ЛИТЕРАТУРА

1. *Пекуровский Л.Е., Поручиков В.Б., Созоненко Ю.А.* Взаимодействие акустических волн с телами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 103 с.
2. *Пекуровский Л.Е., Поручиков В.Б., Созоненко Ю.А.* Взаимодействие акустических волн с телами, покрытыми тонким сжимаемым слоем. // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 823–831.
3. *Пекуровский Л.Е., Поручиков В.Б., Созоненко Ю.А.* Давление на сфере с амортизирующим покрытием при падении на нее плоской акустической волны. // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 829–835.
4. *Пекуровский Л.Е., Поручиков В.Б.* Взаимодействие акустической волны с упругой сферической оболочкой, покрытой тонким сжимаемым слоем. // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 169–175.
5. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.VIII.1992

УДК 533.6.011.8

© 1993 г. М.Ш. Шавалиев

СУПЕРБАРНЕТТОВСКИЕ ПОПРАВКИ К ТЕНЗОРУ НАПРЯЖЕНИЙ И ТЕПЛОВОМУ ПОТОКУ В ГАЗЕ ИЗ МАКСВЕЛЛОВСКИХ МОЛЕКУЛ

Получены выражения для супербарнеттовских поправок к тензору напряжений и тепловому потоку в газе из максвелловских молекул для двух частных случаев: одномерные течения и трехмерные, но слабовозмущенные течения.

Метод Чепмена – Энскога решения уравнения Больцмана приводит к последовательности гидродинамических уравнений [1]. В нулевом (по числу Кнудсена) приближении получаются уравнения Эйлера, в первом приближении – уравнения Навье – Стокса, во втором — уравнения Барнетта. Следующее приближение принято называть супербарнеттовским. Вклад каждого приближения в гидродинамические уравнения сводится к соответствующим добавкам в тензор напряжений и тепловой поток

$$p_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} + p^{(1)}_{\alpha\beta} + p^{(2)}_{\alpha\beta} + p^{(3)}_{\alpha\beta} + \ldots$$

$$\mathbf{q} = 0 + \mathbf{q}^{(1)} + \mathbf{q}^{(2)} + \mathbf{q}^{(3)} + \ldots$$

Здесь p – давление, $p^{(1)}_{\alpha\beta}$ и $\mathbf{q}^{(1)}$ – законы Навье – Стокса и Фурье [1], $p^{(2)}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{q}^{(2)}$ и $p^{(3)}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{q}^{(3)}$ – барнеттовские [1] и супербарнеттовские [2] поправки к тензору напряжений и тепловому потоку.

В последние годы уравнения барнеттовского и супербарнеттовского приближений были использованы для решения ряда газодинамических задач. В частности, решены в одномерной постановке задача о распространении звуковых колебаний в простых газах [3] и смесях газов [4][1] и задача о структуре ударной волны [5, 6][2]. Был сделан

---

[1] См. также: *Шавалиев М.Ш.* Явления переноса в газовых смесях в барнеттовском и супербарнеттовском приближениях: Дис. ... канд. физ.-мат.наук. Новосибирск, 1978. 157 с.

[2] См. также: *Simon C.E.* Theory of shock structure in a Maxwell gas based on the Chapman-Enskog development through Super-Super-Burnett order: Ph.D.Thesis. Univ. of Colorado, CO, 1976.

вывод [6] о том, что решения уравнений Барнетта ближе к данным экспериментов и результатам, полученным методом прямого статистического моделирования Монте-Карло, чем решения уравнений Навье – Стокса, в то время как при использовании уравнений супербарнеттовского приближения это согласие ухудшается. Однако последний вывод авторов [6] вызывает сомнение, так как использованные ими выражения для супербарнеттовских поправок к тензору напряжений и тепловому потоку содержат ряд ошибок.

Был дан [2] выдод выражений для супербарнеттовских поправок к тензору напряжений и тепловому потоку для максвелловских молекул. Однако, в них вычисления не доведены до конца, так как в ряде членов зависимость от градиентов газодинамических величин выражена неявно, через эператоры D_0/Dt и $\partial_1/\partial t$ (см. (1), (2)). В настоящей работе эти вычисления завершены в двух частных случаях. Получены в явном виде одномерные выражения и трехмерные, но линеаризованные по градиентам выражения для супербарнеттовских поправок к тензору напряжений и тепловому потоку.

