

УДК 62-50

© 1993 г. К.А. Земсков, А.Г. Пашков

**ОБ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ  
ДВУХ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ  
С ОГРАНИЧЕННОЙ МАНЕВРЕННОСТЬЮ**

Рассматривается игровая задача сближения двух управляемых объектов с ограниченной маневренностью, движущихся на плоскости. Строится оптимальная позиционная стратегия преследующего объекта, гарантирующая ему, при выполнении указываемых ограничений на параметры задачи, сближение на минимальное расстояние с убегающим объектом в нефиксированный заранее момент времени. С помощью ЭВМ строятся области начальных позиций убегающего объекта, для которых полученная в работе оптимальная стратегия преследователя гарантирует точечную поимку убегающего за время не превышающее указываемого значения. Получены другие условия на параметры игры, для которых построенная в работе стратегия преследователя гарантирует минимум расстояния между объектами за весь период игры. Статья примыкает к работам [1-8].

**1. Уравнения движения и функционал платы.** Пусть объекты  $P$  (преследователь) и  $E$  (убегающий) движутся с постоянными скоростями на плоскости  $XOY$  (фиг. 1). Уравнения движения объектов и ограничения на их управляющие воздействия задаются теми же соотношениями, что и в известной задаче "игра двух автомобилей" [1] и имеют вид

$$x_i = V_i \sin \theta_i, \quad y_i = V_i \cos \theta_i, \quad \theta_i = (V_i / R_i) \varphi_i, \quad |\varphi_i| \leq 1 \quad (1.1)$$

Здесь  $V_i$  – постоянная скорость,  $R_i$  – минимальный радиус кривизны траектории,  $\theta_i$  – угол между осью  $Y$  и вектором  $V_i$ ,  $\varphi_i$  – скалярное управление,  $C_i$  – центр кривизны траектории,  $i = 1$  соответствует объекту  $P$ , а  $i = 2$  – объекту  $E$ .

В дальнейшем будем полагать, что для системы (1.1) справедливо равенство ( $\delta\theta_i$  – достаточно малая величина)

$$\theta_i = \theta_i^0 + \delta\theta_i \quad (1.2)$$

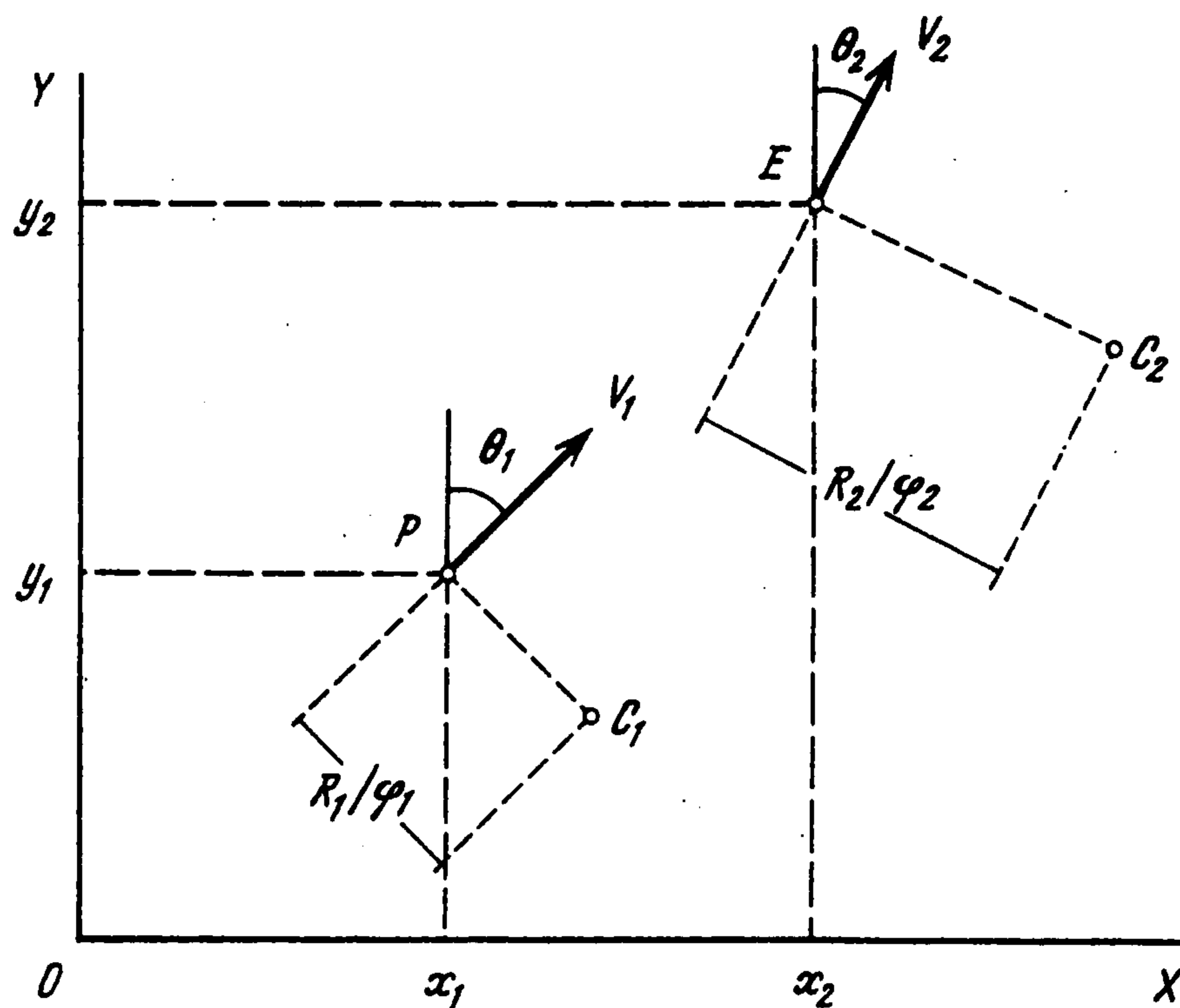
При учете (1.2) можно заключить, что движение объектов  $P$  и  $E$  будет происходить согласно системе линейных уравнений

$$x_i = V_i(\sin \theta_i^0 + z_i \cos \theta_i^0), \quad y_i = V_i(\cos \theta_i^0 - z_i \sin \theta_i^0) \quad (1.3)$$

$$z_i = (V_i / R_i) \varphi_i, \quad |\varphi_i| \leq 1 \quad (z_i = \delta\theta_i)$$

Функционал платы задается соотношением

$$\gamma = \min_{t_0 < t < T} \{ [x_2(t) - x_1(t)]^2 + [y_2(t) - y_1(t)]^2 \}^{1/2} \quad (1.4)$$



Фиг. 1

где  $T$  – момент окончания игры. Игра рассматривается на отрезке времени  $[t_0, T]$ , где  $T > t_0$  достаточно велико. Преследователь  $P$  минимизирует плату игры (1.4), преследуемый максимизирует ее. Начальные положения объектов  $P$  и  $E$  задаются векторами  $\{x_i^0, y_i^0, z_i^0 = 0\}$  ( $i = 1, 2$ ).

