

УДК 533.6

© 1993 г. З.Х. Салмап, И.С. Шикин

**ТЕЧЕНИЕ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ЛИНИИ
В ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗВЕЗДНОГО ВЕТРА
С ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ**

Изучается одномерная стационарная сферически симметричная модель течения звездного ветра в рамках газовой динамики в предположении, что перенос энергии во внешней атмосфере звезды происходит путем электронной теплопроводности. Детально исследуется форма критической кривой, на которой происходит переход от дозвукового режима истечения к сверхзвуковому, и типы образующих ее особых точек, а также их связь с направлением сепаратрис. Рассматривается устойчивость решений относительно возмущений в окрестности особых точек согласно предложенному ранее подходу [1].

Впервые задача в рассматриваемой здесь постановке была предложена [2] для двух простейших случаев: адиабатического режима, по сути описываемого моделью Паркера [3], где вместо уравнения притока тепла вводился политропный закон, и случая, когда полный поток энергии равен нулю, для которого была получена одна из асимптотик на бесконечности. Для конкретных параметров была построена критическая линия и произведен численный расчет направлений сепаратрис [4].

1. Изучаемая модель основывается на следующих предположениях: поток одномерен, стационарен и сферически симметричен, скорость имеет только радиальную составляющую, все параметры потока (скорость u , давление p , плотность ρ и температура T) – функции только одной пространственной координаты r – расстояния от центра звезды; механизмом переноса энергии в расширяющейся звездной короне является электронная теплопроводность, вязкие эффекты и влияние магнитного поля не рассматриваются; газ считается совершенным с постоянными теплоемкостями, отношение теплоемкостей $\gamma = \frac{5}{3}$.

В этих предположениях система уравнений динамики атмосферы звезды в безразмерных переменных приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{2} - \lambda + \frac{5}{2}\tau + \frac{A}{2}\tau^{3/2} \frac{d\tau}{d\lambda} &= \epsilon_{\infty} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\tau}{\psi}\right) \frac{d\psi}{d\lambda} &= 1 - \frac{2\tau}{\lambda} - \frac{d\tau}{d\lambda} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\tau = \frac{T}{T_0}, \quad \psi = \frac{m_i u^2}{2kT_0}, \quad \lambda = \frac{GM_* m_i}{2kT_0 r}, \quad A = \frac{\kappa(T_0) GM_* m_i}{2ck^2 T_0}, \quad \epsilon_{\infty} = \frac{E_{\infty} m_i}{2ckT_0}$$

Здесь $\kappa(T_0) = \kappa_0 T_0^{3/2}$, T_0 – температура у основания короны, G – гравитационная постоянная, M_* – масса звезды (считается постоянной, так как вклад верхней атмосферы в массу звезды несуществен), c – константа расхода массы, E_{∞} – константа в

интеграле энергии, k – постоянная Больцмана, m_i – масса иона, κ – коэффициент теплопроводности, который зависит от температуры как [5]

$$\kappa = \kappa_0 T^{5/2} \approx 6 \cdot 10^{-12} T^{5/2} \text{ Дж (м} \cdot \text{с} \cdot \text{К)}^{-1}$$

и является коэффициентом электронной теплопроводности (коэффициент ионной теплопроводности порядка m_e/m_i , где m_e – масса электрона, и оказывается пренебрежимо мал).

2. Для исследования особых точек введем фиктивный параметр λ безразмерного времени t , определяемый из уравнения

$$dt/d\lambda = [\lambda A \tau^{5/2} (\psi - \tau)]^{-1} \quad (2.1)$$

В результате получаем систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\tau/dt = \lambda(\psi - \tau)(2\varepsilon_\infty - \psi + 2\lambda - 5\tau) = F_1(\tau, \psi, \lambda)$$

$$d\psi/dt = 2\psi[A\tau^{5/2}(\lambda - 2\tau) - \lambda(2\varepsilon_\infty - \psi + 2\lambda - 5\tau)] = F_2(\tau, \psi, \lambda) \quad (2.2)$$

$$d\lambda/dt = \lambda A \tau^{5/2} (\psi - \tau) = F_3(\tau, \psi, \lambda)$$

Замена (2.1) устраняет сингулярности системы (1.1), в которых $\lambda A \tau^{5/2} (\psi - \tau) = 0$.

