УДК 62–50

© 1993 г. Ю.В. Пилипенко, А.А. Чикрий

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНФЛИКТНО-УПРАВЛЯЕМЫЕ ПРОЦЕССЫ

Рассматриваются квазилинейные динамические процессы, функционирующие в условиях конфликта [1, 3–8], для которых условие Л.С. Понтрягина [1] выполнено лишь на некоторых интервалах числовой полуоси (последнее может иметь место, в частности, если однородная система осуществляет периодические колебательные движения [2]). На основании метода разрешающих функций [3, 4] получены общие достаточные условия разрешимости задачи группового преследования [3, 4], рассмотрен типичный частный случай, а также решена задача группового преследования для системы второго порядка [6].

Результаты примыкают к исследованиям [3–5].

1. Постановка задачи. Пусть состояние процесса $z = (z_1,..., z_\nu)$, $z_i \in R^{n_i}$ в пространстве R^n описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{z}_i = A_i z_i + \varphi_i(u_i, \upsilon), \quad u_i \in U_i, \quad \upsilon \in V \tag{1.1}$$

Здесь A_i – квадратные матрицы порядка n_i, $\varphi_i(u_i, \upsilon)$ – непрерывные по совокупности переменных вектор-функции, U_i и V – непустые компакты (всюду, где не оговорено противное, $i = 1,2,.., \nu$).

Терминальное множество M состоит из множеств $\overset{*}{M}_1,..., \overset{*}{M}_\nu$, каждое из которых представлено в виде $\overset{*}{M}_i = \overset{0}{M}_i + M_i$, где $\overset{0}{M}_i$ – линейные подпространства из R^{n_i}, а M_i – выпуклые замкнутые множества, принадлежащие L_i-ортогональным дополнениям к подпространству $\overset{0}{M}_i$ в R^{n_i}.

Траектория конфликтно-управляемого процесса (1.1), находящегося в состоянии $z^0 = (\overset{0}{z}_1,..., \overset{0}{z}_\nu)$, может быть приведена на терминальное множество M в момент времени $T(z^0)$, если существуют такие измеримые функции $u_i(t) = u_i(\overset{0}{z}_i, \upsilon_t(\cdot))$, где $\upsilon_t(\cdot) = \{\upsilon(s)\colon s \in [0, t]\}$, $t \in [0, T(z^0)]$ со значениями из U_i, что хотя бы для одного i: $z_i(T(z^0)) \in \overset{*}{M}_i$ для любой измеримой функции $\upsilon(t)$, $t \in [0, T(z^0)]$ будет $\upsilon(t) \in V$.

Объектом исследования являются достаточные условия на параметры процесса (1.1) для разрешимости задачи о приведении траектории на терминальное множество за конечное время.

2. Вспомогательные результаты. Приведем несколько утверждений, необходимых в дальнейшем. Их доказательства можно найти в [8–12].

Пусть $K(R^n)$ – пространство, состоящее из всех непустых компактов пространства R^n. Введем в нем метрику Хаусдорфа [9].

Если $X, Y \subset K(R^n)$, а S – единичный шар в R^n с центром в нуле, то $\operatorname{dist}(X, Y) = \min\{\lambda \geqslant 0: X \subset Y + \lambda S, Y \subset X + \lambda S\}$.

Многозначное отображение $A(x)$, $A: X \to K(R^n)$, $X \subset \operatorname{dom} A = \{x: A(x) \neq \phi\}$ полунепрерывно сверху в точке $x_0 \in X$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $\| x - x_0 \| \leqslant \delta$, то $A(x) \subset A(x_0) + \varepsilon S$. Если отображение $A(x)$ полунепрерывно сверху в каждой точке множества X, то оно полунепрерывно сверху на множестве X. Обозначим для множества $X, X \subset K(R^n)$, конус $\operatorname{con} X = \{z: z = \lambda x, x \in X, \lambda > 0\}$, $\overline{\operatorname{con}} X$ – замыкание $\operatorname{con} X$.

Лемма 1 [8]. Пусть $X, Y, M \subset K(R^n)$, многозначное отображение $A(x, y)$, $A: X \times Y \to K(R^n)$ полунепрерывно сверху, функция $f(x)$, $f: X \to R^n$ непрерывна, причем $f(x) \cap M = \phi$ для любых $x \in X$, $y \in Y$. Тогда функция $\alpha(x, y)$, $\alpha: X \times Y \to R^1$, определенная по формуле $\alpha(x, y) = \max\{\alpha \geqslant 0: \alpha(M - f(x)) \cap A(x, y) \neq \phi\}$, полунепрерывна сверху.

Лемма 2 [10]. Пусть $X \subset K(R^n)$, многозначные отображения $T(x)$, $T: X \to K(R^n)$, $A(x)$, $A: X \to K(R^n)$, полунепрерывны сверху, а функция $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in A(x)$, $f(x, y) \in R^n$ непрерывна. Тогда многозначное отображение $C(x) = \{y \in A(x): f(x, y) \in T(x)\}$ полунепрерывно сверху.

Многозначное отображение $A(x)$, $A: X \to K(R^n)$ будем называть измеримым по Лебегу (Борелю), если множество X измеримо по Лебегу (Борелю) и для любого $Y \subset K(R^n)$ множество $\{x \in X: A(x) \subset Y\}$ измеримо по Лебегу (Борелю). Для простоты будем называть измеримые по Лебегу многозначные отображения просто измеримыми, а измеримые по Борелю – борелевскими.

