

ПОВЕРХНОСТНЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ ВБЛИЗИ ТЕЛ, ПОКРЫТЫХ АМОРТИЗИРУЮЩИМ СЛОЕМ

Рассматриваются волны, возникающие у поверхности тел, покрытых тонким сжимаемым слоем, быстро затухающие с удалением от поверхности. Амортизирующий слой моделируется неклассическим граничным условием [1]. Показано, что вблизи тела могут распространяться волны, локализованные внутри некоторого слоя, толщина которого зависит, в частности, от механических свойств покрытия.

1. Поверхностные волны на плоскости. Пусть плоскость $y = 0$ покрыта тонким амортизирующим слоем, а пространство $y > 0$ заполнено идеальной сжимаемой жидкостью. Будем рассматривать акустические волны, распространяющиеся вблизи амортизирующего слоя.

Вне слоя давление в акустической волне подчиняется уравнению

$$\partial^2 p / \partial t^2 = c_0^2 (\partial^2 p / \partial x^2 + \partial^2 p / \partial y^2) \quad (1.1)$$

Граничное условие на теле, моделирующее амортизирующее покрытие, имеет вид [1-4]

$$y = 0, \quad \partial^2 p / \partial t^2 - G \partial p / \partial y = c_*^2 \partial^2 p / \partial x^2, \quad G = \rho_* c_*^2 / (h_0 \rho_0) \quad (1.2)$$

где c_* , c_0 – скорость звука в амортизирующем слое и вне его соответственно, ρ_* , ρ_0 – средние плотности жидкости в амортизирующем слое и вне его, h_0 – средняя толщина слоя. Если $c_* \ll c_0$, то в условии (1.2) правую часть следует положить равной нулю [1].

Постоянная G характеризует сжимаемость амортизирующего слоя. Если ее отождествить с ускорением силы тяжести, то при $c_* \ll c_0$ условие (1.2) совпадает с граничным условием на свободной поверхности жидкости [2, 5]. Естественно ожидать, что решения задачи (1.1), (1.2) будут аналогичны гравитационным волнам на поверхности жидкости. Поэтому будем искать решения, экспоненциально затухающие с удалением от поверхности, т.е. волны вида

$$p = \exp[-i\omega t + i(k_x x + k_y y)], \quad k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 / c_0^2 \quad (1.3)$$

$$k_x > \omega / c_0, \quad k_y^2 = \omega^2 / c_0^2 - k_x^2 = (i\gamma)^2 = -\gamma^2, \quad \gamma \geq 0$$

Везде в дальнейшем зависимость от времени выбирается в виде $\exp(-i\omega t)$.

Граничное условие (1.2) принимает вид

$$y = 0, \quad -\omega^2 + G\gamma = -c_*^2 k_x^2 \quad (1.4)$$

и определяет закон дисперсии поверхностных волн. Видно, что для каждой частоты ω существует поверхностная волна вида (1.3) ($ik_y = -\gamma$), распространяющаяся вдоль стенки, с параметрами k_x , γ , определяемыми равенствами

$$k_x^2 = (2\omega^2 c_*^2 - G\sqrt{4\omega^2 c_*^2 c + G^2} + G^2) / (2c_*^4) \quad (1.5)$$

$$\omega^2 = (\gamma^2 c_*^2 + G\gamma) / c, \quad c = 1 - c_*^2 / c_0^2$$

При $c_* \ll c_0$ имеем $\omega^2 = G\gamma$.

Параметр γ определяет эффективную толщину слоя l , в котором локализована

поверхностная волна $l = 1/\gamma$. Такая волна переносит энергию только вдоль амортизирующего слоя.

Плотность потока энергии можно вычислить по формуле

$$q = (p^*v + pv^*)/2 \quad (1.6)$$

при помощи линеаризованного уравнения Эйлера

$$\partial v / \partial t = -\rho_0^{-1} \text{grad } p$$

Для поверхностных волн вида (1.3) с амплитудой, равной A , получим

$$q = (A^2 k_x (\rho_0 \omega)^{-1} \exp(-2\gamma y), 0)$$

Полный поток энергии через поверхность $x = \text{const}$, переносимый такой волной, равен

$$Q = \int_0^{+\infty} q_x dy = \frac{A^2 k_x}{2\gamma \rho_0 \omega}$$

(Вычисление проведено для полосы этой плоскости, ширина которой равна единице).

