УДК.539.3

© 1993 г. Ю.А. Антипов

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ПРАНДТЛЯ НА ОТРЕЗКЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ ПОЛОСЫ

Получено точное решение интегродифференциального уравнения типа Прандтля в двух случаях, к которым сводятся антиплоская задача для упругого слоя, одна из граней которого жестко закреплена, а другая закреплена жестко всюду, исключая некоторый участок упругого закрепления, и плоская задача о равномерном растяжении на бесконечности полосовидной пластинки, усиленной упругим включением. В обоих случаях интегральное уравнение при помощи преобразования Фурье приводится к векторной задаче Римана, которая методом, аналогичным предложенному ранее [1], сводится к бесконечной алгебраической системе Пуанкаре – Коха. Для неизвестных системы получены явные формулы и удобные при численной реализации рекуррентные соотношения. Найдены расчетные формулы для осевых усилий на концах стрингера, контактных касательных напряжений и их коэффициентов интенсивности. В окрестности концов стрингера строится асимптотическое разложение контактных напряжений, которое кроме степеней радикалов содержит произведения радикалов на целые степени логарифмов. Приводятся численные результаты.

Интегродифференциальное уравнение, соответствующее плоской задаче о растяжении полосы с накладкой, было решено [2] приближенно при помощи асимптотического метода и метода последовательных приближений. Уравнение Прандтля задачи о контакте полуплоскости со сцепленной накладкой было сведено [3, 4] к бесконечной алгебраической системе со степенным убыванием элементов матрицы системы. Указанное уравнение решалось [2] асимптотическим методом.

1. Уравнение типа Прандтля, соответствующее антиплоской задаче для полосы. Рассмотрим следующую гармоническую задачу для полосы:

$$\Delta w(x,y)=0, \quad |x|<\infty, \quad 0<y<b \tag{1.1}$$

$$w(x,0)=0, \quad x \overline{\in} (0,a); \quad w(x,b)=0; \ |x|<\infty \tag{1.2}$$

$$(w-\mu_0 \partial w/\partial y)_{y=0}=f_0(x), \quad 0<x<a \tag{1.3}$$

Здесь $\mu_0>0, f_0(x)$ – гельдеровская функция.

Доопределим первое условие (1.2) на всю вещественную ось:

$$w(x,0)=\chi_0(x), \quad |x|<\infty, \quad \operatorname{supp}\chi_0(x)\subset(0,a)$$

и применим к задаче (1.1), (1.2) преобразование Фурье. Реализация условия (1.3) приводит к интегродифференциальному уравнению Прандтля

$$\chi(t)+\frac{\mu}{2}\int\limits_0^\lambda \chi'(\tau)\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}(t-\tau)\,d\tau=f(t),\quad 0<t<\lambda \tag{1.4}$$

при дополнительном условии $\chi(0)=\chi(\lambda)=0$, причем

$$\chi(t)=\chi_0(bt),\quad f(t)=f_0(bt),\quad \lambda=a/b,\quad \mu=\mu_0/b$$

При помощи односторонних функций $\chi_\pm(t)$ и функций $\chi_*(t)$, $f_*(t)$, обладающих свойствами

$$\operatorname{supp}\chi_+\subset[\lambda,\infty),\qquad \operatorname{supp}\chi_-\subset(-\infty,0]$$

$$\chi_*(t)\ =\ \begin{cases}\chi(t), & 0\leqslant t\leqslant\lambda\\ 0, & t\,\overline{\in}\,(0,\lambda)\end{cases},\qquad f_*(t)\ =\ \begin{cases}f(t), & 0\leqslant t\leqslant\lambda\\ 0, & t\,\overline{\in}\,(0,\lambda)\end{cases}$$

доопределяем уравнение (1.4) на всю ось

$$\chi_*(t)+\frac{\mu}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi_*'(\tau)\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}(t-\tau)\,d\tau\ =\ f_*(t)+\chi_-(t)+\chi_+(t),\quad |t|<\infty \tag{1.5}$$

Введем в рассмотрение трансформанты Фурье

$$\Phi_1^+(\alpha)=\int\limits_0^\lambda\chi(\tau)e^{i\alpha\tau}d\tau,\qquad \Phi_1^-(\alpha)=\int\limits_{-\lambda}^0\chi(\lambda+\tau)e^{i\alpha\tau}d\tau$$

$$\Phi_2^+(\alpha)=\int\limits_0^\infty\chi_+(\lambda+\tau)e^{i\alpha\tau}d\tau,\qquad \Phi_2^-(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^0\chi_-(\tau)e^{i\alpha\tau}d\tau$$

$$F^+(\alpha)=\int\limits_0^\lambda f(t)e^{i\alpha t}dt,\qquad F^-(\alpha)=\int\limits_{-\lambda}^0 f(\lambda+t)e^{i\alpha t}dt$$

Функции $\Phi_1^\pm(\alpha)$, $F^\pm(\alpha)$ целые, а $\Phi_2^\pm(\alpha)$ аналитические в $C^\pm$: $\operatorname{Im}\alpha \gtrless 0$. Применяя к уравнению (1.5) преобразование Фурье и учитывая связь

$$\Phi_1^+(\alpha)=e^{i\alpha\lambda}\Phi_1^-(\alpha)$$

получим следующую векторную задачу Римана:

$$\begin{gathered}G(\alpha)\Phi_1^\pm(\alpha)=F^\pm(\alpha)+e^{\pm i\alpha\lambda}\Phi_2^\pm(\alpha)+\Phi_2^\mp(\alpha),\quad |\alpha|<\infty\\ G(\alpha)=1+\mu\alpha\operatorname{cth}\alpha\end{gathered} \tag{1.6}$$