Лемма 3 [11]. Пусть $X \subset K(R^n)$, многозначные отображения $T(x)$, $T: X \to K(R^n)$, $A(x)$, $A: X \to K(R^n)$, измеримы (борелевские), а функция $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in A(x)$, $f(x, y) \in R^n$, измерима (борелевская) по x и непрерывна по y. Тогда многозначное отображение $C(x) = \{y \in A(x): f(x, y) \in T(x)\}$ является измеримым (борелевским).

Пусть $X \subset K(R^n)$; X_1 – множество векторов $x \in X$, таких, что у них первая компонента наименьшая, X_2 – множество векторов $x \in X_1$, таких, что у них вторая компонента наименьшая, и так далее до X_n. Очевидно, множество X_n состоит из одной точки x^*. Точку x^* называют лексикографическим минимумом компакта X и обозначают: $x^* = \operatorname{lexmin} X$.

Селектором многозначного отображения $A(x)$, $A: X \to K(R^n)$ называют однозначную функцию $a(x)$, такую, что $a(x) \in A(x)$ для всех $x \in X$.

Лемма 4 [12]. Пусть $X \subset K(R^n)$, $A(x)$, $A: X \to K(R^n)$ – измеримое (борелевское) отображение. Тогда селектор $a(x) = \operatorname{lexmin} A(x)$, $x \in X$ является измеримым (борелевским).

Лемма 5 [9]. Пусть $X, Y, Z \in K(R^n)$, функция $\varphi(y)$, $\varphi: Y \to Z$ борелевская, а функция $y(x)$, $y: X \to Y$, измерима. Тогда функция $\psi(x) = \varphi(y(x))$, $\psi: X \to Z$ измерима.

3. Схема метода. Обозначим через π_i оператор ортогонального проектирования из пространства R^{n_i} на подпространство L_i. При помощи функций $W_i(t, u_i, \upsilon) = \pi_i \Phi_i(t) \varphi_i(u_i, \upsilon)$, $t \geqslant 0$, $u_i \in U_i$, $\upsilon \in V$, (где $\Phi_i(t) = \exp(tA_i)$), образуем многозначные отображения

$$W_i(t, \upsilon) = \bigcup_{u_i \in U_i} W_i(t, u_i, \upsilon), \quad W_i(t) = \bigcap_{v \in V} W_i(t, \upsilon)$$

Условие Понтрягина означает, что $W_i(t) \neq \phi$ для всех $t \geqslant 0$. Будем полагать выполненными более слабые предположения [13].

Условие 1.

$$\operatorname{dom} W_i(t)=\left\{\bigcup_{k=0}^{\infty}[t_{2k}^i,t_{2k+1}^i]\right\},\quad t_0^i=0, t_j^i<t_{j+1}^i$$

для всех $j = 0, 1, 2,...$

Введем обозначения

$$\Delta_+^i=\bigcup_{k=0}^{\infty}[t_{2k}^i,t_{2k+1}^i],\quad \Delta_-^i=\bigcup_{k=0}^{\infty}(t_{2k+1}^i,t_{2k+2}^i)$$

Условие 2. Существуют борелевские многозначные отображения $Q_i(t)$, Q_i: $\Delta_-^i \to K(L_i)$ такие, что

1) $\bigcap\limits_{\upsilon\in V}\{W_i(t,\upsilon)+Q_i(t)\}\neq\phi$ для всех $t\in\Delta_-^i$

2) $\int\limits_{t_{2k+1}^i}^{t_{2k+2}^i}Q_i(\tau)d\tau\subset\int\limits_{t_{2k}^i}^{t_{2k+1}^i}W_i(\tau)d\tau$

для всех $k = 0, 1, 2,...$

Определим моменты времени

$$\tilde t_{2k+1}^i=\max\left[t\leqslant t_{2k+1}^i:\int\limits_{t_{2k+1}^i}^{t_{2k+2}^i}Q_i(\tau)d\tau\subset\int\limits_{t}^{t_{2k+1}^i}W_i(\tau)d\tau\right]\tag{3.1}$$

$k = 0, 1, 2,...$

Зафиксируем $t\in[0,+\infty]$, тогда для каждого i существует такое целое число $p_i\geqslant 0$, что $t\in[t_{2p_i}^i,t_{2p_i+1}^i]$ или $t\in(t_{2p_i+1}^i,t_{2p_i+2}^i)$

Для тех i, для которых $t\in[t_{2p_i}^i,t_{2p_i+1}^i]$, определим множества $\Delta_-^i(t)$, $\Delta_0^i(t)$, $\tilde\Delta_+^i(t)$ по формулам

$$\Delta_-^i(t)=\bigcup_{k=0}^{p_i-1}(t-t_{2k+2}^i,t-t_{2k+1}^i);\quad \Delta_0^i(t)=\bigcup_{k=0}^{p_i-1}[t-t_{2k+1}^i,t-\tilde t_{2k+1}^i]$$

$$\tilde\Delta_+^i(t)=\bigcup_{k=0}^{p_i-1}(t-\tilde t_{2k+1}^i,t-t_{2k}^i)\cup[0,t-t_{2p_i+1}^i]$$

Для тех i, для которых $t\in(t_{2p_i+1}^i,t_{2p_i+2}^i)$, определим множества $\Delta_0^i(t)$, $\Delta_-^i(t)$, $\tilde\Delta_+^i(t)$ по формулам

$$\Delta_-^i(t)=\bigcup_{k=0}^{p_i-1}(t-t_{2k+2}^i,t-t_{2k+1}^i)\cup[0,t-t_{2p_i+1}^i]$$

$$\Delta_0^i(t)=\bigcup_{k=0}^{p_i}[t-t_{2k+1}^i,t-\tilde t_{2k+1}^i];\quad \tilde\Delta_+^i(t)=\bigcup_{k=0}^{p_i-1}(t-\tilde t_{2k+1}^i,t-t_{2k}^i)$$