Выражения для супербарнеттовских поправок к тензору напряжений и тепловому потоку имеют вид [2]:

$$p_{\alpha\beta}^{(3)} = -\frac{\mu}{p}\left(\frac{\partial_1}{\partial t}p_{\alpha\beta}^{(1)} + \frac{D_0}{Dt}p_{\alpha\beta}^{(2)} + p_{\alpha\beta}^{(2)}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \right.$$

$$\left. +2\left\langle p_{\alpha\gamma}^{(2)}\frac{\partial u_\beta}{\partial r_\gamma}\right\rangle + \frac{\partial}{\partial r_\gamma}P_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} + \frac{4}{5}\left\langle\frac{\partial q_\alpha^{(2)}}{\partial r_\beta}\right\rangle\right) \tag{1}$$

$$q_\alpha^{(3)} = -\frac{3\mu}{2p}\left[\frac{\partial_1}{\partial t}q_\alpha^{(1)} + \frac{D_0}{Dt}q_\alpha^{(2)} + \frac{10}{3}q_\alpha^{(2)}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \right.$$

$$+q_\beta^{(2)}\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} + \frac{4}{5}e_{\alpha\beta}q_\beta^{(2)} + \frac{5p}{2\rho}\frac{\partial}{\partial r_\beta}p_{\beta\alpha}^{(2)} - \frac{1}{\rho}p_{\alpha\beta}^{(1)}\frac{\partial}{\partial r_\gamma}p_{\gamma\beta}^{(1)} - \tag{2}$$

$$\left. -\frac{1}{\rho}p_{\alpha\beta}^{(2)}\frac{\partial p}{\partial r_\beta} + P_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}e_{\gamma\beta} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left(P_{2|\alpha\beta}^{(2)} + \frac{1}{3}P_{4|}^{(2)}\delta_{\alpha\beta}\right)\right]$$

$$R = k/m,\quad p = \rho RT,\quad e_{\alpha\beta} = \left\langle \partial u_\alpha/\partial r_\beta\right\rangle$$

$$P_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} = \frac{4\mu^2}{\rho}\left[\left\langle\frac{\partial}{\partial r_\alpha}e_{\beta\gamma}\right\rangle + \left(\frac{5}{2} + \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)\frac{1}{T}\left\langle e_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial r_\gamma}\right\rangle - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{p}\left\langle e_{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial r_\gamma}\right\rangle\right],\quad P_{4|}^{(2)} = \frac{p\mu^2}{\rho^2}\left[20\frac{\rho}{p}e_{\alpha\beta}e_{\beta\alpha} + \frac{45}{T}\nabla^2 T - \right.$$

$$\left. -\frac{4}{5pT}\frac{\partial T}{\partial r_a}\frac{\partial p}{\partial r_a} + \frac{45}{T^2}\left(\frac{7}{2} + \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right)(\nabla T)^2\right]$$

Здесь ρ, T, u – плотность, температура и макроскопическая скорость газа, μ – коэффициент вязкости, k – постоянная Больцмана, $P_{4|\alpha\beta}^{(2)}$ получается умножением $p_{\alpha\beta}^{(2)}$ [1] на p/ρ и заменой коэффициентов $\overline{\omega}_i$ на ε_i, где [2]

$$\varepsilon_1 = \frac{28}{3}\left(\frac{7}{2} - \frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right),\quad \varepsilon_2 = 14,\quad \varepsilon_3 = 39$$

$$\varepsilon_4=-18,\quad \varepsilon_5=39\left(\frac{12}{13}+\frac{T}{\mu}\frac{d\mu}{dT}\right),\quad \varepsilon_6=\frac{472}{7}$$

