функций $v_\varepsilon^*(\cdot)$, решающих аппроксимационную задачу при фиксированном $\varepsilon > 0$.

2. Основные результаты. Аппроксимационная система (1.6) является стандартной краевой задачей Дирихле для уравнения параболического типа, определенной в цилиндрической области $D = (0, T) \times (0, X)$. Приведем необходимые условия, которым удовлетворяют любое управление $v_\varepsilon^*(\cdot)$, решающее аппроксимационную задачу.

Сопряженной системой будем называть следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} w_\varepsilon'(t, x) + w_\varepsilon''(t, x) - \varepsilon^{-1} U_\varepsilon(t, x; u(\cdot)) w_\varepsilon(t, x) = \\ = 2(y_\varepsilon'(t, u(t); u(\cdot)) + kv(t)) \delta'(x - u(t)), \quad (t, x) \in D \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$w_\varepsilon(T, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq X \quad (2.2)$$

$$w_\varepsilon(t, 0) = w_\varepsilon(t, X) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.3)$$

$$u'(t) = v(t), \quad u(0) = u_0 \quad (2.4)$$

Здесь δ' – производная в пространстве распределений $D^*(0, X)$ от δ – распределения Дирака, а $y_\varepsilon(\cdot, \cdot; u(\cdot))$ – соответствующее функции $u(\cdot)$ классическое решение краевой задачи (1.6).

Решением сопряженной системы будем называть любое распределение $w_\varepsilon \in D^*(0, T; H^*)$, удовлетворяющее в смысле теории распределений уравнению (2.1) конечным (2.2) и граничным (2.3) условиям.

Замечания. 1°. Через H^* обозначено пространство, сопряженное к $H = H_0^1(0, X) \cap H^2(0, X)$.

2°. Используя технику разложения элементов пространства H^* в ряды по специально выбранному базису в пространстве H , можно показать, что распределение w_ε порождается элементом пространства $L_2(0, T; H^*)$ и, более того, у этого элемента имеется представитель, являющийся непрерывной на $[0, T]$ функцией со значениями в пространстве H^* . В силу этого конечное условие $w_\varepsilon(T, x) = 0$ имеет смысл в этом пространстве.

3°. Будем считать, что функция $\varphi_0(\cdot)$ в условии (1.2) такова, что ее продолжение нулем вне $[0, u_0]$ дает элемент пространства $H^3(0, X)$.

Теорема 2.1. Сопряженная система имеет единственное решение, являющееся элементом пространства $L_2(0, T; H^*)$.

Отметим основные элементы доказательства этой теоремы. В пространстве $H = H_0^1(0, X) \cap H^2(0, X)$ выделяется базис, состоящий из собственных функций задачи

$$-\omega_j''(x) = \lambda_j \omega_j(x), \quad x \in (0, X)$$

$$\omega_j(0) = \omega_j(X) = 0 \quad (2.5)$$

Уравнению (2.1) в пространстве $D^*(0, T; H^*)$ ставится в соответствие эквивалентное интегральное уравнение для функции w_ε , порождающей распределение w_ε , следующего вида:

$$z_\varepsilon(s, x) = - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^s \exp(-\lambda_j(s-\tau)) f(\tau) \omega'_j(q(\tau)) d\tau \right) \omega_j(x) - \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{-1} \left(\int_0^s \exp(-\lambda_j(s-\tau)) \langle U_\varepsilon(T-\tau, \cdot; q(\cdot)) z_\varepsilon(\tau, \cdot), \omega_j(\cdot) \rangle_{L_2(0, X)} d\tau \right) \omega_j(x) \quad (2.6)$$

$$z_\varepsilon(s, x) = w_\varepsilon(T-s, x), \quad q(\tau) = u(T-\tau)$$

$$f(\tau) = 2(y'_\varepsilon(T-\tau, q(\tau); q(\cdot)) + kv(T-\tau))$$

Интегральное уравнение (2.6) можно записать в операторном виде

$$z_\varepsilon(\cdot, \cdot) = P(f(\tau)\delta'(x-q(\tau)))(\cdot, \cdot) + Tz_\varepsilon(\cdot, \cdot) \quad (2.7)$$

При $s \in [0, S_0]$, где S_0 – достаточно малое положительное число, оператор (2.7) является сжимающим в пространстве $L_2(0, S_0; H^*)$. Разбивая отрезок $[0, T]$ на конечное число интервалов длины не более S_0 , можно показать, что уравнение (2.1) имеет единственное решение в пространстве $L_2(0, T; H^*)$.

