5. Среди всего множества интегральных кривых в окрестности плоскости $\psi = \tau$ переход дозвукового режима в сверхзвуковой оказывается возможным только в седловых особых точках по одной сепаратрисе в каждой такой точке. Именно этот случай реализуется в солнечном и звездном ветре.

Для особых точек типа фокус решения в их окрестности физически не реализуемы, так как они оказываются непродолжительными по λ.

Поскольку узловые особые точки имеют сепаратрисы с переходом из сверхзвука к дозвуку, то все интегральные кривые в окрестности такой особой точки неустойчивы по отношению к возмущениям в окрестности особой точки [1]. Для седловых особых точек только одна интегральная кривая устойчива относительно возмущений в окрестности особой точки, а именно кривая, являющаяся сепаратрисой с переходом из дозвуковой в сверхзвуковую область истечения. Все остальные интегральные кривые оказываются абсолютно неустойчивыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А.Г., Слободкина Ф.А.* Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности перехода через скорость звука // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 593–602.
2. *Chamberlain J.W.* Interplanetary gas. III. A hydrodynamical model of the corona // Astrophys. J. 1961. V. 133. № 2. P. 675–687.
3. *Паркер Е.Н.* Динамические процессы в межпланетной среде. М.: Мир, 1965. 362 с.
4. *Weber E.J.* Unique solutions of the solar wind models with thermal conductivity // Solar Phys. 1970. V. 14. № 2. P. 480–488.
5. *Баранов В.Б., Краснобаев К.В.* Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977. 335 с.
6. *Богоявленский О.И.* Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 319 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.V. 1992

УДК 532.5

Ю.Б. Седов

МЕТОД КОНТУРНОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

Указан класс трехмерных течений, подчиняющихся уравнениям свободной идеальной конвекции в приближении Буссинеска, к которым применим метод контурной динамики, позволяющий сводить задачу к одномерной. Получены временны́е законы изменения трех основных величин: вертикальной завихренности, горизонтальной дивергенции и отклонения температуры.

Уравнения свободной конвекции в приближении Буссинеска [1]

$$D_t\mathbf{v} = -\rho_0^{-1}\nabla p' - g\beta T' + \nu\Delta\mathbf{v}, \qquad D_t = \partial_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad D_tT' = k\Delta T' \tag{1}$$

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – скорость, ρ_0 – средняя плотность, p', T' – отклонения давления и температуры, g – ускорение свободного падения, ν – кинематическая вязкость, k, β –

коэффициенты температуропроводности и теплового расширения, допускают решения вида

$$\mathbf{v}=(v_1(x,y,t),v_2(x,y,t),-z\sigma), \quad T'=zT'(x,y,t) \tag{2}$$

Здесь $\sigma=\partial_x v_1+\partial_y v_2$ – дивергенция в горизонтальной плоскости, через которую выражаются как вертикальная компонента скорости, так и горизонтальные компоненты вихря. Поле вихря при этом имеет вид

$$\boldsymbol{\omega}=(-z\partial_y\sigma, z\partial_x\sigma, \omega_3) \tag{3}$$

Таким образом, система (1) сводится к системе уравнений для трех определяющих величин σ, T', ω_3

$$D_t\sigma=\sigma^2-g\beta T'+p_0+\nu\Delta\sigma$$

$$D_tT'=\sigma T'+k\Delta T', \quad D_t\omega_3=-\sigma\omega_3+\nu\Delta\omega_3 \tag{4}$$

Величина p_0 связана с распределением давления. Уравнение неразрывности удовлетворяет в силу задания поля скорости в виде (2).

В случае идеальной конвекции, когда $\nu=0$ и $k=0$, полученная система уравнений точно решается для кусочно-однородных распределений величин σ, T', ω_3. Действительно, общий случай локализованных возмущений такого типа сводится к простейшему, когда σ, T', ω_3 сосредоточены в области D

$$\sigma(x,y,0)=\sigma_0\chi(D), \quad T'(x,y,0)=T_0'\chi(D), \quad \omega_3(x,y,0)=\omega_3^0\chi(D) \tag{5}$$

где $\chi(D)$ – характеристическая функция области $D=D(t)$, из (4) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot\sigma=\sigma^2-g\beta T'+p_0, \quad \dot T'=\sigma T', \quad \dot\omega_3=-\sigma\omega_3 \tag{6}$$