**2. Постановка задачи.** Для дифференциальной игры (1.3), (1.4) требуется найти такие соотношения между параметрами задачи  $V_i, R_i, \theta_i^0$  ( $i = 1, 2$ ) и построить такую позиционную стратегию  $u(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2): [t_0, T] \times R^3 \times R^3 \rightarrow \{\varphi_i\}$  преследующего объекта  $P$ , которая гарантирует ему при выполнении вышеупомянутых соотношений сближение на минимальное расстояние с убегающим объектом  $E$  в некоторый момент  $t \in [t_0, T]$ . Здесь

$$\{\varphi_i\} = \{\varphi_i \in R_1: |\varphi_i| \leq 1\}$$

**3. Области достижимости  $P$  и  $E$ .** В плоскости  $XOY$  рассмотрим области достижимости объектов  $P$  и  $E$ , соответствующие моменту  $t = T$  ( $T > t_0$ ) и начальным позициям  $\{t_0, x_i^0, y_i^0, z_i^0 = 0\}$  ( $i = 1, 2$ )  $P$  и  $E$  соответственно.

Было показано [4], что областями достижимости  $G^{(1)}(t, T)$  и  $G^{(2)}(t, T)$  объектов  $P$  и  $E$  в задаче (1.2)–(1.5) будут отрезки прямых  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$ , ортогональных векторам  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  соответственно, где

$$\mathbf{n}_i = \{V_i(T-t) \sin \theta_i^0; V_i(T-t) \cos \theta_i^0\}$$

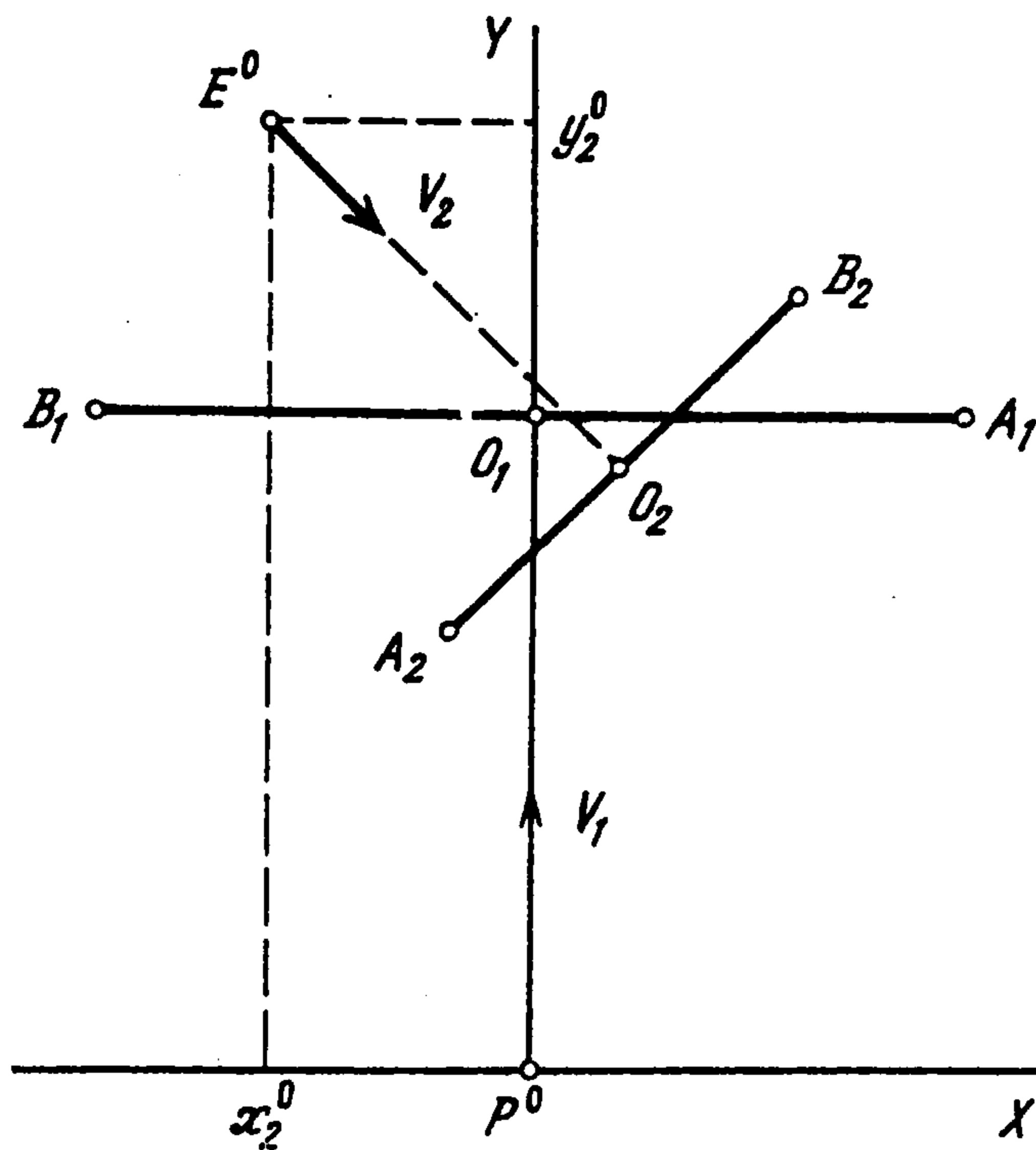
Обозначим

$$r_i(t, T) = |O_iA_i| = |O_iB_i|$$

Интегрируя уравнения (1.3) при  $\varphi_1 = +1$  или  $\varphi_1 = -1$  ( $\varphi_2 = +1$  или  $\varphi_2 = -1$ ) получаем

$$r_i(t, T) = (V_i(T-t))^2 / (2R_i)$$

**4. Вспомогательные построения. Замена системы координат.** С целью упрощения дальнейших рассуждений заменим систему координат, поместив ее начало



Фиг. 2

в точку начального положения объекта  $P$  и направив ось  $OY$  вдоль его вектора скорости, а ось  $OX$  направо от  $V_1$ . Таким образом, позиция объекта  $E$  в новой системе координат будет определяться вектором  $(x_2^*, y_2^*, \theta_2^*)$ , где

$$\theta_2^* = \theta_2^0 - \theta_1^0, \quad x_2^* = \rho \cos \theta_*, \quad y_2^* = \rho \sin \theta_*, \quad \rho = \sqrt{(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2} \quad (4.1)$$

$$\theta_* = \varphi + \theta_1, \quad \varphi = \arctg[(y_2^0 - y_1^0) / (x_2^0 - x_1^0)]$$

В дальнейшем для упрощения изложения опустим звездочки в обозначениях текущей позиции объекта  $E$ , а обозначения управлений объектов  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2$ ) заменим на  $u$  для объекта  $P$  и  $v$  для объекта  $E$  соответственно. Уравнения движения объектов (1.3) в новой системе координат принимают вид

для объекта  $P$

$$\dot{x}_1 = V_1 z_1, \quad \dot{y}_1 = V_1, \quad z_1 = (V_1 / R_1) u, \quad |u| \leq 1 \quad (4.2)$$

для объекта  $E$

$$\dot{x}_2 = V_2 (\sin \theta_2 + z_2 \cos \theta_2), \quad \dot{y}_2 = V_2 (\cos \theta_2 - z_2 \sin \theta_2) \quad (4.3)$$

$$z_2 = (V_2 / R_2) v, \quad |v| \leq 1$$

Выражение для функционала платы (1.4) остается без изменений. Типичное расположение объектов  $P$  и  $E$  и их областей достижимости в некоторый момент  $t = T$ , где  $T > t_0$ , представлено на фиг. 2.