Из всего множества особых точек выделим особые точки $(\tau_c, \psi_c, \lambda_c)$, не расположенные в координатных плоскостях. Эти точки определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \psi_c &= \tau_c, \quad \lambda_c(\tau_c, \varepsilon_\infty) = \zeta(\tau_c, \varepsilon_\infty) \pm [\zeta^2(\tau_c, \varepsilon_\infty) - A\tau_c^{7/2}]^{1/2} \\ (\zeta(\tau_c, \varepsilon_\infty) &= (6\tau_c + A\tau_c^{5/2} - 2\varepsilon_\infty)/4) \end{aligned} \quad (2.3)$$

и традиционно называются звуковыми, хотя равенство $\psi = \tau$ означает $m_i u^2 / (2kT) = 1$ или число Маха $M = \sqrt{1/\gamma} < 1$.

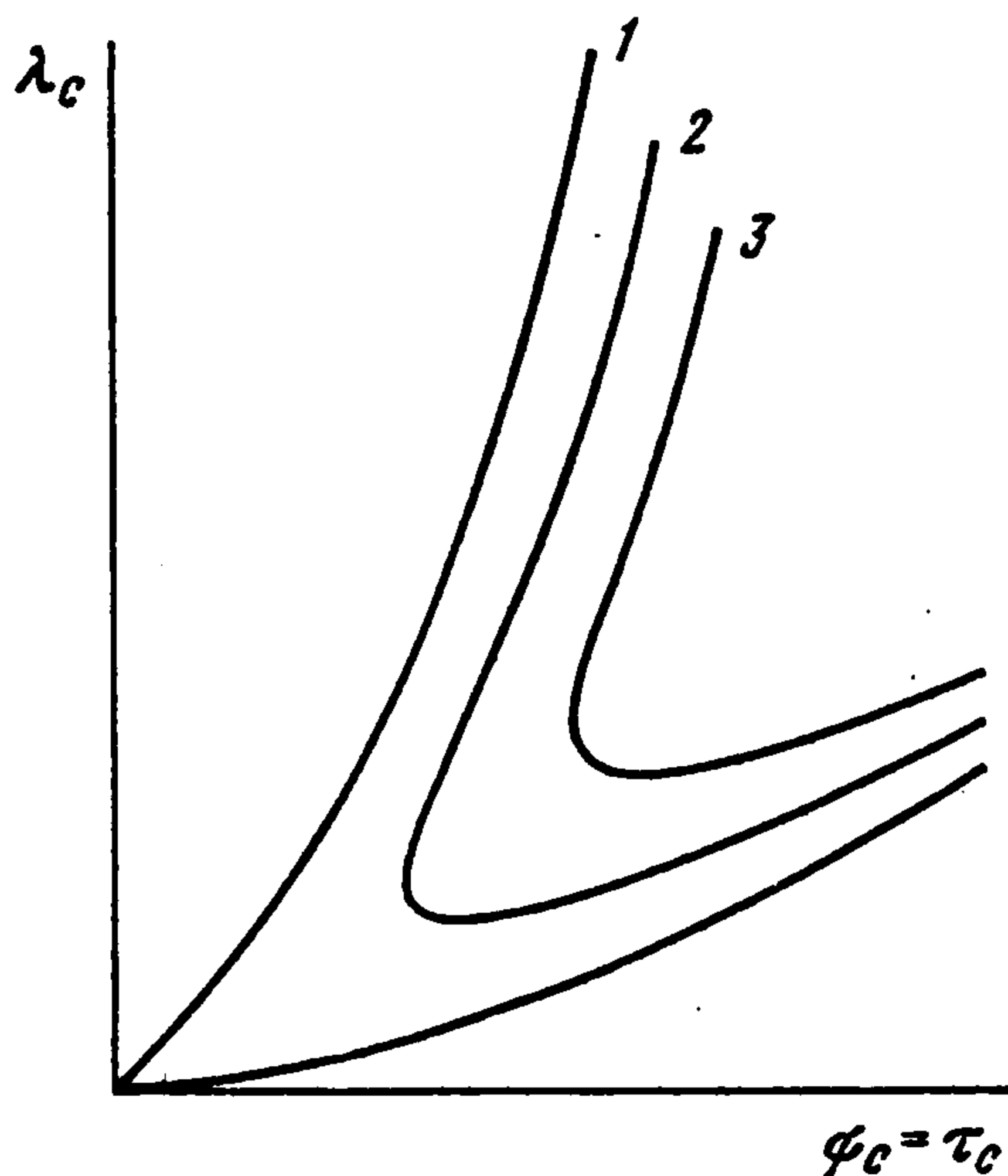
Обозначение $\lambda_c = \lambda_c(\tau_c, \varepsilon_\infty)$ подчеркивает существенную зависимость кривых λ от значения ε_∞ . Область определения кривой при $\varepsilon_\infty = 0$ – полупрямая $\tau_c \in [0, +\infty)$, а при $\varepsilon_\infty > 0$ это $\tau_c \in [\tau'_c, +\infty)$, где τ'_c – единственный корень уравнения $\zeta(\tau_c, \varepsilon_\infty) = \sqrt{A} \tau_c^{7/4}$ при $\tau_c \geq 0$. Чем выше ε_∞ , тем больше τ'_c . Кроме того, при $\varepsilon_\infty = 0$ величина λ_c может быть любой в пределах от нуля до бесконечности, а при $\varepsilon_\infty > 0$ существует нижняя граница λ'_c , которая тем выше, чем больше ε_∞ . Поэтому при $\varepsilon_\infty > 0$ переход через особую точку не может происходить слишком далеко от центра звезды, при этом поток должен иметь достаточно высокую температуру.