Обозначим для фиксированного t, $t>0$

$$\Gamma_i(t)=\left\{\gamma_i(\cdot):\begin{array}{l}\gamma_i(t-\tau)\in W_i(t-\tau),\tau\in\tilde\Delta_+^i(t)\\ \gamma_i(t-\tau)=0,\tau\in[0,t]\setminus\tilde\Delta_+^i(t)\end{array}\right\}$$

– совокупность борелевских селекторов отображения $W_i(t-\tau)$, $t\geqslant\tau\geqslant 0$. Положим $\gamma(\cdot)=(\gamma_1(\cdot),..., \gamma_\nu(\cdot))$, $\Gamma(\cdot)=(\Gamma_1(\cdot),..., \Gamma_\nu(\cdot))$.

Зафиксировав некоторый борелевский селектор $\gamma(\cdot) \in \Gamma(t)$, обозначим

$$\xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot)) = \pi_i \Phi_i(t) z_i + \int_0^t \gamma_i(t-\tau) d\tau \tag{3.2}$$

Определим разрешающие функции

$$\mu_i(t, \tau, z_i, \upsilon, \gamma_i(\cdot)) =$$
$$= \begin{cases} \sup[\mu \geqslant 0 : W_i(t-\tau, \upsilon) - \gamma_i(t-\tau) \cap \mu(M_i - \xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot))) \neq \phi] \\ \tau \in \tilde{\Delta}^i_+(t) \\ 0, \tau \in [0, t] \setminus \tilde{\Delta}^i_+(t) \end{cases} \tag{3.3}$$

Положим

$$\mu(t, \tau, z, \upsilon, \gamma(\cdot), \alpha) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \mu_i(t, \tau, z_i, \upsilon, \gamma_i(\cdot))$$

$$\alpha \in U = \left\{ \alpha : \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu), \alpha_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i = 1 \right\}$$

Определим время

$$T(z, \gamma(\cdot)) = \min\left\{ t \geqslant 0 : 1 - \inf_{\upsilon(\cdot) \in \Omega_V} \max_{\alpha \in U} \int_0^t \mu(t, \tau, z, \upsilon(\tau), \gamma(\cdot), \alpha) d\tau \leqslant 0 \right\} \tag{3.4}$$

$\Omega_V = \{\upsilon(\cdot) : \upsilon(\tau) \in V, \tau \geqslant 0, \upsilon(\tau)$ – измеримая функция$\}$.

Если $\xi_i(t, z_i, \gamma_i(\cdot)) \notin M_i$, то разрешающая функция $\mu(t, \tau, z, \upsilon, \gamma(\cdot), \alpha)$ конечна при любых значениях аргументов, и в силу леммы l – борелевская по υ, τ, t. Следовательно, функция $\mu(t, \tau, z, \upsilon, \gamma(\cdot), \alpha)$ интегрируема на любом конечном интервале.

Если для некоторого i в момент t^* будет $\xi_i(t^*, z_i, \gamma_i(\cdot)) \in M_i$, а $\alpha_i \neq 0$, то $\mu(t^*, \tau, z, \upsilon, \gamma(\cdot), \alpha) = +\infty$ при любых τ, υ. Считая при этом, что интеграл от функции, равной $+\infty$ на конечном интервале, равен $+\infty$, получим, что неравенство (3.4) выполнено автоматически, и следовательно, $t^* = T(z, \gamma(\cdot))$.

4. Основная теорема. *Теорема* 1. Пусть конфликтно-управляемый процесс (1.1) находится в начальном состоянии z^0 и для него выполнены условия 1 и 2, а также существуют борелевские селекторы $\overset{0}{\gamma}_i(t-\tau)$, $\overset{0}{\gamma}_i(t-\tau) \in \Gamma_i(t)$, $t \geqslant \tau \geqslant 0$, такие,

что $T(z^0, \gamma^0(\cdot)) < +\infty$. Тогда траектория конфликтно-управляемого процесса может быть приведена на терминальное множество M в момент $T(z^0, \gamma^0(\cdot))$.

Доказательство. Обозначим $T(z^0, \gamma^0(\cdot)) = T$. Пусть $\upsilon(\tau) \in \Omega_V$.

Рассмотрим случай, когда $\xi_i(T, \overset{0}{z}_i, \overset{0}{\gamma}_i(\cdot)) \notin M_i$, для всех $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Введем

контрольную функцию

$$\sigma(T, t, z^0, \upsilon(\cdot), \gamma^0(\cdot)) = 1 - \max_{\alpha \in U} \int_0^t \mu(T, \tau, z^0, \upsilon(\tau), \gamma^0(\cdot)) d\tau$$

Поскольку $\sigma(T, 0, z^0, \upsilon(\cdot), \gamma^0(\cdot)) = 1$ и $\sigma(T, t, z^0, \upsilon(\cdot), \gamma^0(\cdot))$ — непрерывная убывающая по t функция, то в силу (3.4) существует такой момент t_*: $0 < t_* \leqslant T$, что $\sigma(T, t_*, z^0, \upsilon(\cdot), \gamma^0(\cdot)) = 0$.

Будем выбирать управление $u_i(\tau)$, $u_i(\tau) \in U_i$ при $\tau \in [0, t_*]$ следующим образом.

1°. Пусть $\tau \in \tilde{\Delta}_+^i(T) \cap [0, t_*]$.