Применяя стандартные конструкции, связанные с методом Лагранжа освобождения от связей (ограничений), следуя, например, работе [4–6], получаем для градиента функционала $J(\varepsilon, v(\cdot))$ следующее представление в пространстве $L_2(0, T)$:

$$\begin{aligned} \nabla J(\varepsilon, v(\cdot))(\tau) &= 2k(y'_\varepsilon(\tau, u(\tau); u(\cdot)) + kv(\tau)) + \\ &+ 2 \int_0^T (y'_\varepsilon(t, u(t); u(\cdot)) + kv(t)) y''_\varepsilon(t, u(t); u(\cdot)) K(t, \tau) dt - \\ &- \varepsilon^{-1} \iint_D y_\varepsilon(t, x; u(\cdot)) w_\varepsilon(t, x; u(\cdot)) U'_\varepsilon(t, x; u(\cdot)) K(t, \tau) dx dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$K(t, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau > t \\ 1, & \tau \leq t \end{cases}$$

Здесь $y_\varepsilon(t, x; u(\cdot))$ – решение задачи (1.6), $w_\varepsilon(t, x; u(\cdot))$ – решение сопряженной системы.

С привлечением теорем о следах в пространствах Соболева [4, 5] показывается, что $\nabla J(\varepsilon, v(\cdot))(\cdot) \in L_2(0, T)$. Таким образом, необходимое условие экстремума, которому удовлетворяет любой элемент $v_\varepsilon^*(\cdot)$, решающий аппроксимационную задачу, формулируется в следующей теореме [6].

Теорема 2.2. Пусть $v_\varepsilon^*(\cdot)$ – решение аппроксимационной задачи. Тогда необходимо выполняется условие

$$\langle \nabla J(\varepsilon, v_\varepsilon^*(\cdot))(\cdot), v(\cdot) - v_\varepsilon^*(\cdot) \rangle_{L_2(0, T)} \geq 0, \quad \forall v(\cdot) \in V[0, T] \quad (2.9)$$

Обозначим через Π оператор проектирования в пространстве $L_2(0, T)$ на выпуклое замкнутое множество $V[0, T]$. Необходимое условие (2.9) можно

сформулировать следующим образом [6].

Теорема 2.3. Пусть $v_\varepsilon^*(\cdot)$ – решение аппроксимационной задачи. Тогда при всех $\alpha > 0$ справедливо равенство

$$v_\varepsilon^*(\cdot) = \Pi(v_\varepsilon^*(\cdot) - \alpha \nabla J(\varepsilon, v_\varepsilon^*(\cdot))(\cdot)) \quad (2.10)$$

Теорема 2.3 служит основой для приближенных алгоритмов, позволяющих строить последовательности, приближающие в метрике пространства $L_2(0, T)$ экстремальные элементы $v_\varepsilon^*(\cdot)$.

Известные результаты [6], относящиеся к таким алгоритмам, например методу проекции градиента, опираются на следующий факт.

Теорема 2.4. Градиент функционала качества $J(\varepsilon, v(\cdot))$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $V[0, T]$, т.е.

$$\exists M > 0 \quad \forall v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in V[0, T]:$$

$$\|\nabla J(\varepsilon, v_1(\cdot))(\cdot) - \nabla J(\varepsilon, v_2(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(0, T)} \leq M \|v_1(\cdot) - v_2(\cdot)\|_{L_2(0, T)}$$

Проследив структуру слагаемых в формуле для градиента функционала (2.8), заключаем, что для доказательства теоремы достаточно показать выполнение условия Липшица для следующих отображений:

$$v(\cdot) \rightarrow y'_\varepsilon(\cdot, u(\cdot); u(\cdot)); \quad v(\cdot) \rightarrow y''_\varepsilon(\cdot, u(\cdot); u(\cdot))$$

$$v(\cdot) \rightarrow y_\varepsilon(\cdot, \cdot; u(\cdot)); \quad v(\cdot) \rightarrow U'_\varepsilon(\cdot, \cdot; u(\cdot))$$

$$v(\cdot) \rightarrow U_\varepsilon(\cdot, \cdot; u(\cdot)); \quad v(\cdot) \rightarrow w_\varepsilon(\cdot, \cdot; u(\cdot)) \quad (2.11)$$

причем функции $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ связаны предпоследним соотношением (1.6).