Дифференцирование функции $\lambda_c(\tau_c, \varepsilon_\infty)$ по параметру ε_∞ показывает, что кривая, соответствующая большему ε_∞ , вкладывается в кривую с меньшим ε_∞ . На фиг. 1 показано качественное поведение критических кривых. Цифрой 1 отмечена кривая $\lambda_c(\tau_c, 0)$, 2 – $\lambda_c(\tau_c, \varepsilon_\infty)$, $\varepsilon_\infty > 0$, 3 – $\lambda_c(\tau_c, \varepsilon'_\infty)$, $\varepsilon'_\infty > \varepsilon_\infty$.

3. Для нахождения характера особых точек необходимо рассмотреть характеристическую матрицу системы (2.2)

$$A'_j = \partial F_i / \partial x_j |_{\tau_c, \psi_c, \lambda_c}$$

подразумевая под (x_1, x_2, x_3) вектор (τ, ψ, λ) . Найдем характеристические корни этой



Фиг. 1

матрицы (z_1, z_2, z_3) , которые являются собственными значениями системы (2.2) и определяются уравнением $\det \|A_i^j - z \delta_i^j\| = 0$, или

$$z(z^2 - G_2 z + G_1) = 0 \quad (3.1)$$

$$G_2 = (2\tau_c + A\tau_c^{5/2})\lambda_c + 2A\tau_c^{7/2}$$

$$G_1 = -2A\tau_c^{7/2}[(4 + 5/2 A\tau_c^{3/2})\lambda_c^2 - 12(\tau_c + A\tau_c^{5/2})\lambda_c + 16A\tau_c^{7/2}]$$