В частности, для граничного условия при $c_* \ll c_0$

$$Q = A^2 (\omega^2 + G^2 / c_0^2)^{1/2} / (2\rho_0 \omega^2)$$

2. Собственные моды плоского волновода с амортизирующими стенками. Рассмотрим поверхностные волны, возникающие в плоском волноводе, образованном двумя жесткими стенками $y = h$ и $y = -h$, покрытыми амортизирующим слоем.

Граничные условия (1.2) на стенках имеют вид

$$y = \pm h, \quad -\omega^2 p \pm G \partial p / \partial y = c_*^2 \partial^2 p / \partial x^2 \quad (2.1)$$

Из соображений симметрии ясно, что зависимость от y собственных мод может быть симметричной: $p \equiv \text{ch}(\gamma y)$ и антисимметричной: $p \equiv \text{sh}(\gamma y)$. Для симметричных мод получим

$$k_x^2 = (G \gamma \text{th } \gamma h + \gamma^2 c_0^2) / (c c_0^2), \quad \omega^2 = (G \gamma \text{th } \gamma h + \gamma^2 c_*^2) / c \quad (2.2)$$

Для антисимметричных мод величина $\text{th } \gamma h$ заменяется на $\text{cth } \gamma h$. Видно, что для антисимметричной моды в спектре частот существует запрещенная зона, простирающаяся от $\omega = 0$ до $\omega = \omega^0$, причем пороговая частота определяется по формуле

$$\omega^0 = [G / (c h)]^{1/2}$$

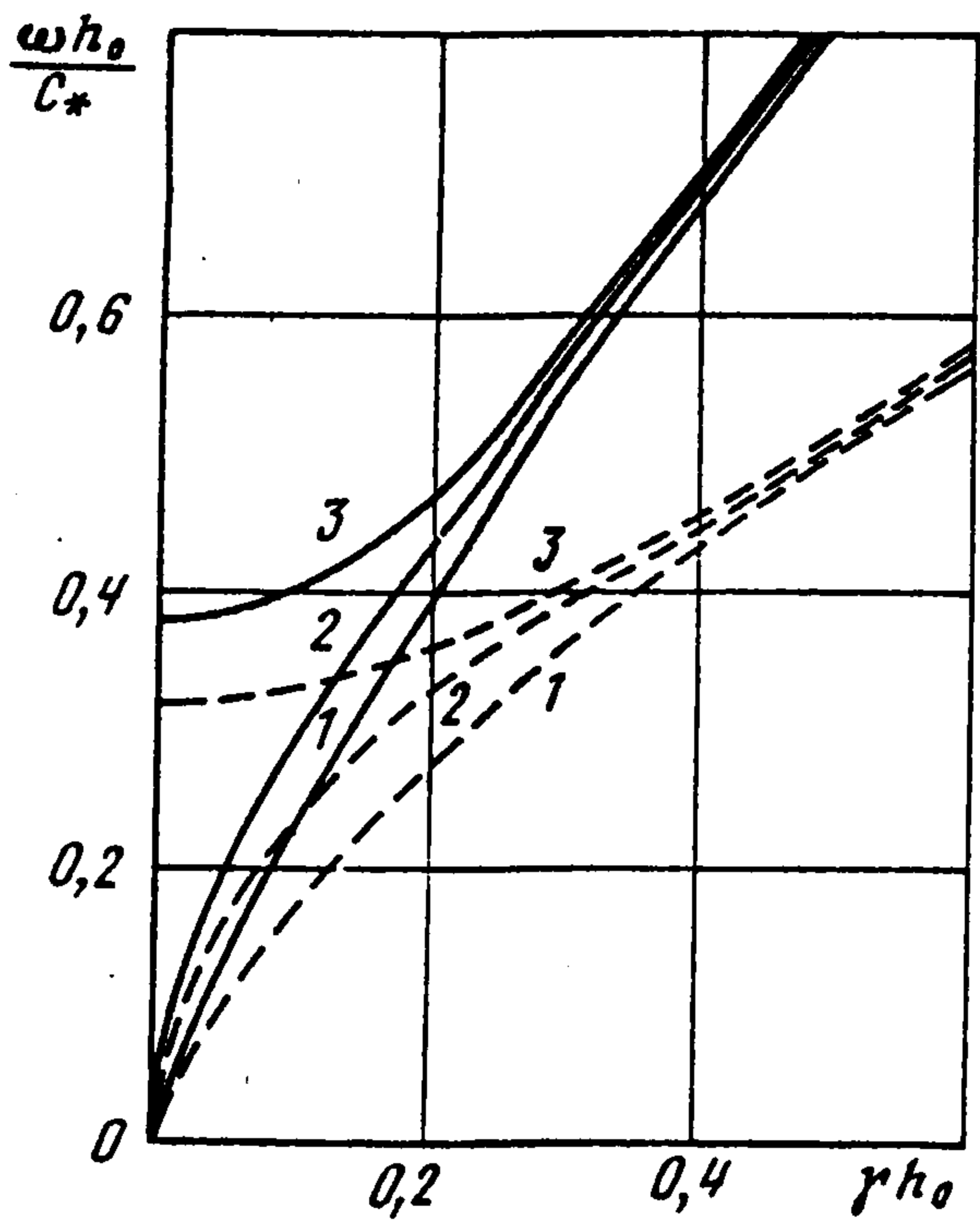
При $c_* \ll c_0$ в полученных выражениях следует пренебречь членами, пропорциональными γ^2 .