Образуем многозначное отображение

$$U_i^1(\tau,\upsilon) = \{u_i \in U_i : W_i(T-\tau,u_i,\upsilon) -$$
$$- \gamma_i^0(T-\tau) \in \mu_i(T,\tau,z_i^0,\upsilon,\gamma_i^0(\cdot))(M_i - \xi_i(T,z_i^0,\gamma_i^0(\cdot)))\}$$

Учитывая предположения о параметрах процесса (1.1), можно заключить, что функция $W_i(T-\tau, u_i, \upsilon) - \gamma_i^0(T-\tau)$ – борелевская по τ и непрерывна по u_i, многозначное отображение

$$\mu_i(T,\tau,z_i^0,\upsilon(\tau),\gamma_i^0(\cdot))[M_i - \xi_i(T,z_i^0,\gamma_i^0(\cdot))]$$

является борелевским по τ, υ, так как по лемме 1 функция $\mu_i(T, \tau, z_i^0, \upsilon, \gamma_i^0(\cdot))$ полунепрерывна сверху по υ.

В силу леммы 3 многозначное отображение $U_1^i(\tau, \upsilon)$ – борелевское по υ, τ. Выделим из многозначного отображения $U_1^i(\tau, \upsilon)$ селектор $u_1^i(\tau, \upsilon) = \operatorname{lexmin} U_1^i(\tau, \upsilon)$.

Согласно лемме 4 селектор $u_1^i(\tau, \upsilon)$ – борелевская по τ, υ, функция.

Положим управление $u_1^i(\tau)$ при $\tau \in \tilde{\Delta}_+^i(T) \cap [0, t_*]$ равным $u_i(\tau) = u_1^i(\tau, \upsilon(\tau))$. Тогда по лемме 5 $u_i(\tau)$ – измеримая функция.

2°. Пусть $\tau \in \Delta_-^i(T)$. Образуем многозначное отображение

$$U_2^i(\tau,\upsilon) = \{u_i \in U_i : W_i(T-\tau,u_i,\upsilon) \in -Q_i(T-\tau)\}$$

В силу условия 2, лемм 2 и 3 многозначное отображение $U_2^i(\tau,\upsilon)$ не пусто борелевское по τ и полунепрерывно сверху по υ.

Положим $u_2^i(\tau, \upsilon) = \operatorname{lexmin} U_2^i(\tau,\upsilon)$, а управление $u_i(\tau)$ при $\tau \in \Delta_-^i(T)$ положим равным $u_2^i(\tau, \upsilon(\tau))$.

Аналогично случаю 1° можно заключить, что функция $u_i(\tau)$ измерима по τ при $\tau \in \Delta_-^i(T)$.

Обозначим

$$\eta_{2k+1}^i(u_i(\cdot),\upsilon(\cdot)) = \int_{T-t_{2k+2}^i}^{T-t_{2k+1}^i} W_i(T-\tau,u_i(\tau),\upsilon(\tau))\,d\tau, \quad k = p_i - 1,\ldots,0$$

Для тех i, для которых $T \in (t_{2p_i+1}^i, t_{2p_i+2}^i)$, при $k = p_i$, получим

$$\eta_{2p_i+1}^i(u_i(\cdot),\upsilon(\cdot)) = \int_0^{T-t_{2p_i+1}^i} W_i(T-\tau,u_i(\tau),\upsilon(\tau))\,d\tau$$

3°. Пусть $\tau \in \Delta_0^i(T)$. Тогда $\tau \in [t - t_{2k+1}^i, t - \tilde{t}_{2k+1}^i]$, где $k = p_i - 1,\ldots, 0$ для тех i, для которых $T \in [t^i_{2p_i}, t^i_{2p_i+1}]$, и $k = p_i,\ldots, 0$ для тех i, для которых $T \in$ $\in (t^i_{2p_i+1}, t^i_{2p_i+2})$.

Согласно выбору управления $u_i(\tau)$ при $\tau \in \Delta^i_-(T)$

$$
\begin{aligned}
&-\eta^i_{2k+1}(u_i(\cdot),\upsilon(\cdot)) \in \int\limits_{T-t^i_{2k+2}}^{T-t^i_{2k+1}} Q_i(T-\tau)\,d\tau \\
&-\eta^i_{2p_i+1}(u_i(\cdot),\upsilon(\cdot)) \in \int\limits_{0}^{T-t^i_{2p_i+1}} Q_i(T-\tau)\,d\tau
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Из соотношений (3.1) и (4.1) следует

$$
-\eta^i_{2k+1}(u_i(\cdot),\upsilon(\cdot)) \in \int\limits_{T-t^i_{2k+1}}^{T-\tilde{t}^i_{2k+1}} W_i(T-\tau)\,d\tau \tag{4.2}
$$

В силу (4.2) существует борелевский селектор $h^i_{2k+1}(T-\tau)$ отображения $W_i(T-\tau)$, $\tau \in (T - t^i_{2k+1}, T - \tilde{t}^i_{2k+1})$, такой, что

$$
\int\limits_{T-t^i_{2k+1}}^{T-\tilde{t}^i_{2k+1}} h_{2k+1}(T-\tau)\,d\tau = -\eta^i_{2k+1}(u_i(\cdot),\upsilon(\cdot))
$$

Для тех i, для которых $T \in (t^i_{2p_i+1}, t^i_{2p_i+2})$, $k = p_i,\ldots, 0$.

Для тех i, для которых $T \in (t^i_{2p_i}, t^i_{2p_i+1})$, $k = p_i - 1,\ldots, 0$.

Положим $h^i(T-\tau) = h^i_{2k+1}(T-\tau)$ для всех k.