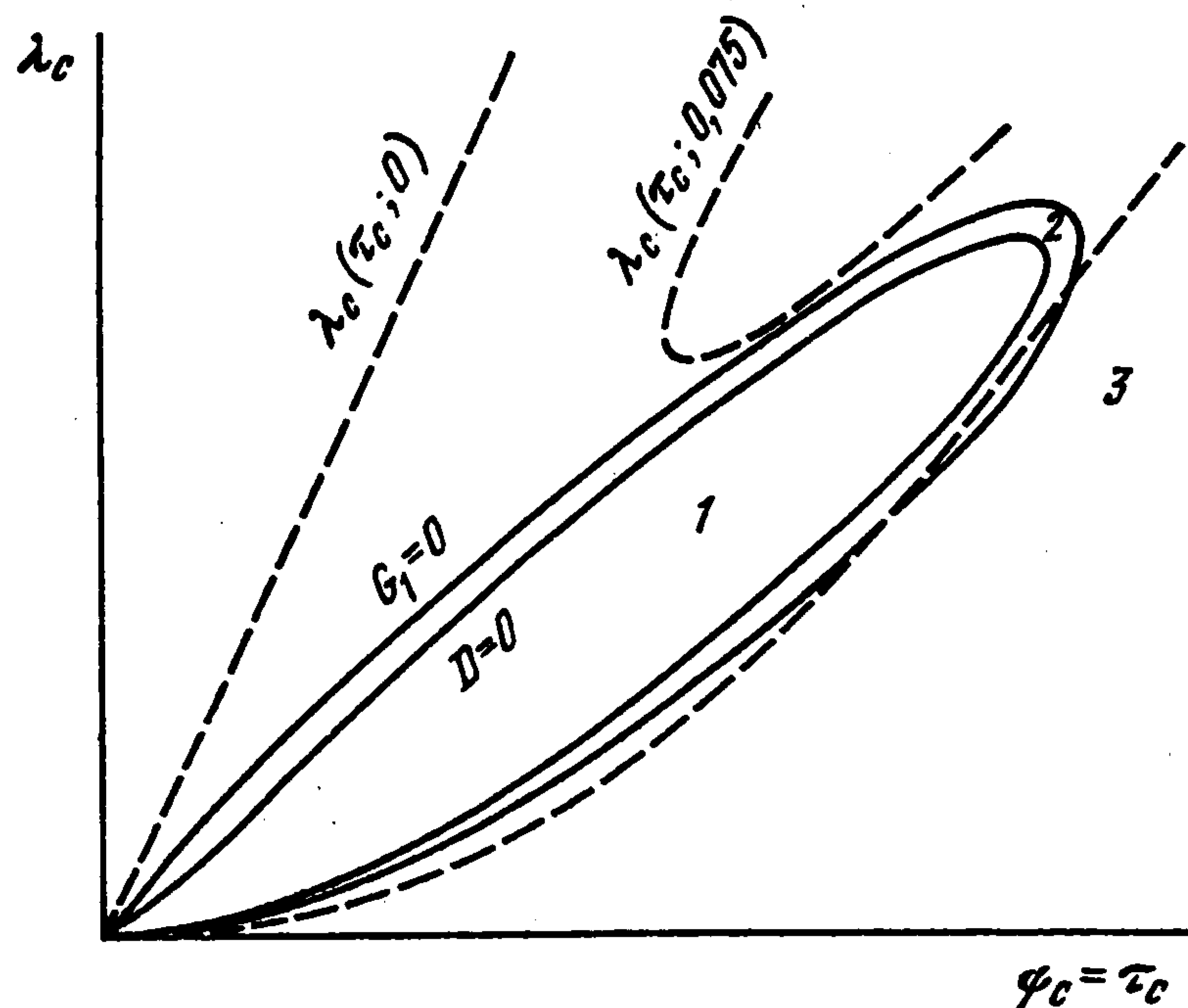
Особые точки (2.3) заполняют непрерывное множество, являющееся многообразием размерности единица. Следовательно [6], система (2.2) в таких особых точках имеет одно нулевое собственное число и особые точки (2.3) характеризуются как двумерные особые точки, если множество особых точек (2.3) невырождено, т.е. когда почти во всех особых точках этого множества имеется два собственных числа системы (2.2) с ненулевыми вещественными частями. Поэтому необходимо исследовать уравнение, соответствующее равенству нулю выражения в скобках в (3.1).

Если собственные числа z_1, z_2 (корни этого уравнения) комплексно-сопряженные, т.е. дискриминант D уравнения отрицателен, то особая точка при таких параметрах является фокусом. Если собственные числа действительны, различны и одного знака (при $D > 0, G_1 > 0$), то особые точки – узлы. Если собственные числа действительны и разного знака (при $D > 0, G_1 < 0$), то особые точки – седла. В случае $D = 0$ особые точки — вырожденные узлы. При $G_1 = 0$ возникают вырожденные седла.

На фиг. 2 показано взаимное расположение кривых $D = 0, G_1 = 0$ и критических кривых (прерывистая черта) для $A = 400$, что соответствует параметрам солнечного ветра. Если особая точка, расположенная на кривой $\lambda_c(\tau_c, \epsilon_\infty)$ попадает в область 1, то эта точка является фокусом, интегральные кривые в окрестности такой особой точки не имеют физического смысла. Если особая точка попадает в область 2, то ей соответствует узел. На пересечении областей 1 и 2 особые точки будут вырожденными узлами. В области 3 особые точки – узлы. На пересечении областей 2 и 3 – вырожденные седла.

4. Для определения сепаратрис в особых точках $(\tau_c, \psi_c, \lambda_c)$ необходимо найти коэффициенты α и β в разложении

$$\tau - \tau_c = \alpha(\lambda - \lambda_c), \quad \psi - \tau = \beta(\lambda - \lambda_c). \quad (4.1)$$



Фиг.2

Коэффициент $\beta > 0$ соответствует переходу от сверхзвукового режима истечения к дозвуковому при увеличении радиального расстояния, а $\beta < 0$, наоборот, — от дозвукового к сверхзвуковому.

Подставив выражения (4.1) в систему (1.1) и учитывая члены нулевого порядка малости по $\lambda - \lambda_c$, получим два тождественно равных в силу (2.3) выражения для α

$$A\tau_c^{5/2}\alpha = 2\lambda_c - 6\tau_c + 2\varepsilon_\infty, \quad \alpha = 1 - 2\tau_c / \lambda_c \quad (4.2)$$

Таким образом, чтобы получить выражения для β , необходимо рассмотреть в разложении $\tau - \tau_c$ более высокий порядок до квадратичного члена включительно.