Поскольку в найденных модах амплитуда волны быстро (экспоненциально) спадает в направлении от стенок в глубь волновода, эти моды естественно назвать поверхностными.

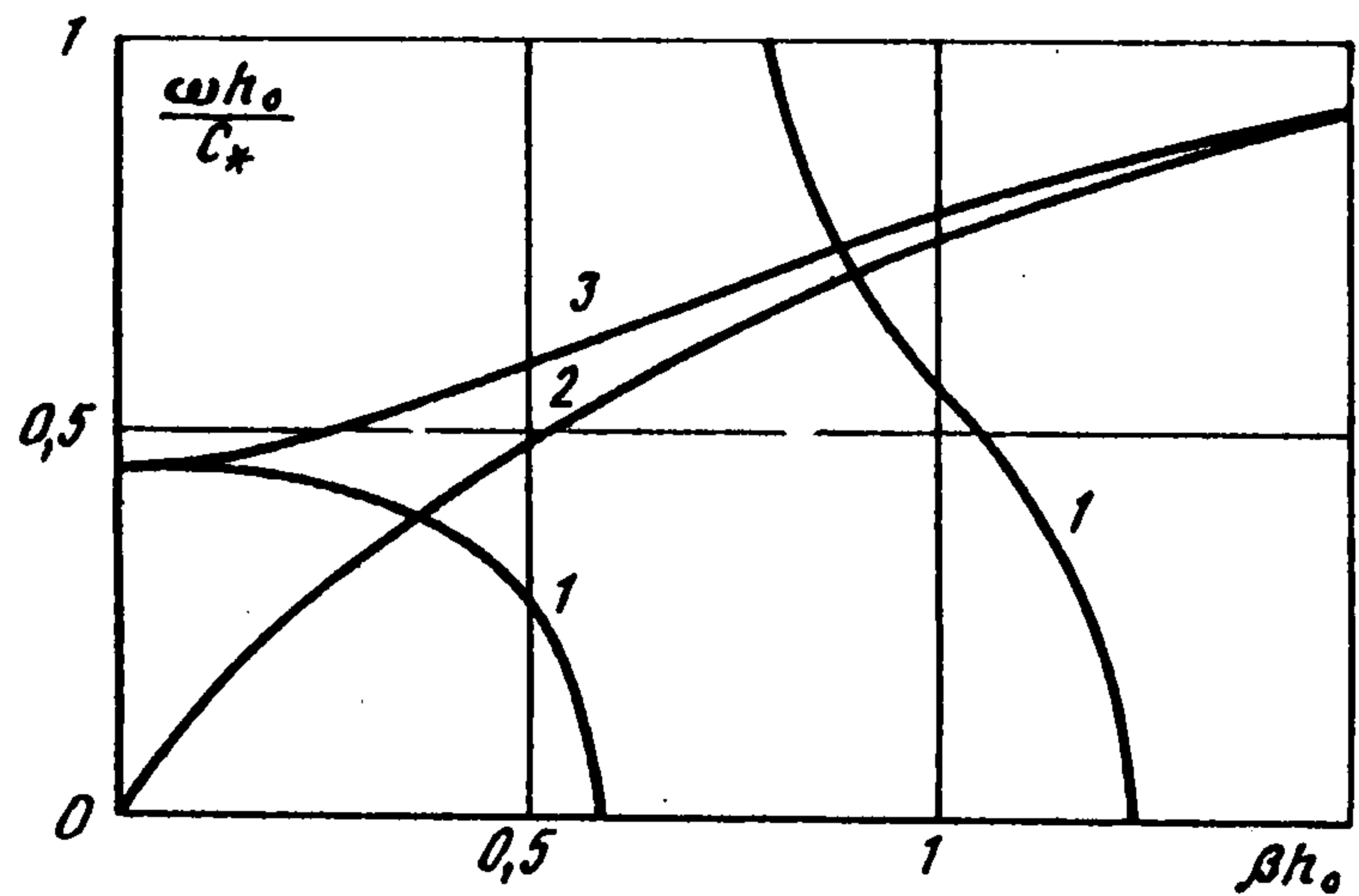
Для иллюстрации полученных результатов были проведены расчеты при следующих значениях безразмерных параметров:

$$(c_*/c_0)^2 = 0,25, \quad \rho_*/\rho_0 = 0,5, \quad h/h_0 = 10.$$

На фиг. 1 показаны типичные зависимости безразмерной частоты $\omega h_0 / c_*$ от безразмерного затухания γh_0 для симметричной (кривые 1) и антисимметричной (кривые 3) моды волновода с амортизирующими стенками. Для сравнения здесь же приведены аналогичные зависимости для поверхностной волны, распространяющейся вдоль одиночной плоской стенки (кривые 2). Штриховые кривые соответствуют упрощенным граничным условиям, а сплошные – граничным условиям общего вида.



Фиг. 1



Фиг. 2

Как и следовало ожидать, с ростом ширины волновода h его стенки перестают влиять друг на друга и собственные моды волновода переходят в поверхностную волну (1.3), (1.4).

Найденные выше собственные моды переносят энергию вдоль стенок волновода. Вектор плотности потока энергии для поверхностной волны с амплитудой A для симметричных мод согласно (2.9) определяется формулой

$$q = (A^2 k_x (\rho_0 \omega)^{-1} \operatorname{ch}^2(\gamma y), 0)$$

Для антисимметричной моды в полученном выражении величина $\operatorname{ch}^2(\gamma y)$ заменяется на $\operatorname{sh}^2(\gamma y)$.

Полный поток энергии через полосу единичной ширины в плоскости $x = \text{const}$ определяется равенствами

$$Q = \int_{-h}^h q_x dy = \frac{2hk_x}{\rho_0 \omega}$$

При $c_* \ll c_1$ согласно формулам (2.2)

$$Q = 2h(1 + \gamma_0^2 \operatorname{cth} \gamma h / G)^{1/2} (\rho_0 c_0)^{-1}$$

Для антисимметричных мод в выражении для полного потока энергии надо заменить $2h$ на $(\operatorname{sh} 2\gamma h - 2\gamma h)/\gamma$ и $\operatorname{cth} \gamma h$ на $\operatorname{th} \gamma h$.

Кроме поверхностных собственных мод в волноводе с амортизирующими стенками могут существовать и незатухающие в глубь моды, похожие на собственные моды классического волновода. Для их нахождения будем искать решения уравнения (1.1) вида

$$p = \exp[-i\omega t + ik_x x] p(y) \quad (2.3)$$

Так же как и для поверхностных волн, зависимость от y может быть симметричной: $p \equiv \sin \beta y$ и антисимметричной: $p \equiv \cos \beta y$. Тогда из граничных условий (2.1) при $c_* \ll c_0$ получим

$$\omega^2 = \begin{cases} G\beta \operatorname{ctg}(\beta h), & \beta h \in (\pi n, \pi/2 + \pi n], \quad n=0,1,\dots \\ G/h, & \beta=0 \\ -G\beta \operatorname{tg}(\beta h), & \beta h \in (\pi/2 + \pi n, \pi + \pi n], \quad n=0,1,\dots \end{cases} \quad (2.4)$$

Так как $k_x^2 = \omega^2 / c_0^2 - \beta^2$, то $\beta < \omega / c_0$, и для каждой частоты ω число волн рассмотренного вида ограничено прямой $\omega = c_0 \beta$ в плоскости (ω, β) . Такие моды хорошо изучены, поэтому не будем на них останавливаться. Дисперсионные зависимости для таких мод в плоскости безразмерных параметров $(\omega h_0 / c_*, \beta h_0)$ показаны на фиг. 2 (кривая 1). Для сравнения здесь же приведены дисперсионные зависимости для поверхностных мод волновода с амортизирующими стенками (кривая 2 – симметричная, кривая 3 – антисимметричная мода).