Выполнение условия Липшица для первых пяти отображений (2.11) есть следствие линейности по u_ε краевой задачи (1.6) и свойств штрафной функции U_ε . При учете (2.7) для доказательства выполнения условия Липшица для последнего отображения (2.11) достаточно показать это для отображения

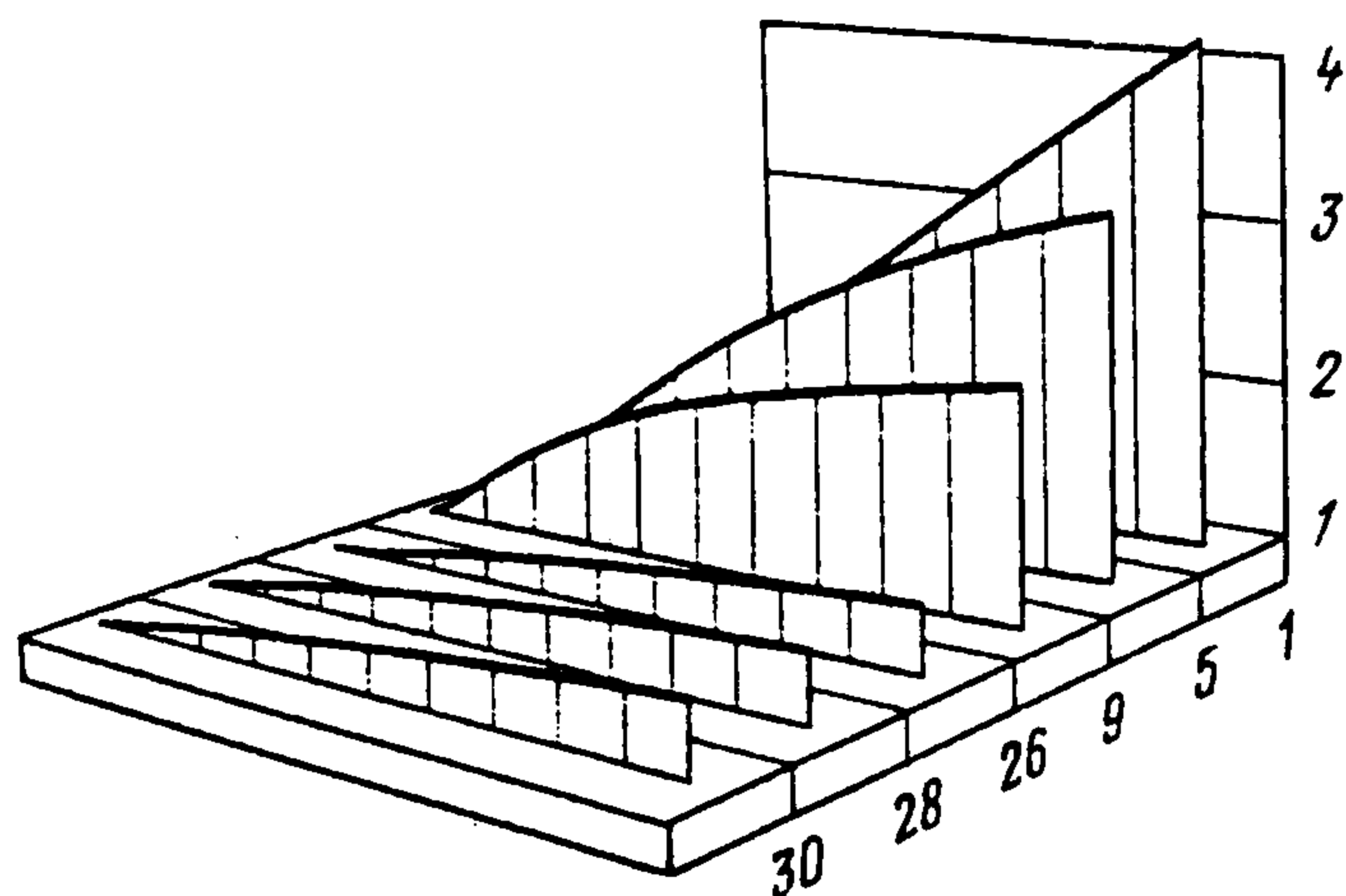
$$v(\cdot) \rightarrow P(f(\tau)\delta'(x - q(\tau))(\cdot, \cdot))$$

По определению функции $f(\cdot)$ отображение $v(\cdot) \rightarrow f(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной C .