**5. Интегрирование систем уравнений движения объектов  $P$  и  $E$ .** Считая, что управления объектов  $P$  и  $E$  постоянны на промежутке времени  $[t_0, T]$ , можем проинтегрировать системы (4.2) и (4.3). Тогда динамика объекта  $P$  будет описываться уравнениями

$$x_1 = u V_1^2 (T - t_0)^2 / (2R_1), \quad y_1 = V_1 (T - t_0), \quad z_1 = u V_1 (T - t_0) / R_1 \quad (5.1)$$

а объекта  $E$

$$x_2 = x_2^0 + V_2 (T - t_0) \sin \theta_2 + [v V_2^2 (T - t_0)^2 / (2R_2)] \cos \theta_2 \quad (5.2)$$

$$y_2 = y_2^0 + V_2 (T - t_0) \cos \theta_2 - [v V_2^2 (T - t_0)^2 / (2R_2)] \sin \theta_2$$

$$z_2 = v V_2 (T - t_0) / R_2$$

Зафиксируем некоторые произвольные позиции  $\{t_1, x_i^1, y_i^1, z_i^1\}$  ( $i = 1, 2$ ) объектов  $P$  и  $E$  соответственно, где  $x_i^1 = x_i(t_1)$ ,  $y_i^1 = y_i(t_1)$ ,  $z_i^1 = z_i(t_1)$ . Рассмотрим области достижимости  $G^{(1)}(t_1, x_1^1, y_1^1, z_1^1, T)$  и  $G^{(2)}(t_1, x_2^1, y_2^1, z_2^1, T)$ , соответствующие возрастающим значениям  $T > t_1$ . Координаты объектов в момент  $t = T$  при условии, что в момент  $t = t_1$  они находились в положениях  $\{t_1, x_i^1, y_i^1, z_i^1\}$  ( $i = 1, 2$ ) соответственно, будут вычисляться следующим образом:

для объекта  $P$

$$x_1 = x_1^1 + V_1 z_1^1 (T - t_1) + v V_1^2 (T - t_1)^2 / 2R_1, \quad y_1 = y_1^1 + V_1 (T - t_1) \quad (5.3)$$

$$z_1 = z_1^1 + u V_1 (T - t_1) / R_1$$

для объекта  $E$

$$x_2 = x_2^1 + V_2 (T - t_1) (\sin \theta_2 + z_2^1 \cos \theta_2) + [v V_2^2 (T - t_1)^2 / (2R_2)] \cos \theta_2$$

$$y_2 = y_2^1 + V_2 (T - t_1) (\cos \theta_2 - z_2^1 \sin \theta_2) - [v V_2^2 (T - t_1)^2 / (2R_2)] \sin \theta_2 \quad (5.4)$$

$$z_2 = z_2^1 + v V_2 (T - t_1) / R_2$$

**6. Условия покрытия области достижимости объекта  $E$  областью достижимости объекта  $P$ .** Введем понятие покрытия. Полагаем, что в некоторый момент  $t = t_1$  ( $t_0 \leq t_1$ ) объекты  $P$  и  $E$  находятся в позициях  $\{t_1, x_1^1, y_1^1, z_1^1\}$  и  $\{t_1, x_2^1, y_2^1, z_2^1\}$  соответственно. Рассмотрим области достижимости  $P$  и  $E$ . Предполагаем, что существуют такие моменты  $T_1 > t_1$  и  $T_2 > T_1$ , в которые соответствующие области достижимости  $P$  и  $E$  имеют общие точки. Пусть в момент  $t = T_1$  ( $T_1 > t_1$ ) координаты одной из крайних точек области достижимости объекта  $E$  совпадают с координатами какой-либо из крайних точек области достижимости  $P$ , а в момент  $t = T_2$  ( $T_2 > T_1$ ) на область достижимости объекта  $P$  попадает другая крайняя точка области достижимости объекта  $E$ . Такое расположение областей достижимости объектов  $P$  и  $E$  в моменты  $t = T_1$  и  $t = T_2$  будем называть покрытием области достижимости объекта  $E$  областью достижимости объекта  $P$ . Условия связывающие параметры объектов  $P$  и  $E$ , для областей достижимости которых реализуется ситуация покрытия, будем называть условиями покрытия (УП).

**7. Условия покрытия для различных значений угла  $\theta_2$ .** В зависимости от величины угла  $\theta_2$  ( $0 \leq \theta_2 \leq 2\pi$ ), рассмотрим четыре возможных случая игры (4.2), (4.3), (1.4) и для каждого из них найдем УП.

Будем полагать, что выполняются следующие два неравенства

$$V_1 > V_2 (\cos \theta_2^0 - z_2^1 \sin \theta_2^0) \quad (7.1)$$

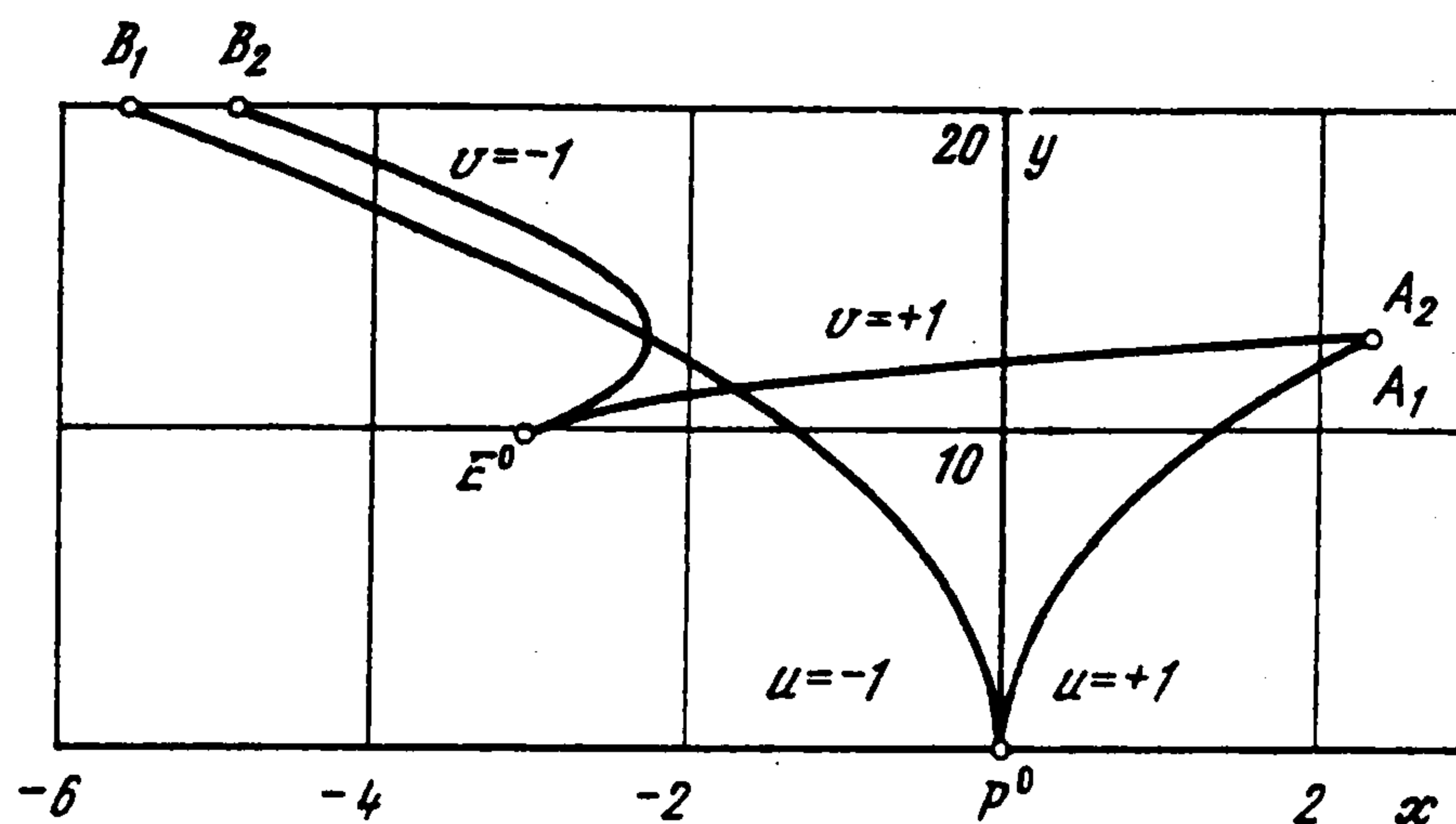
$$[V_1 + V_2 (z_2^1 \sin \theta_2^0 - \cos \theta_2^0)]^2 \geq 2[V_2^2 (y_2^1 - y_1^1) / (2R_2)] \sin \theta_2^0 \quad (7.2)$$