3. Поверхностные волны снаружи и внутри цилиндрического волновода с амортизирующими стенками. Рассмотрим помещенный в идеальную жидкость цилиндр радиуса R , покрытый снаружи и внутри амортизирующим слоем. По аналогии с плоским случаем естественно ожидать, что вдоль внутренней и внешней поверхности цилиндра могут распространяться поверхностные волны, т.е. решения быстро затухают с удалением от поверхности.

Решение волнового уравнения в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k^2 p = 0, \quad k^2 = \omega^2 / c_0^2 \quad (3.1)$$

будем искать в виде

$$p = R(r) \exp(-i\omega t + ik_z z + in\varphi), \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Получим

$$x^2 R'' + xR' - (x^2 + n^2)R = 0, \quad x = \gamma r \quad (3.2)$$

$$R = R(x) = R(\gamma r), \quad \gamma^2 = k_z^2 - \omega^2 / c_0^2$$

Граничное условие, моделирующее амортизирующий слой, принимает вид

$$r = R_c, \quad -\omega^2 R(x) - G \partial R / \partial n = -c_*^2 (n^2 / r^2 + k_z^2) R(x) \quad (3.3)$$

Упрощенное граничное условие соответствует (3.3) при нулевой правой части.

Волны на внешней поверхности цилиндра. Вне цилиндра уравнение (3.2) имеет решение, обладающее требуемым свойством затухания на бесконечности, $R = K_n(\gamma r)$, K_n – модифицированная функция Бесселя. Из граничного условия (3.3) получим закон дисперсии поверхностных волн

$$\omega^2 = [-G \gamma K_n'(\gamma R_c) / K_n(\gamma R_c) + c_*^2 (n^2 / R_c^2 + \gamma^2)] / c \quad (3.4)$$