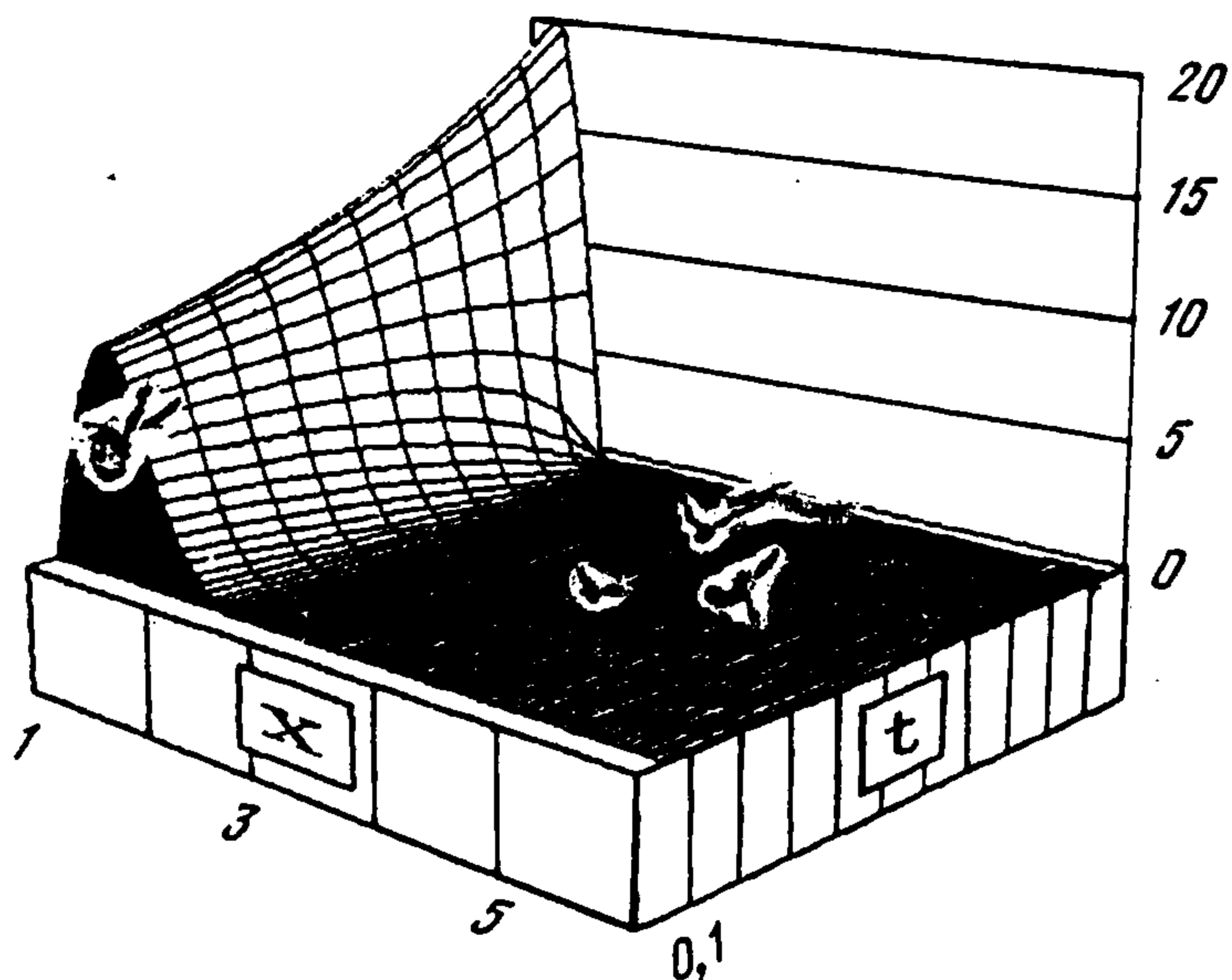
Учитывая определение оператора P (2.7), получаем оценку