Угловые скобки означают, что соответствующий тензор полностью симметризован и след его по любой паре индексов равен нулю, в частности,

$$\left\langle T_{\alpha\beta}\right\rangle \equiv \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta}+T_{\beta\alpha})-\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}T_{\gamma\gamma}$$

$$\left\langle T_{\alpha\beta\gamma}\right\rangle \equiv \frac{1}{6}(T_{\alpha\beta\gamma}+T_{\alpha\gamma\beta}+T_{\beta\alpha\gamma}+T_{\beta\gamma\alpha}+T_{\gamma\alpha\beta}+T_{\gamma\beta\alpha})-\frac{1}{15}[(T_{\alpha\delta\delta}+T_{\delta\alpha\delta}+T_{\delta\delta\alpha})\delta_{\beta\gamma}+$$
$$+(T_{\beta\delta\delta}+T_{\delta\beta\delta}+T_{\delta\delta\beta})\delta_{\alpha\gamma}+(T_{\gamma\delta\delta}+T_{\delta\gamma\delta}+T_{\delta\delta\gamma})\delta_{\alpha\beta}]$$

Всюду по повторяющимся векторным и тензорным индексам проводится суммирование.

Для получения явных выражений для $p_{\alpha\beta}^{(3)}$ и $q_{\alpha}^{(3)}$ необходимо вычислить в (1) и (2) члены с операторами D_0/Dt и $\partial_1/\partial t$. Операторы D_0/Dt и $\partial_1/\partial t$ определены в [1].

Громоздкость и сложность выражений (1) и (2) делает затруднительным использование гидродинамических уравнений супербарнеттовского приближения для решения конкретных задач. Поэтому ниже рассмотрены частные случаи, когда эти выражения можно значительно упростить.

Для слабовозмущенных течений газа в (1) и (2) можно провести линеаризацию по градиентам газодинамических величин. Опуская простые, но громоздкие вычисления, приведем лишь окончательные результаты:

$$p_{\alpha\beta}^{(3)}=\frac{\mu^3}{p\rho}\left(\frac{5}{3}\left\langle\frac{\partial^2 \operatorname{div}\mathbf{u}}{\partial r_\alpha \partial r_\beta}\right\rangle-\frac{4}{3}\nabla^2 e_{\alpha\beta}\right)$$
$$q_{\alpha}^{(3)}=-\frac{\mu^3}{\rho^2}\left[\frac{157}{16T}\nabla^2\left(\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\right)+\frac{5}{8\rho}\nabla^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial r_\alpha}\right)\right] \tag{3}$$

В случае одномерных течений из (1) и (2) получены следующие выражения для супербарнеттовских поправок к тензору напряжений и тепловому потоку (штрих означает частную производную по x):

$$p_{xx}^{(3)}=\frac{\mu^3}{p^2}\left(\frac{47}{3}\frac{R}{\rho}T'\rho'u'-\frac{40}{3}\frac{RT}{\rho^2}\rho'^2u'+\frac{32}{3}\frac{RT}{\rho}\rho''u'-\frac{2}{3}\frac{RT}{\rho}\rho'u''-7\frac{R}{T}T'^2u'-\right.$$
$$\left.-\frac{47}{9}RT'u''-\frac{31}{9}RT''u'+\frac{2}{9}RTu'''+\frac{16}{27}u'^3\right) \tag{4}$$

$$q_{x}^{(3)}=\frac{\mu^3}{p\rho}\left(-\frac{9005}{168}\frac{1}{T}T'u'^2+\frac{271}{21}\frac{1}{\rho}\rho'u'^2+\frac{421}{42}u'u''+\frac{917}{8}\frac{R}{\rho T}\rho'T'^2-\frac{1137}{16}\frac{R}{\rho^2}T'\rho'^2+\right.$$
$$+\frac{397}{16}\frac{R}{\rho}\rho'T''+\frac{701}{16}\frac{R}{\rho}T'\rho''-\frac{813}{16}\frac{R}{T^2}T'^3-\frac{1451}{16}\frac{R}{T}TT''-$$
$$\left.-\frac{157}{16}RT'''-\frac{41}{8}\frac{RT}{\rho^2}\rho'\rho''-\frac{5}{8}\frac{RT}{\rho}\rho'''+\frac{23}{4}\frac{RT}{\rho^3}\rho'^3\right) \tag{5}$$

(штрих означает частную производную по x).