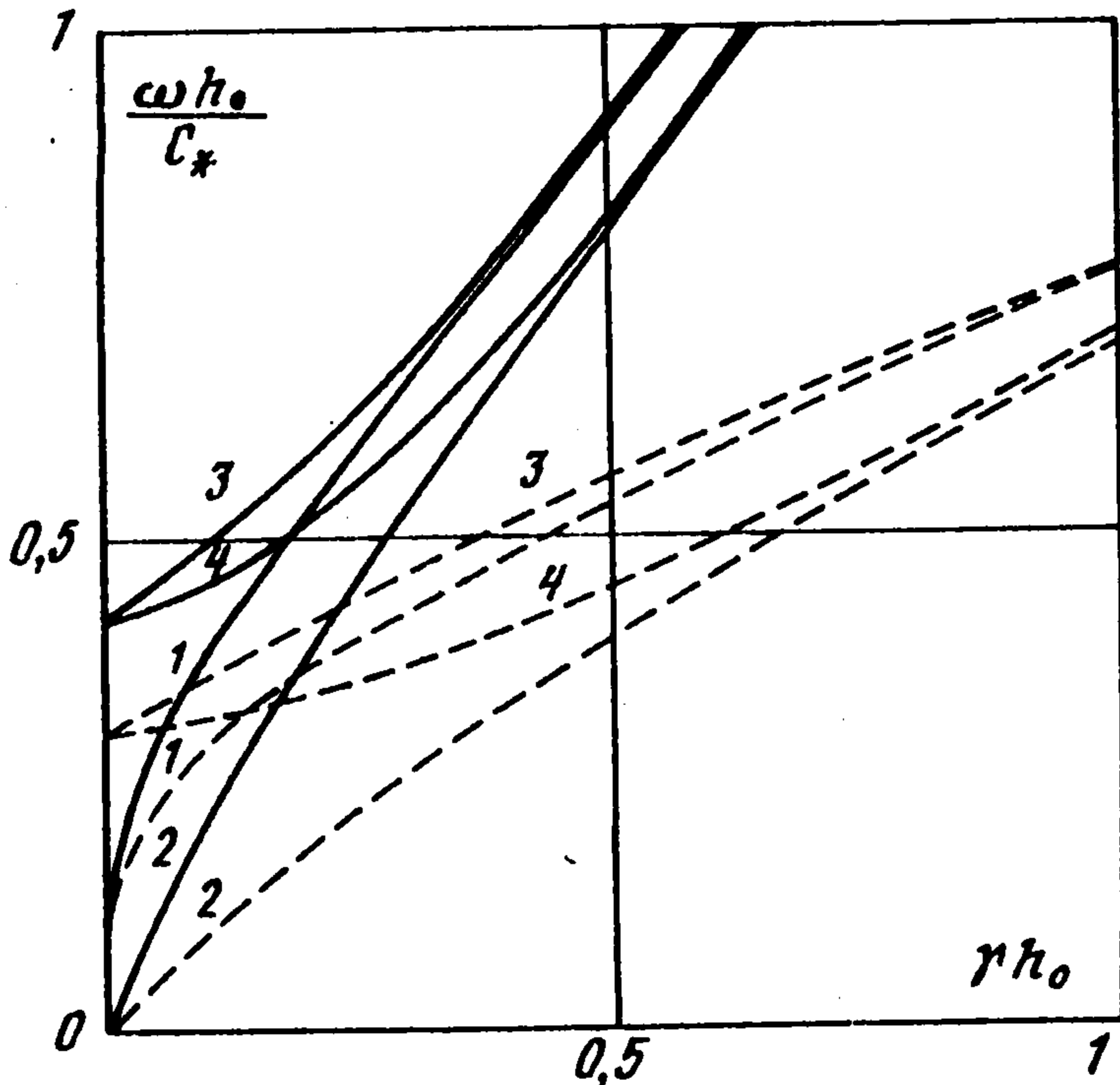
$$k_z^2 = \omega^2 / c_0^2 + \gamma^2$$

В такой волне энергия переносится только вдоль поверхности цилиндра. По формуле (1.6) для поверхностной волны с амплитудой A вектор плотности потока энергии и полный поток энергии через поверхность $z = \text{const}$ определяются равенствами

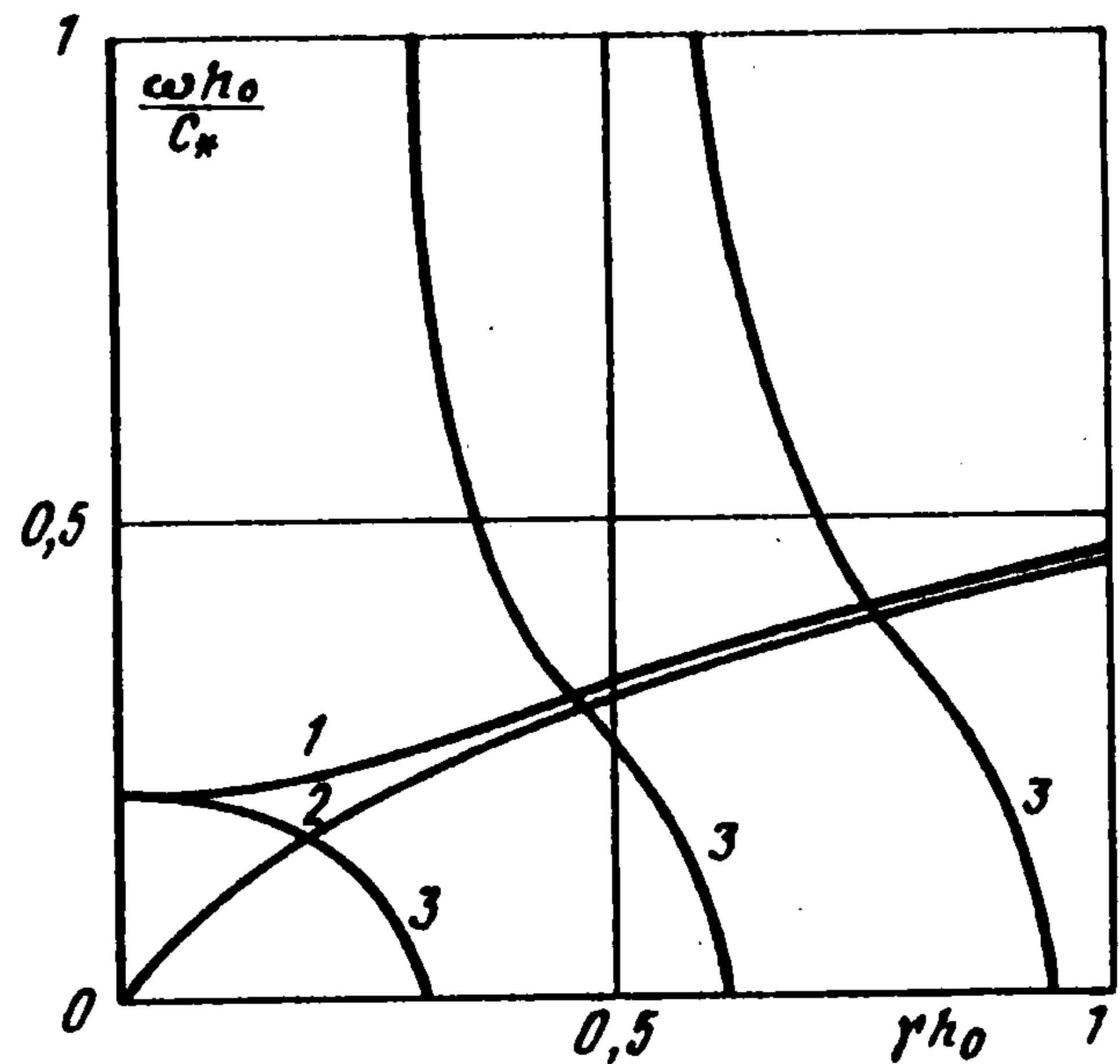
$$q = \frac{A^2}{\rho_0 \omega} K_n^2(\gamma r) \left(0, \frac{n}{r}, k_z \right), \quad Q = \frac{2\pi A^2 k_z}{\rho_0 \omega \gamma} \int_{\gamma R_c}^{+\infty} x K_n^2(x) dx$$