Таким образом, функция $h^i(T-\tau)$ определена для всех $\tau \in \Delta^i_-(t)$. Образуем многозначное отображение

$$U^i_3(\tau,\upsilon) = \{u_i \in U_i \colon W_i(T-\tau, u_i, \upsilon) = h^i(T-\tau)\}$$

В силу лемм 2, 3 многозначное отображение $U^i_3(\tau, \upsilon)$ – борелевское по τ и полунепрерывно сверху по υ.

Положим $u^i_3(\tau, \upsilon) = \operatorname{lexmin} U^i_3(\tau, \upsilon)$, а управление $u_i(\tau)$ равным $u^i_3(\tau, \upsilon(\tau))$.

На основании лемм 4 и 5 можно заключить, что функция $u_i(\tau)$ измерима по τ при $\tau \in \Delta^i_0(T)$.

4°. Пусть $\tau \in \tilde{\Delta}^i_+(T) \cap [t_*, T]$. Образуем многозначное отображение

$$U^i_4(\tau,\upsilon) = \{u_i \in U_i \colon W_i(T-\tau, u_i, \upsilon) = \gamma^0_i(T-\tau)\}$$

Положим $u^i_4(\tau, \upsilon) = \operatorname{lexmin} U^i_4(\tau, \upsilon)$, а управление $u_i(\tau)$ равным $u^i_4(\tau, \upsilon(\tau))$.

Аналогично случаю 3 можно заключить, что функция $u_i(\tau)$ измерима на интервале $\tau \in \tilde{\Delta}^i_+(T) \cap [t_*, T]$.

Из формулы Коши следует

$$\pi_i z_i(T)=\pi_i\Phi_i(T)z_i^0+\int_0^T W_i(T-\tau,u_i(\tau),\upsilon(\tau))\,d\tau \tag{4.3}$$

Учитывая закон выбора управления $u_i(\tau)$ при $\tau\in\Delta_-^i(T)$ и $\tau\in\Delta_0^i(T)$, получаем

$$\int_{T-t_{2k+2}^i}^{T-t_{2k+1}^i} W_i(T-\tau,u_i(\tau),\upsilon(\tau))\,d\tau+\int_{T-t_{2k+1}^i}^{T-\tilde{t}_{2k+1}^i} W_i(T-\tau,u_i(\tau),\upsilon(\tau))\,d\tau=0 \tag{4.4}$$

для всех $k=p_i-1,\ldots,0$.

Для тех i, для которых $T\in(t_{2p_i+1}^i,t_{2p_i+2}^i)$ при $k=p_i$, получим что справедливо равенство

$$\int_0^{T-t_{2p_i+1}^i} W_i(T-\tau,u_i(\tau),\upsilon(\tau))\,d\tau+\int_{T-t_{2p_i+1}^i}^{T-\tilde{t}_{2p_i+1}^i} W_i(T-\tau,u_i(\tau),\upsilon(\tau))\,d\tau=0 \tag{4.5}$$

Согласно методу разрешающих функций [3] при $\tau\in\tilde{\Delta}_+^i(T)$

$$W_i(T-\tau,u_i(\tau),\upsilon(\tau))-\gamma_i^0(t-\tau)\in\mu_i(T,\tau,z_i^0,\upsilon(\tau),\gamma_i^0(\cdot))[M_i-\xi_i(T,z_i^0,\gamma_i^0(\cdot))] \tag{4.6}$$

Учитывая измеримость функций

$$W_i(T-\tau,u_i(\tau),\upsilon(\tau)),\quad \gamma_i^0(T-\tau),\quad \mu_i(T,\tau,z_i^0,\upsilon(\tau),\quad \gamma_i^0(\cdot))\quad \text{по } \tau,$$

из соотношечия (4.6) заключаем, что

$$\int_{\tilde{\Delta}_+^i(T)} W_i(T-\tau,u_i(\tau),\upsilon(\tau))\,d\tau\in[M_i-\xi_i(T,z_i^0,\gamma_i^0(\cdot))]\int_{\tilde{\Delta}_+^i(T)}\mu_i(T,\tau,z_i^0,\upsilon(\tau),\gamma_i^0(\cdot))\,d\tau+$$
$$+\int_{\tilde{\Delta}_+^i(T)}\gamma_i^0(T-\tau)\,d\tau \tag{4.7}$$

Учитывая, что $\gamma_i^0(T-\tau)=0$ и $\mu_i(T,\tau,z_i^0,\upsilon(\tau),\gamma_i^0(\cdot))=0$ при $\tau\in[0,T]\backslash\tilde{\Delta}_+^i(T)$, а также равенства (4.4), (4.5), соотношение (4.7) можно записать в виде

$$\int_0^T W_i(T-\tau,u_i(\tau),\upsilon(\tau))\,d\tau\in[M_i-\xi_i(T,z_i^0,\gamma_i^0(\cdot))]\int_0^T\mu_i(T,\tau,z_i^0,\upsilon(\tau),\gamma_i^0)\,d\tau+$$
$$+\int_0^T\gamma_i^0(T-\tau)\,d\tau \tag{4.8}$$

Контрольная функция $\sigma(T,T,z^0,\upsilon(\cdot),\gamma(\cdot))=0$, в силу выбора управлений $u_i(\tau)$, т.е. существует такой номер i_0, что

$$1-\int_0^T\mu_{i_0}(T,\tau,z_{i_0}^0,\upsilon(\tau),\gamma_{i_0}^0(\cdot))\,d\tau=0 \tag{4.9}$$

Из соотношений (3.2), (4.3), (4.8) и (4.9) следует, что

$$\pi_{i_0}z_{i_0}^0(T)\in M_{i_0}$$

Рассмотрим случай, когда $\xi_{i_0}(T,z_{i_0}^0,\gamma_{i_0}^0(\cdot))\in M_{i_0}$ для некоторого номера i_0.