Для справочных целей приведем также выражения для барнеттовских поправок к тензору напряжений и тепловому потоку

$$p_{xx}^{(2)}=\frac{\mu^2}{p}\left(\frac{8}{9}u'^2-\frac{4}{3}\frac{RT}{\rho}+\frac{4}{3}\frac{RT}{\rho^2}\rho'^2-\frac{4}{3}\frac{R}{\rho}\rho'T'+2\frac{R}{T}T'^2+\frac{2}{3}RT''\right)$$

$$q_x^{(2)} = \frac{\mu^2}{\rho}\left(\frac{95}{8}u'T' - \frac{7}{4}u'' - \frac{2}{\rho}u'\rho'\right).$$

Сравнение (4) и (5) с аналогичными выражениями [6] показывает, что численные коэффициенты второго и третьего членов в (4) и первого, второго и третьего членов в (5) отличаются по величине (но не по знаку) от приведенных в [6], а именно 64/9, 40/9 и 8035/336, 166/21, 949/168, соответственно. Кроме того, высказанное авторами [6] предположение, что численный коэффициент при $\rho T'u'$ в $p_{xx}^{(3)}$ приведенный в диссертации (см. сноску[2]) содержит алгебраическую ошибку, не подтверждается. В выражении для барнеттовской поправки к тензору напряжений [6] имеется также ошибка: коэффициент при u'^2 взят равным 40/27. Она возникла из-за того, что в формуле (14) [6] при вычислении вклада $\overline{\omega}_6\langle e_{x\gamma}e_{\gamma x}\rangle = \overline{\omega}_6(e_{x\gamma}e_{\gamma x} - e_{\beta\gamma}e_{\gamma\beta}/3)$ (см. [1]), где в одномерном случае $e_{\beta\gamma} = 0$, $\beta \neq \gamma$, $e_{xx} = \frac{2}{3}u'$ и $e_{yy} = e_{zz} = -\frac{1}{3}u'$ ошибочно принято $e_{yy} = e_{zz} = 0$.

В заключении отметим, что представляется необходимым вернуться к решению задачи о структуре ударной волны с использованием полученных выше выражений для барнеттовских и супербарнеттовских поправок к тензору напряжений и тепловому потоку. Простота и корректность математической постановки этой задачи и возможность сравнения решения с данными экспериментов и результатами расчетов на кинетическом уровне позволят дать ответ на вопрос о существовании самих уравнений барнеттовского и супербарнеттовского приближений.

Замечание, В барнеттовскую поправку к функции распределения [2] входят числа A_2 и A_4. Значения A_1 и A_2 приведены в [1], а в A_3 и A_4 были вычислены: $A_3 = 0{,}5862$, $A_4 = 0{,}5971$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ченмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
2. *Шавалиев М.Ш.* Барнеттовское приближение к функции распределения и супербарнеттовские вклады в тензор напряжений и тепловой поток // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 656–660.
3. *Wang Chang C.S., Uhlenbeck G.E.* On the propagation of sound in monatomic gases // Studies in statistical mechanics. V.5/Eds J.de Boer, G.E. Uhlenbeck. Amsterdam: North-Holland Publ. Co, 1970. P. 43–75.
4. *Foch J.D., Uhlenbeck G.E., Losa M.F.* Theory of sound propagation in mixtures of monatomic gases// Phys. Fluids. 1972. V. 15. No. 7. P. 1224–1232.
5. *Foch J.D.* On higher order hydrodynamic theories of shock structure // The Boltzmann Equation/Eds E.G.D. Cohen, W. Thirring. Vienna: Springer-Verlag, 1973. P. 123–140.
6. *Fisco K.A., Chapman D.R.* Comparision of Burnett, Super-Burnett, and Monte Carlo solutions for hypersonic shock structure // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 16th Intern. Sympos /Eds E.P. Muntz et.al Washington: AIAA, 1989. P. 374–395.

Новосибирск

Поступила в редакцию
1.VII.1991