$$\begin{aligned} & \|P(f_1(\tau)\delta'(x - q_1(\tau))) - P(f_2(\tau)\delta'(x - q_2(\tau)))\|_{L_2(0, T; H^*)}^2 = \\ & = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-2} \int_0^T \left(\int_0^t \exp(-\lambda_j(t-\tau)) (f_2(\tau)\omega'_j(q_2(\tau)) - f_1(\tau)\omega'_j(q_1(\tau))) d\tau \right)^2 dt \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-2} \int_0^T \left\{ 4X^{-1}\lambda_j^2 \left(\int_0^t \exp(-\lambda_j(t-\tau)) |f_2(\tau)| |q_2(\tau) - q_1(\tau)| d\tau \right)^2 + \right. \\ & \left. + 4X^{-1} \left(\int_0^t \exp(-\lambda_j(t-\tau)) \sqrt{\lambda_j} |f_2(\tau) - f_1(\tau)| d\tau \right)^2 \right\} dt \leq AI + BI \end{aligned}$$

$$A = 4T^2 KX^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-1}, \quad B = 4C^2 X^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-2}, \quad I = \int_0^T |v_1(\tau) - v_2(\tau)|^2 d\tau$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь учтено, что $\omega_j(\cdot), \lambda_j$ решают задачу (2.5), а в силу однородности первого уравнения (1.6) и гладкости функции U_ε величина $f_2(\tau)$ оценивается некоторой постоянной K равномерно по $\tau \in [0, T]$ и $v(\cdot) \in V[0, T]$:

$$|f_2(\tau)| \leq K, \quad \forall \tau \in [0, T], \quad \forall v(\cdot) \in V[0, T]$$

Выбирая число $M_1 > 0$ так, чтобы $M_1^2 = \max\{A, B\}$, получаем выполнение условия Липшица для последнего отображения (2.11), и теорема 2.4 доказана.

Пример. При учете теоремы 2.4 для численного решения аппроксимационной задачи был применен метод проекции градиента [6].

Начальная функция $\varphi(x)$ аппроксимировалась функцией

$$\psi(x) = \begin{cases} A_0 \sin \pi u_0^{-1} x, & 0 \leq x < u_0 \\ 0, & u_0 \leq x \leq X \end{cases}$$

которая в окрестности точки u_0 сглаживалась подходящим образом. Число X вычислялось по формуле $X = [TV] + 1 + h$, где $[\cdot]$ – целая часть числа, V выбиралась из оценки (1.9), h – шаг сетки по переменной x .

Функция U_ε аппроксимировалась сплайном пятого порядка, что обеспечивало достаточную гладкость решений рассматриваемых систем. Распределение $\delta'(x - u(t))$ аппроксимировалось посредством гладкой регуляризации функцией вида

$$-\pi^{1/2} N^3 2(x - u(t)) \exp(-N^2(x - u(t))^2)$$

при подходящих значениях N . Для вычисления величин u_ε и w_ε привлекались неявные разностные схемы, которые решались методом прогонки. Расчеты проводились при следующих значениях параметров:

$$T = 0,1; \quad u_0 = 1; \quad A_0 = 20; \quad \varepsilon = 0,1; \quad N = 20; \quad k = 2$$

шаг по $t, \tau = 0,01$; шаг по $x, h = 0,05$.

На фиг. 1 изображены графики элементов итерационной последовательности $u^{(s)}(t)$, приближающих реальный фронт $u_0(t)$. На фиг. 2 изображена соответствующая температурная поверхность $u_\varepsilon(t, x; u_0(\cdot))$. При этом соответствующее экстремальное значение функционала качества $J(\varepsilon, v(\cdot))$ равнялось 0,001601.

Расчеты проводились при разных значениях параметров системы и показывают, что предлагаемый метод дает машинную аппроксимацию задачи Стефана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Охезин С.П.* Об одной аппроксимации в задаче управления формой области для параболической системы // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 361–365.
2. *Охезин С.П.* Об одной математической задаче Стефана // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 6. С. 1042–1048.
3. *Мейрманов А.М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 239 с.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
5. *Adams R.A.* Sobolev spaces. N.Y.: Acad. Press, 1975. P. 268.
6. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
1.IV.1992