**7.1. Первый случай** имеет место при  $0 < \theta_2^0 \leq \pi/2$  (фиг. 3).

Моменты попадания крайних точек области достижимости объекта  $E$  на прямые  $y = y_1(T)$  вычисляются как корни квадратного уравнения

$$va(T - t_1)^2 + b(T - t_1) - c = 0 \quad (7.3)$$

$$(a = [V_2^2 / (2R_2)] \sin \theta_2^0, \quad b = V_1 + V_2 (z_2^1 \sin \theta_2^0 - \cos \theta_2^0), \quad c = y_2^1 - y_1^1 \text{ и } a \geq 0, \quad c > 0)$$



Фиг. 3

и имеют вид

$$T_1 = t_1 + (-b + \Delta_+)/ (2a) \quad (v = +1), \quad T_2 = t_1 + (b - \Delta_-)/ (2a) < T_1 \quad (v = -1) \quad (7.4)$$

$$(\Delta_{\pm} = \sqrt{b^2 \pm 4ac})$$

Можно показать, что выполнение условий (7.1), (7.2) гарантирует существование моментов времени  $T = T_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Для реализации ситуации покрытия достаточно выполнения следующих двух условий:

$$x_1(T_1) = x_2(T_1), \quad x_1(T_2) \leq x_2(T_2)$$

которые можно записать в виде

$$a_1(T_1 - t_1)^2 + b_1(T_1 - t_1) + c_1 = 0 \quad (7.5)$$

$$-a_1(T_2 - t_1)^2 + b_1(T_2 - t_1) + c_1 \geq 0 \quad (7.6)$$

Здесь

$$a_1 = [V_2^2 / (2R_2)] \cos \theta_2^0 - V_1^2 / (2R_1)$$

$$b_1 = V_2 (\sin \theta_2^0 + z_2^1 \cos \theta_2^0) - V_1 z_1^1, \quad c_1 = x_2^1 - x_1^1$$

Выразив  $c_1$  из уравнения (7.5), подставим его в неравенство (7.6) вместе с найденными выше значениями  $T_1$  и  $T_2$ . Учитывая, что  $b > 0$ , получим  $-a_1 b + b_1 a \geq 0$ . Подставляя значения переменных  $a$ ,  $b$ ,  $a_1$  и  $b_1$ , полагая, что

$$z_1^1 = (V_1 / R_1)(t_1 - t_0)u, \quad z_2^1 = (V_2 / R_2)(t_1 - t_0)v$$

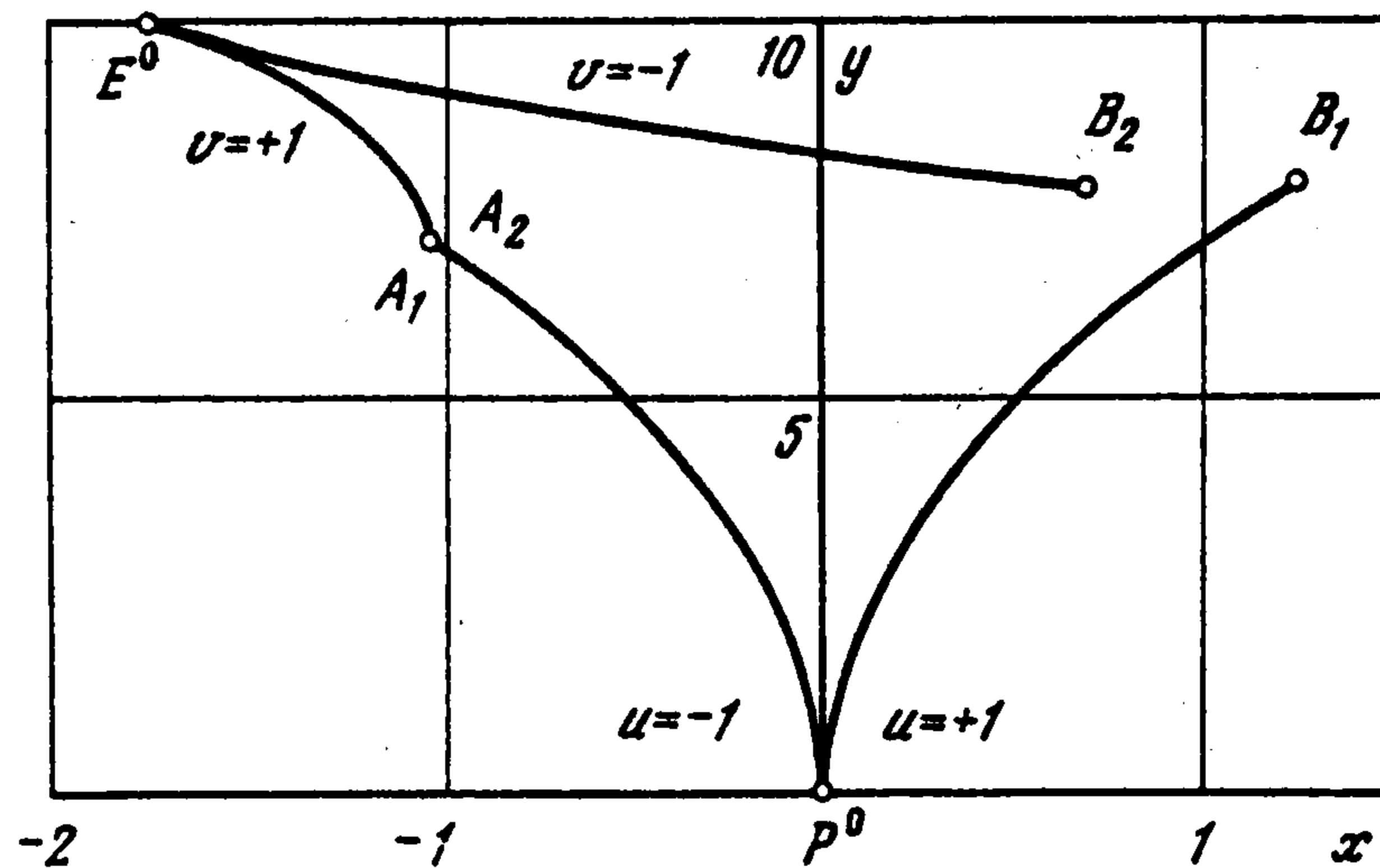
и учитывая, что для достижения точек  $A_1(T_1)$ ,  $A_2(T_1)$  объекты  $P$  и  $E$  используют управления  $u = +1$  и  $v = +1$  соответственно, а для достижения точек  $B_1(T_2)$ ,  $B_2(T_2)$ , — управления  $u = -1$  и  $v = -1$  соответственно, запишем неравенство (7.6), связывающее параметры игроков  $P$  и  $E$ , в виде

$$[V_1^2 / (2R_1)](V_1 - V_2 \cos \theta_2^0) - [V_2^2 / (2R_2)](V_1 \cos \theta_2^0 - V_2) \geq 0 \quad (7.7)$$