Это означает, что интегральные кривые в окрестности особой точки существенно не лежат в некоторой плоскости

$$\tau - \tau_c = \alpha(\lambda - \lambda_c) + \delta(\lambda - \lambda_c)^2 \quad (4.3)$$

Подставляя выражение (4.3) и второе выражение (4.1) и учитывая теперь члены первого порядка малости по $\lambda - \lambda_c$, получаем два алгебраических уравнения для β и δ . Исключая из этой системы δ , приходим к квадратному уравнению для β

$$A\tau_c^{3/2}\lambda_c^2\beta^2 - \lambda_c\tau_c^{-1}G_2\beta + G_1 / (A\tau_c^{7/2}) = 0 \quad (4.4)$$

Поскольку дискриминант уравнения (4.4) равен $\lambda_c^2\tau_c^{-2}D$, то комплексно-сопряженным корням этого уравнения соответствуют особые точки типа фокус. Когда корни уравнения (4.4) действительны и имеют разные знаки, особые точки — седла. Одна из сепаратрис при этом переходит из дозвуковой области в сверхзвуковую, а другая — из сверхзвуковой в дозвуковую.

Если корни действительны и имеют один знак, то особые точки — узлы. Так как сумма корней равна $G_2 / (A\tau_c^{5/2}\lambda_c)$ и при выполнении условий $D > 0$, $G_1 > 0$ функция G_2 положительна, обе сепаратрисы, проходящие через узловую особую точку, соответствуют переходу от сверхзвукового к дозвуковому режиму.

В случае вырожденных узла и седла единственная сепаратриса, проходящая через каждую такую особую точку, соответствует переходу от сверхзвукового к дозвуковому режиму при увеличении радиального расстояния.

Таким образом, переход дозвукового режима в сверхзвуковой может происходить только в седловой особой точке по одной из сепаратрис.

5. Среди всего множества интегральных кривых в окрестности плоскости $\psi = \tau$ переход дозвукового режима в сверхзвуковой оказывается возможным только в седловых особых точках по одной сепаратрисе в каждой такой точке. Именно этот случай реализуется в солнечном и звездном ветре.

Для особых точек типа фокус решения в их окрестности физически не реализуемы, так как они оказываются непродолжительными по λ .

Поскольку узловые особые точки имеют сепаратрисы с переходом из сверхзвука к дозвуку, то все интегральные кривые в окрестности такой особой точки неустойчивы по отношению к возмущениям в окрестности особой точки [1]. Для седловых особых точек только одна интегральная кривая устойчива относительно возмущений в окрестности особой точки, а именно кривая, являющаяся сепаратрисой с переходом из дозвуковой в сверхзвуковую область истечения. Все остальные интегральные кривые оказываются абсолютно неустойчивыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А.Г., Слободкина Ф.А. Об устойчивости произвольных стационарных течений в окрестности перехода через скорость звука // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 4. С. 593–602.
2. Chamberlain J.W. Interplanetary gas. III. A hydrodynamical model of the corona // Astrophys. J. 1961. V. 133. № 2. P. 675–687.
3. Паркер Е.Н. Динамические процессы в межпланетной среде. М.: Мир, 1965. 362 с.
4. Weber E.J. Unique solutions of the solar wind models with thermal conductivity // Solar Phys. 1970. V. 14. № 2. P. 480–488.
5. Баранов В.Б., Краснобаев К.В. Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977. 335 с.
6. Богоявленский О.И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980. 319 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.V. 1992

УДК 532.5

© 1993 г. Ю.Б. Седов

МЕТОД КОНТУРНОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

Указан класс трехмерных течений, подчиняющихся уравнениям свободной идеальной конвекции в приближении Буссинеска, к которым применим метод контурной динамики, позволяющий сводить задачу к одномерной. Получены временные законы изменения трех основных величин: вертикальной завихренности, горизонтальной дивергенции и отклонения температуры.

Уравнения свободной конвекции в приближении Буссинеска [1]

$$D_t \mathbf{v} = -\rho_0^{-1} \nabla p' - g\beta T' + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad D_t = \partial_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad D_t T' = k \Delta T'$$
(1)

где $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – скорость, ρ_0 – средняя плотность, p' , T' – отклонения давления и температуры, g – ускорение свободного падения, ν – кинематическая вязкость, k , β –