Волны на внутренней поверхности цилиндра. Внутри цилиндра уравнение (3.2) имеет решение $R = I_n(\gamma r)$. Дисперсионное соотношение, полученное из граничного условия (3.3), в этом случае отличается от (3.4) заменой отношения $-K_n'(\gamma R_c) / K_n(\gamma R_c)$ на $I_n'(\gamma R_c) / I_n(\gamma R_c)$, а в формулах (3.5) следует заменить K_n на I_n и интегрировать в пределах от 0 до γR_c .

На фиг. 3 представлены результаты расчетов дисперсионных кривых для $n = 0$ (кривые 1, 2) и $n = 1$ (кривые 3, 4) при $R_c / h_0 = 10$. Кривые 1, 3 – это дисперсионные



Фиг. 3



Фиг. 4

зависимости для внешних мод цилиндра, кривые 2, 4 – для внутренних мод. При этом штриховые кривые соответствуют упрощенному граничному условию, сплошные – граничному условию общего вида.

При $R_c \rightarrow \infty$ собственные моды цилиндрического волновода переходят в поверхностную волну (1.3)–(1.5).

4. Поверхностные волны в цилиндрическом слое. Рассмотрим поверхностные волны между коаксиальными цилиндрами радиусов R_- и R_+ ($R_- < R_+$), покрытыми амортизирующим слоем. Упрощенные граничные условия имеют вид

$$r = R_{\pm}, \quad -\omega^2 R(\gamma r) \pm G \gamma R'(\gamma r) = 0 \quad (4.1)$$

Учитывая рассмотренные выше случаи, зависимость от r будем искать в виде

$$A I_n(\gamma r) + K_n(\gamma r)$$

Тогда из (4.1) получим две моды цилиндрического слоя:

$$\omega^2 = B_2 / B_1 \pm [(B_2 / B_1)^2 - B_3 / B_1]^{1/2} \quad (4.2)$$

$$B_1 = a_+ - a_-, \quad B_2 = -G \gamma (b_- + b_+) / 2$$

$$B_3 = (G \gamma)^2 (c_- - c_+), \quad a_{\pm} = I_n(\gamma R_{\pm}) K_n(\gamma R_{\mp})$$

$$b_{\pm} = I_n(\gamma R_{\pm}) K'_n(\gamma R_{\mp}) - I'_n(\gamma R_{\pm}) K_n(\gamma R_{\mp})$$

$$c_{\pm} = I'_n(\gamma R_{\pm}) K'_n(\gamma R_{\mp})$$

Можно показать, что

$$B_1 > 0, \quad B_2 > 0, \quad B_3 > 0, \quad (B_2 / B_1)^2 > B_3 / B_1$$

При R_-, R_+ , стремящихся к бесконечности так, что $R_+ - R_- = \text{const}$, собственные моды цилиндрического слоя переходят в собственные моды плоского волновода.