Очевидно, что это неравенство не зависит от положений объектов  $P$  и  $E$  в момент  $t = t_1$ . Отсюда следует, что в дальнейшем для определения условий типа (7.7) достаточно рассматривать начальные позиции  $P$  и  $E$ , т.е. считать  $t_1 = t_0$ . Тогда введенные обозначения будут иметь вид

$$a = [V_2^2 / (2R_2)] \sin \theta_2^0, \quad b = V_1 - V_2 \cos \theta_2^0, \quad c = y_2^0 \quad (a \geq 0, \quad c > 0)$$

$$a_1 = [V_2^2 / (2R_2)] \cos \theta_2^0 - V_1^2 / (2R_1), \quad b_1 = V_2 \sin \theta_2^0, \quad c_1 = x_2^0$$



Фиг. 4

Запишем достаточные условия (7.1), (7.2) для существования моментов  $T_1$  и  $T_2$  при  $t = t_0$  в новых обозначениях

$$V_1 \geq V_2 \cos \theta_2 \quad (7.8)$$

$$V_1 \geq V_2 (\cos \theta_2 + \sqrt{2y_2^0 \sin \theta_2 / R_2})$$

Таким образом, совокупность неравенств (7.7), (7.8) и выражения (7.5) будут давать достаточные условия, которые были названы условиями покрытия (УП).

Заметим, что для различных значений угла  $\theta_2$  одинаково вычисляются значения величин  $b$ ,  $c$  и  $b_1$ ,  $c_1$ . Кроме того, равенство (7.5) и неравенства (7.8) являются общими для всех остальных случаев различных значений угла  $\theta_2$ . Поэтому задача состоит в том, чтобы для этих случаев определить вид неравенств типа (7.7).

7.2. Второй случай имеет место при  $\pi/2 \leq \theta_2^0 < \pi$  (фиг. 4).

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, из квадратного уравнения вида (7.3), где  $a > 0$ ,  $b > 0$  и  $c > 0$ , находим моменты попадания крайних точек области достижимости  $E$  на прямые  $y = y_1(T_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Здесь  $T = T_1$  вычисляется при движении объекта  $E$  с управлением  $u = +1$ , а  $t = T_2$  при движении  $E$  с управлением  $u = -1$ . Значение  $a$  определяется так же, как и в первом случае, в то же время

$$a_1 = [V_2^2 / (2R_2)] \cos \theta_2^0 + [V_1^2 / (2R_1)]$$

Неравенство для  $x$ -координат объектов из УП в данном случае выглядит так

$$x_1(T_2) \geq x_2(T_2) \quad (7.9)$$

Проводя выкладки аналогичные предыдущему случаю, получаем (7.9) в виде

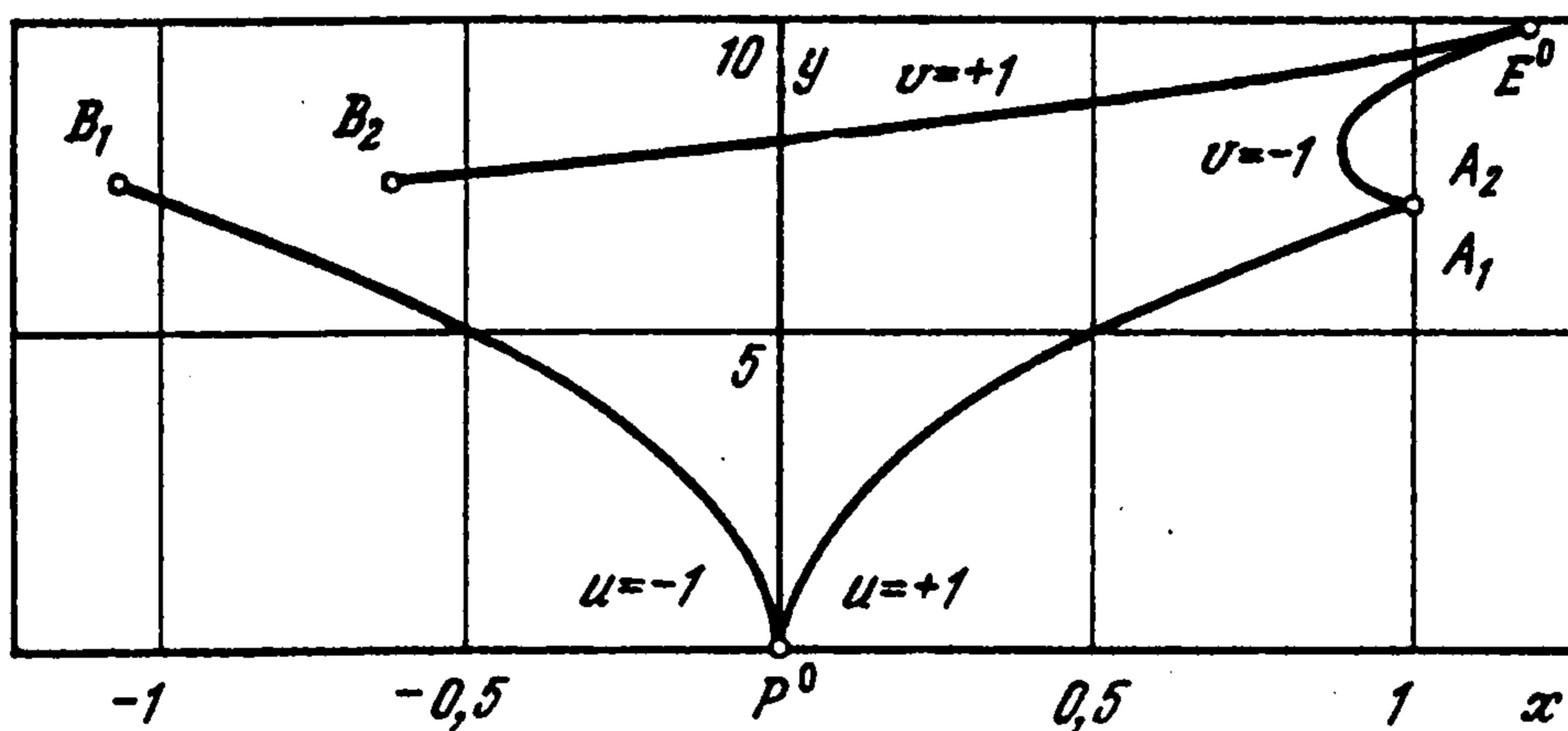
$$-a_1 b + b_1 a \leq 0$$

Учитывая, что для достижения точек  $A_1(T_1)$ ,  $A_2(T_1)$  объекты  $P$  и  $E$  используют управления  $u = -1$  и  $u = +1$  соответственно, а для достижения точек  $B_1(T_2)$ ,  $B_2(T_2)$  — управления  $u = +1$  и  $u = -1$  соответственно, получаем следующий вид неравенства (7.9) из достаточных УП:

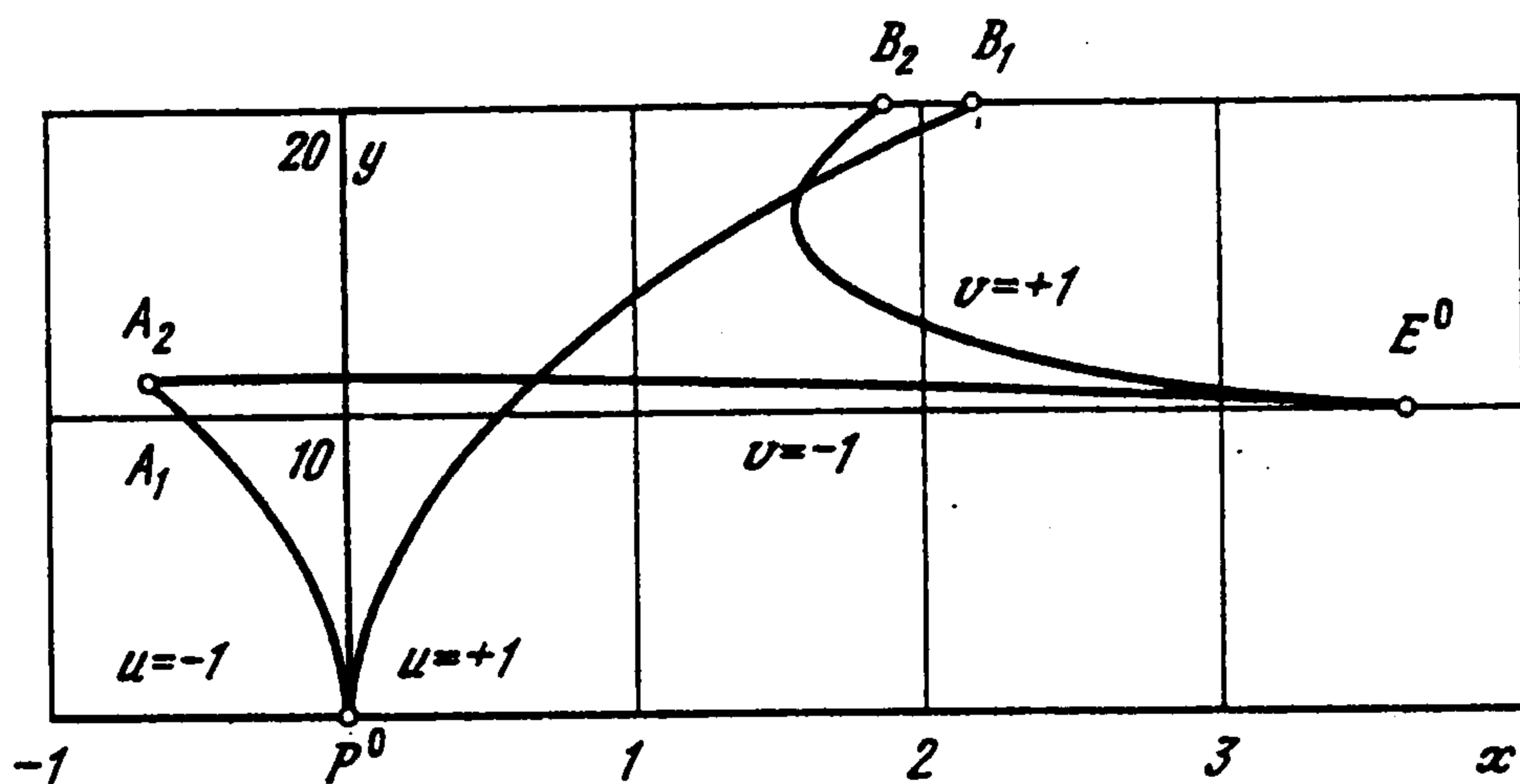
$$[V_1^2 / (2R_1)](V_2 \cos \theta_2^0 - V_1) + [V_1 / (2R_2)](V_2 - V_1 \cos \theta_2^0) \leq 0 \quad (7.10)$$

7.3. Третий случай имеет место при  $\pi < \theta_2^0 \leq 3\pi/2$  (фиг. 5).

Все рассуждения проводятся аналогично предыдущим пунктам при учете того,



Фиг.5



Фиг.6

что

$$a = -[V_2^2 / (2R_2)] \sin \theta_2^0, \quad a_1 = -[V_2^2 / (2R_2)] \cos \theta_2^0 - V_1^2 / (2R_1)$$

Моменты  $T = T_1$  и  $T = T_2$  попадания крайних точек области достижимости  $E$  на прямые  $y = y_1(T_i)$  ( $i = 1, 2$ ) находятся из квадратного уравнения, отличающегося от (7.3) заменой  $v$  на  $-v$ .

Неравенство для  $x$ -координат объектов  $P$  и  $E$  из достаточных УП выглядит аналогично условию (7.6). Зная, что для достижения точек  $A_1(T_1)$ ,  $A_2(T_1)$  объекты  $P$  и  $E$  используют управления  $u = +1$  и  $v = -1$  соответственно, а для достижения точек  $B_1(T_2)$ ,  $B_2(T_2)$  – управления  $u = -1$  и  $v = +1$  соответственно, получаем условие, связывающее параметры объектов, полностью совпадающее с (7.10).

7.4. Четвертый случай имеет место при  $3\pi/2 < \theta_2^0 < 2\pi$  (фиг. 6).

Моменты  $t = T_1$  и  $t = T_2$  попадания крайних точек области достижимости  $E$  на прямые  $y = y_1(T_i)$  ( $i = 1, 2$ ) находятся из квадратного уравнения вида (7.3) при замене  $v$  на  $-v$ .

Для того чтобы объект  $P$  покрывал своей областью достижимости область достижимости объекта  $E$  в моменты  $t = T_1$  и  $t = T_2$  достаточно, чтобы вместе с условиями (7.5), (7.8), выполнялось условие, аналогичное условию (7.6), где

$$a_1 = -[V_2^2 / (2R_2)] \cos \theta_2^0 + V_1^2 / (2R_1)$$

Учитывая, что для достижения точек  $A_1(T_1)$ ,  $A_2(T_1)$  объекты  $P$  и  $E$  используют управления  $u = -1$  и  $v = -1$  соответственно, а для достижения точек  $B_1(T_2)$ ,  $B_2(T_2)$  – управления  $u = +1$  и  $v = +1$  соответственно, получаем неравенство для

$x$ -координат объектов из УП, связывающее параметры игроков, совпадающее с условием (7.7).

*Замечание 1°.* В случаях, когда  $\theta_2 = 0$  и  $\theta_2 = \pi$  мы имеем равенство  $T_1 = T_2$ . Это означает, что задача (4.2), (4.3), (1.4) переходит в игру с фиксированным временем  $T = T_1 = T_2$  и терминальным функционалом. Эта задача была рассмотрена в [4].