Положим управление $u_{i_0}(\tau), u_{i_0}(\tau) \in U_i, \tau \in [0, T]$ равным

$$u_{i_0}(\tau)=\begin{cases} u_2^{i_0}(\tau, \upsilon(\tau)), & \tau \in \Delta_-^{i_0}(T) \\ u_3^{i_0}(\tau, \upsilon(\tau)), & \tau \in \Delta_0^{i_0}(T) \\ u_4^{i_0}(\tau, \upsilon(\tau)), & \tau \in \tilde{\Delta}_+^{i_0}(T) \end{cases}$$

Из соотношений (3.2) и (4.3) следует, что и в этом случае справедливо соотношение $\pi_{i_0} z_{i_0}^0(T) \in M_{i_0}$.

Теорема доказана.

5. Модифицированный метод. Рассмотрим другой подход к решению исходной задачи.

Введем многозначные отображения

$$W_i(t,\tau,\upsilon)=\pi_i\Phi_i(t-\tau)\varphi_i(U_i,\upsilon)-\omega_i(t,\tau)M_i$$
$$W_i(t,\tau)=\bigcap_{\upsilon\in V} W_i(t,\tau,\upsilon), \quad \omega_i(t,\tau)\geqslant 0, \quad \int_0^t \omega_i(t,\tau)\,d\tau=1 \tag{5.1}$$

Условие 3

dom $Wi(t, \tau)=\bigcup_{k=0}^{\infty}\Delta^i(k,t)$, для всех $t\geqslant 0, \tau\in[0,t]$

$$\Delta^i(k,t)=\begin{cases} [t_{2k}^i, t], & t\in[t_{2k}^i, \ t_{2k+1}^i) \\ [t_{2k}, t_{2k+1}^i), & t\geqslant t_{2k+1}^i \\ \phi, & t<t_{2k}^i \end{cases}$$

Определим множества $\Delta_-^i(k, t)$ и $\Delta_+^i(k, t)$ по формулам

$$\Delta_-^i(k,t)=\begin{cases} (t-t_{2k+2}^i, t-t_{2k+1}^i), & t\geqslant t_{2k+2}^i \\ [0, t-t_{2k+1}^i), & t\in[t_{2k+1}^i, \ t_{2k+2}^i) \\ \phi, & t<t_{2k+1}^i \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\Delta_+^i(k,t)=\begin{cases} [t-t_{2k+1}^i, t-t_{2k}^i], & t\geqslant t_{2k+1}^i \\ [0, t-t_{2k}^i], & t\in[t_{2k}^i, t_{2k+1}^i) \\ \phi, & t<t_{2k}^i \end{cases} \tag{5.3}$$

Обозначим $k_i(t)=\max[k\geqslant 0\colon \Delta_-^i(k,t)\neq\phi]$.

Положим

$$\Delta_-^i(t)=\bigcup_{k=0}^{k_i(t)} \Delta_-^i(k,t); \quad \Delta_+^i(t)=\bigcup_{k=0}^{k_i(t)+1} \Delta_+^i(k,t)$$

Условие 4. Существуют борелевские многозначные отображения $Q_i(t, \tau)$, Q_i: $[0, +\infty]\times\Delta_-(t)\to K(L_i)$ такие, что

1) $\bigcap_{\upsilon\in V}\{W_i(t,\tau,\upsilon)+Q_i(t,\tau)\}\neq\emptyset$ для всех $\tau\in\Delta_-^i(t)$

2) $\int_{\Delta_-^i(k,t)} Q_i(t,\tau)\,d\tau\subset\int_{\Delta_+^i(k,t)} W_i(t,\tau)\,d\tau$ для всех $k=0,\dots,k_i(t)$

Определим моменты времени

$$\tilde{t}_{2k+1}^i=\max\left[\tilde{t}\leqslant t_{2k+1}^i\colon \int_{\Delta_-^i(k,t)} Q_i(t,\tau)\,d\tau\subset\int_{t-t_{2k+1}^i}^{t-\tilde{t}} W_i(t,\tau)\,d\tau\right]$$

Положим

$$\Delta_0^i(k,t)=\begin{cases}[t-t_{2k+1}^i,t-\tilde{t}_{2k+1}^i],t\geqslant t_{2k+1}^i & \Delta_0^i(t)=\bigcup\limits_{k=0}^{k_i(t)}\Delta_0^i(k,t)\\ \phi,t<t_{2k+1}^i & \tilde{\Delta}_+^i(t)=\Delta_+^i(t)\setminus\Delta_0^i(t)\end{cases} \tag{5.4}$$

Обозначим

$$\Gamma_i(t)=\left\{\gamma_i(\cdot)\colon\ \begin{array}{ll}\gamma_i(t,\tau)\in W_i(t,\tau), & \tau\in\tilde{\Delta}_+^i(t),\\ \gamma_i(t,\tau)=0, & \tau\in[0,t]\setminus\tilde{\Delta}_+^i(t),\end{array}\ \gamma_i(\cdot)-\text{борелевская}\right\}$$