Между цилиндрами могут существовать и традиционные моды, аналогичные собственным модам (2.3)–(2.4) плоского волновода.

На фиг. 4 представлены характерные дисперсионные зависимости для цилиндрического слоя при $R_-/h_0 = 10$, $R_+/h_0 = 15$. Кривая 1 соответствует зависимости (4.2) со знаком плюс, кривая 2 этой же зависимости со знаком минус, а кривая 3 соответствует традиционным модам.

Авторы благодарят Ю.Д. Чашечкина и С.В. Нестерова за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пекуровский Л.Е., Поручиков В.Б., Созоненко Ю.А. Взаимодействие акустических волн с телами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 103 с.
2. Пекуровский Л.Е., Поручиков В.Б., Созоненко Ю.А. Взаимодействие акустических волн с телами, покрытыми тонким сжимаемым слоем. // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 823–831.
3. Пекуровский Л.Е., Поручиков В.Б., Созоненко Ю.А. Дагление на сфере с амортизирующим покрытием при падении на нее плоской акустической волны. // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 829–835.
4. Пекуровский Л.Е., Поручиков В.Б. Взаимодействие акустической волны с упругой сферической оболочкой, покрытой тонким сжимаемым слоем. // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 169–175.
5. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.VIII.1992

УДК 533.6.011.8

© 1993 г. М.Ш. Шавалиев

СУПЕРБАРНЕТТОВСКИЕ ПОПРАВКИ К ТЕНЗОРУ НАПРЯЖЕНИЙ И ТЕПЛОМУ ПОТОКУ В ГАЗЕ ИЗ МАКСВЕЛЛОВСКИХ МОЛЕКУЛ

Получены выражения для супербарнеттовских поправок к тензору напряжений и тепловому потоку в газе из максвелловских молекул для двух частных случаев: одномерные течения и трехмерные, но слабо-возмущенные течения.

Метод Чепмена – Энскога решения уравнения Больцмана приводит к последовательности гидродинамических уравнений [1]. В нулевом (по числу Кнудсена) приближении получаются уравнения Эйлера, в первом приближении – уравнения Навье – Стокса, во втором — уравнения Барнетта. Следующее приближение принято называть супербарнеттовским. Вклад каждого приближения в гидродинамические уравнения сводится к соответствующим добавкам в тензор напряжений и тепловой поток

$$p_{\alpha\beta} = p\delta_{\alpha\beta} + p_{\alpha\beta}^{(1)} + p_{\alpha\beta}^{(2)} + p_{\alpha\beta}^{(3)} + \dots$$

$$q = 0 + q^{(1)} + q^{(2)} + q^{(3)} + \dots$$

Здесь p – давление, $p_{\alpha\beta}^{(1)}$ и $q^{(1)}$ – законы Навье – Стокса и Фурье [1], $p_{\alpha\beta}^{(2)}$, $q^{(2)}$ и $p_{\alpha\beta}^{(3)}$, $q^{(3)}$ – барнеттовские [1] и супербарнеттовские [2] поправки к тензору напряжений и тепловому потоку.

В последние годы уравнения барнеттовского и супербарнеттовского приближений были использованы для решения ряда газодинамических задач. В частности, решены в одномерной постановке задача о распространении звуковых колебаний в простых газах [3] и смесях газов [4]¹ и задача о структуре ударной волны [5, 6]². Был сделан

¹ См. также: Шавалиев М.Ш. Явления переноса в газовых смесях в барнеттовском и супербарнеттовском приближениях: Дис. ... канд. физ.-мат.наук. Новосибирск, 1978. 157 с.

² См. также: Simon C.E. Theory of shock structure in a Maxwell gas based on the Chapman-Enskog development through Super-Super-Burnett order: Ph.D.Thesis. Univ. of Colorado, CO, 1976.