**8. Позиционная стратегия объекта  $P$ .** Наложённые условия на параметры игры (4.2), (4.3), (1.4) означают, что невозможно одновременное выполнение следующих пар неравенств:

$$x_1(T_1) < x_2(T_1) \text{ и } x_1(T_2) > x_2(T_2) \text{ для } 0 \leq \theta_2 < \pi/2 \text{ и } \pi \leq \theta_2 \leq 3\pi/2 \quad (8.1)$$

$$x_1(T_1) > x_2(T_1) \text{ и } x_1(T_2) < x_2(T_2) \text{ для } \pi/2 \leq \theta_2 < \pi \text{ и } 3\pi/2 < \theta_2 < 2\pi \quad (8.2)$$

Позиции игры (4.2), (4.3), (1.4), для которых справедливо (в зависимости от значения угла  $\theta_2$ ) одно из неравенств (7.7), (7.10) назовем регулярными. Позиции игры (4.2), (4.3), (1.4), для которых одновременно выполняются равенства

$$x_1(T_1) = x_2(T_1) \text{ и } x_1(T_2) = x_2(T_2) \quad (8.3)$$

принадлежат сингулярному множеству  $S$ . Подобные позиции в рассматриваемой игре могут возникнуть, например, в случае, если для заданных параметров объектов вместо неравенств (7.7), (7.10) имеют место соответствующие равенства.

Таким образом, для перечисленных позиций игры (4.2), (4.3), (1.4) стратегия объекта  $P$  имеет вид

$$u(t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \begin{cases} \text{sign}([x_2(T_2) - x_1(T_2)] + [x_2(T_1) - x_1(T_1)]), \\ \text{если выполнено одно из неравенств (8.1),} \\ (8.2); [-1, +1], \text{ если все неравенства (8.1),} \\ (8.2) \text{ не выполняются или имеет место (8.3)} \end{cases} \quad (8.4)$$

Предположим, что объект  $E$  на отрезке времени  $t_0 \leq t \leq T$  использует одно из своих крайних управлений ( $v = -1$  или  $v = +1$ ). Очевидно, что в этих случаях стратегия  $u$  объекта  $P$  обеспечит точечную поимку объекта  $T$  в момент  $t = T_1$  либо  $t = T_2$ , т.е. в эти моменты произойдет совпадение координат объектов. Можно показать, что если объект  $E$  будет выбирать на отрезке времени  $t_0 \leq t \leq T_2$  некоторое произвольное управление, удовлетворяющее ограничению  $|v| \leq 1$ , то поимка произойдет в некоторый момент  $T$ , где  $T_1 \leq T \leq T_2$ . Для этих случаев функционал платы (1.4) преобразуется к виду функционала точечной встречи вида

$$\gamma = \{[x_2(t) - x_1(t)]^2 + [y_2(t) - y_1(t)]^2\}^{1/2} = 0$$

В случае, если при  $t = t_0$  позиция игры принадлежит  $S$ , можно показать, что стратегия  $u$  объекта  $P$  обеспечивает ему сближение с объектом  $E$  с точностью до сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$ .

**9. Функция гипотетического рассогласования.** Рассмотрим случай, когда не выполняется неравенство (7.7) или (7.10) из УП (в зависимости от значения  $\theta_2$ ). Зафиксируем произвольные положения  $\{t, x_i, y_i, z_i\}$  объектов  $P$  и  $E$ , где  $t > t_0$ , и рассмотрим области их достижимости  $G^{(1)}(t, T)$  и  $G^{(2)}(t, T)$ , в моменты  $T = T_i$  ( $i = 1, 2$ ), когда крайние точки этих областей лежат на одной прямой  $y = y_1(T_i)$

( $i = 1, 2$ ). Обозначим

$$\varepsilon_i(t) = |x_2(T_i) - x_1(T_i)| \quad (9.1)$$

Функция гипотетического рассогласования  $\varepsilon(t)$  в данной задаче будет определяться выражением

$$\varepsilon(t) = \max[\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t)] \quad (9.2)$$

Позиции рассматриваемой игры (4.2), (4.3), (1.4), для которых максимум в выражении (9.2) достигается на одной из функций  $\varepsilon_i(t)$ , принадлежат регулярной области игры. Позиции игры, для которых справедливо равенство  $\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = 0$ , принадлежат сингулярному множеству  $S$ .

**10. Цена игры.** Можно показать, что для любых позиций рассматриваемой игры (4.2), (4.3), (1.4) при произвольном значении угла  $\theta_2$  в случаях выполнения и невыполнения неравенств (7.7) или (7.10) из УП функция  $\varepsilon(t)$  будет  $u$ -стабильной [2]. Для этого достаточно непосредственно использовать определение  $u$ -стабильности.

Из  $u$ -стабильности функции  $\varepsilon(t)$  следует, что она является функцией цены рассматриваемой игры (4.2), (4.3), (1.4). Из последнего утверждения и того факта, что стратегия (8.4) гарантирует игроку  $P$  результат

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(t_0) \geq \varepsilon(t) \quad \text{для } t > t_0 \quad (10.1)$$

в регулярном случае игры и тот же результат (с точностью до сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$ ) для начальных позиций принадлежащих сингулярному множеству  $S$ , следует, что (8.4) – оптимальная стратегия преследователя.

**11. Построение множества позиций  $Q$  объекта  $E$ , из которых он не может избежать сближения с объектом  $P$ , при фиксированных значениях параметров обоих объектов.** Пусть заданы значения параметров  $V_1, R_1$  и  $V_2, R_2$ ,  $\theta_2 = \theta_2^0$  ( $0 \leq \theta_2^0 \leq 2\pi$ ) объектов  $P$  и  $E$  соответственно, а также начальная позиция  $P$ , совпадающая с началом координат. Полагаем, что реализуется ситуация покрытия, и следовательно для заданных значений параметров объектов выполняются УП. Фиксируем некоторое произвольное значение  $t = T_1$ .

Требуется определить позицию  $E^0(x_2^0, y_2^0)$  объекта  $E$  в момент  $t_0 = 0$ , принадлежащую множеству позиций  $Q$ , из которых объект  $E$  не может избежать сближения с  $P$ .