поскольку все жидкие частицы в области D равноправны, и уравнения (4) описывают не только лагранжеву динамику отдельных жидких частиц, но и глобальную эволюцию жидкого объема $D(t)$. В случае ограниченной области D величина $p_0=0$, так как давление на бесконечности не зависит от z. Решая систему уравнений (6) при $p_0=0$, получим [2]

$$\sigma(t)=(\sigma_0-g\beta T_0')/Q(t), \quad T'(t)=T_0'/Q(t)$$

$$\omega_3(t)=\omega_3^0Q(t), \quad Q(t)=1-\sigma_0t+\frac{1}{2}g\beta T_0't^2 \tag{7}$$

Временные законы (7) позволяют использовать метод контурной динамики [3, 4], и при этом сохраняет свой вид уравнение, описывающее динамику граничного контура ∂D

$$\zeta_0=-\frac{\omega_3(t)+i\sigma(t)}{2\pi}\oint_{\partial D}\ln|\zeta-\zeta_0|d\zeta \tag{8}$$

Здесь $\zeta=x+iy$ – комплексные переменные в горизонтальной плоскости, точки ζ, ζ_0 принадлежат граничному контуру ∂D.

Полученные временные зависимости (7) позволяют также сделать ряд общих выводов, касающихся развития локализованных в плоскости (x, y) возмущений, грубое поведение которых без учета изменения формы области $D(t)$ определяется знаками величин σ_0, T_0 и определителя $d=\sigma_0^2-2g\beta T'_0$.

В случае $d < 0$ имеем $T'_0 > \sigma_0^2/(2g\beta) > 0$, т.е. возмущение имеет теплое (легкое) ядро, которое, как следует из (7), стягивается в вихревую нить, так как $\sigma(t) \to 0-$, $T'(t) \to 0+$, а $\omega_3(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. При этом в начальный момент $t = 0$ может быть задана дивергенция $\sigma_0 > 0$, тогда при $t = t_0 = \sigma_0/(g\beta T'_0)$ справедливо равенство $\sigma = 0$ и далее $\sigma(t)$ становится меньше нуля, т.е. дивергенция заменяется на конвергенцию.

Если $d \geqslant 0$, то $T'_0 < \sigma_0^2/(2g\beta)$ и имеем три режима в зависимости от знаков T'_0, σ_0. При $T'_0 > 0$, $\sigma_0 < 0$ происходит стягивание возмущения в вихревую нить. При $T'_0 > 0$ в начальный момент имеем дивергенцию, приводящую к "взрыву": $\sigma(t) \to +\infty$, $T'(t) \to +\infty$, $\omega_3(t) \to 0$ при $t \to t_1 = t_0 - \sqrt{d}/(g\beta T'_0)$. И наконец, при $T'_0 < 0$ $\sigma(t)$ может принимать значения разных знаков, время изменяется в интервале $t_1 < t < t_2 = t_0 + \sqrt{d}/(g\beta T'_0)$. При $t \to t_1+$ имеем $\sigma(t) \to -\infty$, $T'(t) \to -\infty$, $\omega_3(t) \to 0$, т.е.крайнее возможное начальное состояние представляет собой стоковую нить с холодным ядром, которая взрывается, так как $\sigma(t) \to +\infty$, $T'(t) \to -\infty$ при $t \to t_2-$. Следует отметить, что при этом происходит спонтанное нарастание завихренности, достигающей максимального значения при $t = t_0$, когда $\sigma = 0$, а T' тоже принимает максимальное значение.

Таким образом, при определенных условиях (при $d < 0$, $T'_0 > 0$ и при $d > 0$, $\sigma_0 < 0$, $T'_0 > 0$) происходит стягивание начального возмущения с одновременной интенсификацией завихренности. Такие процессы наблюдаются при образовании интенсивных конвективных вихрей, когда восходящие потоки вдоль осей вихрей порождают конвергенцию – сходящееся радиальное движение среды у основания вихря. Применяя метод контурной динамики с соответствующими начальными данными, можно моделировать нестационарные процессы формирования концентрированных конвективных вихрей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Гидродинамика. Т. 6. М.: Наука, 1986. 736 с.
2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
3. *Zabusky N.J., Hughes M.H., Roberts K.V.* Contour dynamics for the Euler equations in two dimentions // J. Comput. Phys. 1979. V. 30. № 1. P. 96–106.
4. Метод контурной динамики в океанологических исследованиях. Сб. науч. тр. Владивосток: Изд-во ДВО АН СССР. 1990. 134 с.

Московская область

Поступила в редакцию
27.V.1992