Положим

$$\xi_i(t,z_i,\gamma_i(\cdot))=\pi_i\Phi_i(t)z_i+\int\limits_0^t\gamma_i(t,\tau)\,d\tau$$

$$\mu_i(t,\tau,z_i,\upsilon,\gamma_i(\cdot))=\left\{\begin{array}{l}\sup[\mu\geqslant 0\colon -\mu\xi_i(t,z_i,\gamma_i(\cdot))\in W_i(t,\tau,\upsilon)-\gamma_i(t,\tau)]\\ \tau\in\tilde{\Delta}_+^i(t)\\ 0,\tau\in[0,t]\setminus\tilde{\Delta}_+^i(t)\end{array}\right\}$$

$$\mu(t,\tau,z,\upsilon,\gamma(\cdot),\alpha)=\sum_{i=1}^{\nu}\alpha_i\mu_i(t,\tau,z_i,\upsilon,\gamma_i(\cdot))$$

$$T_{\omega(\cdot)}(z,\gamma(\cdot))=\min\left\{t\geqslant 0\colon 1-\inf_{\upsilon(\cdot)\in\Omega_V}\max_{\alpha\in U}\int\limits_0^t\mu(t,\tau,z,\upsilon(\tau),\gamma(\cdot),\alpha)\,d\tau\leqslant 0\right\}$$

Теорема 2. Пусть конфликтно-управляемый процесс (1.1) находится в состоянии z^0 и существуют борелевские неотрицательные функции $\omega_i(t,\tau)$, $t\geqslant\tau\geqslant 0$, а также борелевские селекторы $\overset{0}{\gamma_i}(t,\tau)\in\Gamma_i(t)$ такие, что $T=T_{\omega(\cdot)}(z^0,\gamma^0(\cdot))<+\infty$, $\int\limits_0^T\omega_i(T,\tau)d\tau=1$.

Тогда траектория процесса (1.1) может быть приведена на терминальное множество M в момент T.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

6. Частный случай. Рассмотрим частный случай, когда $\varphi_i(u_i,\upsilon)=u_i-\upsilon$, $U_i=\rho S$, $V=\sigma S$, $M_i=\varepsilon S$, $n_i=n$.

Положим $\xi_i(t,z_i,0)=\pi\Phi_i(t)z_i$.

Условие 5. Существует число $p<+\infty$: $p=\min\{\tilde{p}>0\colon \xi_i(t+\tilde{p},z_i)=\xi_i(t,z_i)$, $\forall z_i\in R^n\}$.

Условие 6

$$\operatorname{dom}W_i(t,\tau)=\bigcup_{k=0}^{\infty}\Delta(k,t)\quad t\geqslant 0,\tau\in[0,t]$$

$$\Delta(k,t)=\begin{cases}[t_{2k},t], & t\in[t_{2k},t_{2k+1})\\ [t_{2k},t_{2k+1}), & t\geqslant t_{2k+1}\\ \phi, & t<t_{2k}\end{cases}$$

Условие 7. Существует $\theta\in[0,p]$, такое, что $0\in\operatorname{int}\operatorname{co}\xi_i(\theta,z_i)$.

Аналогично формулам (5.2)–(5.4) определим множества

$\Delta_-(k,t)$, $\Delta_+(k,t)$, $\Delta_0(k,t)$

Введем обозначения $e_i(t, z_i) = (-\xi_i(t, z_i))(\| \xi_i(t, z_i) \|)^{-1}$, для $\xi_i(t, z_i) \neq 0$

$$\eta_{2k+1}(t) = \int\limits_{\Delta_-(k,t)} \{\sigma(t-\tau) - \rho(t-\tau) - \omega(t,\tau)\} d\tau, \quad k = k(t), \dots, 0$$

Положим $Q_{2k+1}(t) = \tilde{\eta}_{2k+1}(t)S$. Определим для $\eta_{2k+1} \in Q_{2k+1}(t)$ функции

$$\beta^i_{2k+1}(\eta_{2k+1}) = (\tilde{\eta}_{2k+1}(t) - \|\eta_{2k+1}\|)(\|\xi_i(t,z_i)\|)^{-1}$$

При условии, что $(\eta_{2k+1}, e_i(t, z_i)) \leqslant 0$, имеем

$$\beta^i_{2k+1}(\eta_{2k+1}) = ((\eta_{2k+1}, e_i(t,z_i)) + \tilde{\eta}_{2k+1}(t) - \|\eta_{2k+1} - e_i(t,z_i) \times$$

$$\times (\eta_{2k+1}, e_i(t,z_i))\|)(\|\xi_i(t,z_i)\|)^{-1}, \text{ если } (\eta_{2k+1}, e_i(t,z_i)) > 0$$

$$\beta_{2k+1}(\eta_{2k+1}) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \beta^i_{2k+1}(\eta_{2k+1})$$

Образуем многозначное отображение

$$\Theta(z) = \{\theta\colon\ 0 \in \operatorname{int} \operatorname{co} \xi_i(\theta, z_i)\}$$

В силу условия 7 $\Theta(z) \neq \varnothing$. Согласно условию 5, если $\theta_1 \in \Theta(z)$, то для всех $k = 0, 1, \dots$ имеем $\{\theta_1 + kp\} \in \Theta(z)$.

Определим разрешающие функции

$$\mu_i(t, \tau, z_i, \upsilon) = \begin{cases} \sup[\mu_i \geqslant 0 : -\mu_i \xi_i(t, z_i) \in W_i(t, \tau, \upsilon)], & \text{при} \quad \tau \in \tilde{\Delta}_+(t) \\ 0, \text{ при} \quad \tau \in [0, t] \setminus \tilde{\Delta}_+(t) \end{cases}$$

$$\mu(t, \tau, \upsilon, \alpha) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \mu_i(t, \tau, z_i, \upsilon)$$

Положим для $t \in \Theta(z)$

$$\lambda(t,z) = 1 - \inf_{\upsilon(\cdot) \in \Omega_V} \min_{\substack{\eta_{2k+1} \in Q_{2k+1} \\ k = k(t), \dots, 0}} \max_{(t)\alpha \in U} \left\{ \int_0^t \mu(t, \tau, z, \upsilon(\tau), \alpha) d\tau + \sum_{k=0}^{p} \beta_{2k+1}(\eta_{2k+1}) \right\}$$

Определим время $T^*_{\omega(\cdot)}(z) = \min\{t \geqslant 0;\ t \in \Theta(z)\colon \lambda(t, z) \leqslant 0\}$

Теорема 3. Пусть конфликтно-управляемый процесс (1.1) находится в состоянии z^0 и

1°. Выполнены условия 5 и 7.