Обозначим

$$y_2^* = R(V_1 - V_2 \cos \theta_2^0)^2 / (2V_2 \sin \theta_2^0)$$

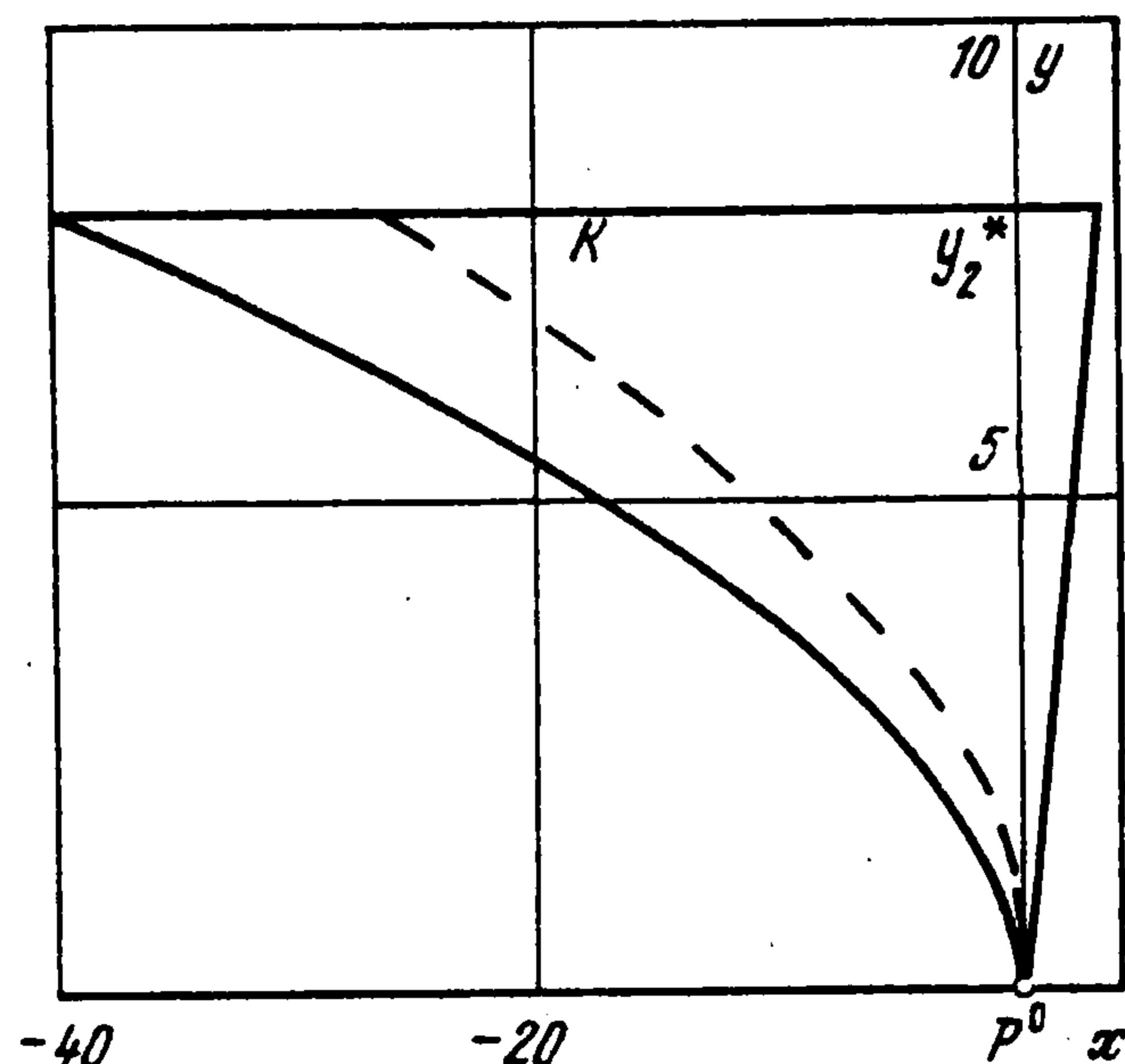
Согласно (7.8) полагаем, что начальная координата  $y_2 = y_2^0$  объекта  $E$  удовлетворяет неравенству

$$y_2^0 \leq y_2^* \quad (11.1)$$

Как показано выше, областями достижимости объектов  $P$  и  $E$  к моменту  $t = T_1$  являются отрезки прямых  $A_i B_i$  ортогональные векторам  $\mathbf{p}_i = \mathbf{V}_i T_1$  ( $i = 1, 2$ ) соответственно. Координаты точек  $A_i$  и  $B_i$  ( $i = 1, 2$ ) вычисляются согласно (5.1) и (5.2).

Согласно ситуации покрытия при  $t = T_1$  координаты крайних точек областей достижимости объектов  $P$  и  $E$  совпадают

$$x_1(T_1) = x_2(T_1), \quad y_1(T_1) = y_2(T_1) \quad (11.2)$$



Фиг.7

Используя УП, найдем  $E(x_2^0, y_2^0)$  в момент  $t_0 = 0$ . Для этого строим сначала область достижимости объекта  $E$ , соответствующую  $t = T_1$  и представляющую собой отрезок прямой, проходящей через общую точку областей достижимости  $P$  и  $E$ . Затем из середины полученного отрезка, точки  $O_2$ , проводим серединный перпендикуляр и откладываем (в сторону, противоположную  $p_2$ ) отрезок  $O_2E$ , равный  $V_2T_1$ . Координаты полученной точки  $E$  будут искомыми координатами  $(x_2^0, y_2^0)$ .

Меняя затем параметр  $T_1$  от  $T_1 = 0$  до  $T_1 = T^*$ , где  $T^*$  – предельное значение, соответствующее  $y_2 = y_2^*$ , построим кривую, представляющую собой множество  $Q$  начальных позиций объекта  $E$ , из которых он не может избежать сближения с объектом  $P$  при указанных выше значениях параметров обоих объектов. Кривая  $Q$  отмечена штрихами на фиг. 7. Видно, что построенная таким образом кривая  $Q$  описывается уравнениями (5.2), где  $x_2 = x_2(T_1)$ ,  $y_2 = y_2(T_1)$  (учитывается соотношение (11.2)).

**12. Построение области начальных положений объекта  $E$ , из которой он не может избежать поимки объектом  $P$ , при фиксированных параметрах объекта  $E$ .** Для заданных параметров объекта  $E$  (скорости  $V_2$ , радиуса кривизны траектории  $R_2$  и угла наклона  $\theta_2$  вектора скорости  $V_2$  к оси  $OY$ ) и начальной координаты  $y_2^0$ , удовлетворяющей ограничению (11.1), используя УП, найдем соответствующие параметры объекта  $P$ . Из неравенств (7.8), (7.13) задаем значение скорости  $V_1$ . В зависимости от величины угла  $\theta_2$  из неравенств (7.7) или (7.10) определяем максимально возможное значение радиуса кривизны траектории  $R_1$ . Для максимального и минимального значения  $R_1$  находим соответствующие моменты  $T_1$ , для которых выполняется равенство (7.5), что в свою очередь позволяет определить соответствующие начальные  $x$ -координаты объекта  $E$ .

Перебирая все возможные значения начальной  $y$ -координаты объекта  $E$ , удовлетворяющие условию (11.1), определяем для каждой из них по указанному выше алгоритму соответствующую пару значений начальной  $x$ -координаты –  $x_2^0$ . В результате для заданных параметров объекта  $E(V_2, R_2, \theta_2)$ , скорости  $V_1$  объекта  $P$  и двух граничных значений его радиуса кривизны  $(R^{\min}, R^{\max})$  получаем две кривые, которые являются границами области начальных положений  $E$ .

Для начальных позиций  $E$ , лежащих между полученными кривыми, при фиксированных значениях параметров объекта  $E$  и найденных из УП значений параметров объекта  $P$  игра сближения–уклонения оканчивается поимкой  $E$  (точечной либо  $\varepsilon$ -встречей). Одна из таких областей для значения угла из промежутка  $270^\circ < \theta_2 < 360^\circ$  и параметров игроков  $P$  и  $E$ , удовлетворяющих УП, построена на фиг. 7. Эта область начальных положений обозначена через  $K$  и представляет собой криволинейный треугольник на плоскости. Заметим, что полученная область  $K$  состоит из кривых  $Q$ , построенных в разд. 11.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. N.Y. etc.: Springer, 1987. 515 p.
3. Olsder G.J., Breakwell J.V. Role determination in an aerial dogfight. // Intern. J. Game Theory. 1974. V. 3. № 1. P. 47–66.
4. Пашков А.Г. О сравнении решений линейных и нелинейных позиционных дифференциальных игр сближения // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 551–560.
5. Cockayne E. Plane pursuit with curvature constraints // SIAM Journal Appl. Math. 1967. V. 15. № 6. P. 1511–1516.
6. Greenfeld I. A differential game of surveillance evasion of two identical cars // Journal Optimiz. Theory and Appl. 1987. V. 52. № 1. P. 53–81.
7. Borowko P., Rzymowski W. On the game of two cars // Journal Optimiz. Theory and Appl. 1984. V. 44. № 3. P. 381–396.
8. Marec J.P., Nguyen Van Nhan. Two-dimensional pursuit evasion game with penalty on turning rates // Journal Optimiz. Theory and Appl. 1984. V. 44. № 3. P. 381–396.

Москва

Поступила в редакцию  
3.VI.1992