2°. Существует борелевская неотрицательная функция $\omega(t, \tau)$, $t \geqslant \tau \geqslant 0$, такая, что выполнены условия 6 и 4.

Тогда траектория конфликтно-управляемого процесса может быть приведена на терминальное множество M в момент $T = T^*_{\omega(\cdot)}(z)$, такой, что

$$\int_0^T \omega(T, \tau) d\tau = 1, \quad T < +\infty$$

Доказательство теоремы 3 опирается на доказательство теоремы 1.

7. Модельный пример. Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_i + 4b^2 x_i = u_i, \quad x_i, y \in R^n, \quad \|u_i\| \leqslant 2\sigma, \quad \|\upsilon\| \leqslant \sigma \\ &\ddot{y} + b^2 y = \upsilon \end{aligned} \tag{7.1}$$

От системы второго порядка (7.1) заменой переменных $z_1^i = y - x_i$, $z_2^i = \dot{x}_i$, $z_3^i = y$, $z_4^i = \dot{y}$ перейдем к системе вида (1.1), где

$$z_i \in R^{4n}, \quad z_i = (z_1^i, z_2^i, z_3^i, z_4^i), \quad \pi_i(z_1^i, z_2^i, z_3^i, z_4^i) = z_1^i$$

После вычислений получаем

$$W(t,\tau,\upsilon) = b^{-1}\sigma|\sin 2b(t-\tau)|S - b^{-1}\upsilon|\sin b(t-\tau)| + \varepsilon\omega(t,\tau)S, \upsilon \in \sigma S$$

$$W(t,\tau) = \{b^{-1}\sigma(|\sin 2b(t-\tau)| - |\sin b(t-\tau)|) + \varepsilon\omega(t,\tau)\}S$$

$$\xi_i(t, z_i, 0) = z_1^i \cos 2bt - z_2^i (2b)^{-1} \sin 2bt + z_3^i(\cos 2bt - \cos bt) + z_4^i (b)^{-1} \sin bt$$

В качестве отображения $Q(t, \tau)$ возьмем

$$Q(t,\tau) = b^{-1}\sigma\{|\sin b(t-\tau)| - |\sin 2b(t-\tau)| - \varepsilon\omega(t,\tau)\}S$$

Для выполнения условия 2 с $Q(t, \tau)$ достаточно выполнения условия

$$\int_0^t \{b^{-1}\sigma(|\sin 2b(t-\tau)| - |\sin b(t-\tau)|) + \varepsilon\omega(t,\tau)\} d\tau \geqslant 0 \text{ для всех } \quad t \geqslant 0 \tag{7.2}$$

Из неравенства (7.2) и соотношения (5.1) следуют ограничения на параметр ε в зависимости от времени t.

Можно выделить три случая:

1) $t \geqslant 2\pi(3b)^{-1}$; $\varepsilon \geqslant \sigma(4b^2)^{-1}$

$$\omega(t,\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in [0, t - 2\pi(3b)^{-1}] \cup (t - \pi(2b)^{-1}, t] \\ 4b\{|\sin b(t-\tau)| - |\sin 2b(t-\tau)|\}, & \tau \in [t - 2\pi(3b)^{-1}, t - \pi(2b)^{-1}] \end{cases}$$

2) $t \in (\pi(2b)^{-1}, 2\pi(3b)^{-1})$; $\varepsilon \geqslant (b)^{-2}\sigma(-\cos bt - \cos^2 bt)$

$$\omega(t,\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \in (t - \pi(2b)^{-1}, t] \\ b(|\sin b(t-\tau)| - |\sin 2b(t-\tau)|) - (-\cos bt - \cos^2 bt)^{-1}, & \tau \in [0, t - \pi(2b)^{-1}] \end{cases}$$

3) $t \in (0, \pi(2b)^{-1})$; $\varepsilon \geqslant 0$; $\omega(t, \tau) = (t)^{-1}$

На основании теоремы 3 можно заключить, что время приведения траектории конфликтно-управляемого процесса (7.1) на терминальное множество $T = T_{\omega(\cdot)}(z)$ конечно, если выполнено условие 7 для начальных состояний процесса и параметры T и ε удовлетворяют приведенным выше соотношениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 757 с.
2. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. *Чикрий А.А.* Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Banach Center Publ. Math. Control Theory. 1985. 14P. P. 81–107.
4. *Чикрий А.А.* Групповое преследование при ограниченных координатах убегающего // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 6. С. 906–913.
5. *Чикрий А.А., Питцык М.В., Шишкина Н.Б.* Первый прямой метод Л.С. Понтрягина и некоторые эффективные способы преследования // Кибернетика. 1986. № 5. С. 75–81.

6. *Мезенцев А.В.* О некотором классе дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1971. № 6. С. 3–7.
7. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. *Прокопович П.В.,Чикрий А.А.* Квазилинейные конфликтно-управляемые процессы с нефиксированным временем // ПММ, 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 63–71.
9. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 595 с.
10. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. 512 с.
11. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
12. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
13. *Чикрий А.А., Пилипенко Ю.В.* Конфликтно-управляемые процессы с периодическим условием Понтрягина // Автоматика. 1991. № 4. С. 67–77.

Киев

Поступила в редакцию
24.IV.1992