Факторизуем функцию $G(\alpha)$

$$G(\alpha)=K^+(\alpha)X^+(\alpha)K^-(\alpha)X^-(\alpha)$$

$$K^\pm(\alpha)=(\pi\mu)^{1/2}\Gamma(1\mp i\alpha/\pi)[\Gamma(1/2\mp i\alpha/\pi)]^{-1} \tag{1.7}$$

$$X^\pm(\alpha)=X^{\pm1}(\alpha),\quad \alpha\in C^\pm,\quad X(\alpha)=\exp\left(\frac{\alpha}{\pi i}\int\limits_0^\infty\ln G_0(x)\frac{dx}{x^2-\alpha^2}\right)$$

$$G_0(\alpha)=1+(\mu\alpha)^{-1}\operatorname{th}\alpha,\qquad \operatorname*{ind}_{(-\infty,+\infty)}G_0(\alpha)=0$$

и решим задачу по скачку

$$\omega_\pm^+(\alpha)-\omega_\pm^-(\alpha)\ =\ \frac{F^\pm(\alpha)}{K^\mp(\alpha)X^\mp(\alpha)},\qquad \omega_\pm(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F^\pm(x)\,dx}{K^\mp(x)X^\mp(x)(x-\alpha)} \tag{1.8}$$

Перепишем краевое условие (1.6) в виде

$$K^{\pm}(\alpha)X^{\pm}(\alpha)\Phi_1^{\pm}(\alpha)-e^{\pm i\alpha\lambda}[G(\alpha)]^{-1}K^{\pm}(\alpha)X^{\pm}(\alpha)\Phi_2^{\pm}(\alpha)\mp\overset{\pm}{\omega}_{\pm}(\alpha)=$$
$$=[K^{\mp}(\alpha)X^{\mp}(\alpha)]^{-1}\Phi_2^{\mp}(\alpha)\mp\omega_{\pm}^{\mp}(\alpha),\qquad |\alpha|<\infty \tag{1.9}$$

Функция $G(\alpha)=1+\mu\alpha\mathrm{cth}\alpha$ имеет счетное множество нулей $\alpha_n=\pm i\beta_n\in C^{\pm}$ ($n=1,2,\ldots$), причем все числа β_n вещественны и обладают асимптотикой $\beta_n=$ $=\pi(n-\frac{1}{2})+o(1)$, $n\to\infty$. Для устранения полюсов функции $[G(\alpha)]^{-1}$ вычтем из левой и правой части равенств (1.9) функции

$$\Psi^{\pm}(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{iA_n^{\pm}}{\alpha\pm i\beta_n} \tag{1.10}$$

и потребуем выполнения условий

$$\operatorname*{res}_{\alpha=\pm i\beta_n}\{-e^{\pm i\alpha\lambda}[G(\alpha)]^{-1}K^{\pm}(\alpha)X^{\pm}(\alpha)\Phi_2^{\pm}(\alpha)-\Psi^{\mp}(\alpha)\}=0\quad(n=1,2,\ldots) \tag{1.11}$$

Последующее использование теоремы Лиувилля приводит к формулам, определяющим решение задачи Римана (1.6)

$$\Phi_1^{-}(\alpha)\;=\;\frac{e^{-i\alpha\lambda}}{G(\alpha)}K^{-}(\alpha)X^{-}(\alpha)[\omega_{+}^{-}(\alpha)+\Psi^{-}(\alpha)]+\frac{\Psi^{+}(\alpha)-\omega_{-}^{-}(\alpha)}{K^{-}(\alpha)X^{-}(\alpha)}$$
$$\Phi_1^{+}(\alpha)=e^{i\alpha\lambda}\Phi_1^{-}(\alpha),\quad \Phi_2^{\pm}(\alpha)=K^{\pm}(\alpha)X^{\pm}(\alpha)[\Psi^{\pm}(\alpha)\mp\omega_{\mp}^{\pm}(\alpha)] \tag{1.12}$$

Подставляя формулы (1.12) в условия (1.11), приходим к бесконечной линейной алгебраической системе Пуанкаре – Коха

$$A_n^{\pm}=e^{-\lambda\beta_n}\Delta_n\left(f_n^{\mp}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_m^{\mp}}{\beta_n+\beta_m}\right) \tag{1.13}$$

$$f_n^{\pm}=-\omega_{\mp}^{\pm}(\pm i\beta_n),\quad \Delta_n=K_n^2X_n^2G_n^{-1},\quad G_n=\mu\beta_n-(\mu+1)\mathrm{ctg}\,\beta_n$$
$$K_n=\frac{(\pi\mu)^{1/2}\Gamma(1+\pi^{-1}\beta_n)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\pi^{-1}\beta_n)},\quad X_n=\exp\left(\frac{\beta_n}{\pi}\int_0^{\infty}\ln G_0(x)\frac{dx}{x^2+\beta_n^2}\right) \tag{1.14}$$

решение которой определяется рекуррентными соотношениями

$$A_n^{\pm}=e^{-\lambda\beta_n}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}^{\pm},\quad a_{n0}^{\pm}=\Delta_nf_n^{\mp},\quad a_{np}^{\pm}=\Delta_n\sum_{j=1}^{p}\frac{a_{j,p-j}^{\mp}}{\beta_n+\beta_j}e^{-\lambda\beta_j} \tag{1.15}$$

Отсюда получаем

$$A_n^{\pm}=O(n^{-1}e^{-\lambda\beta_n}),\qquad n\to\infty$$

что обеспечивает сходимость рядов (1.10) в полуплоскостях $C^{\pm}$.

При помощи обратного преобразования Фурье находим решение уравнения (1.4)

$$\chi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1^{+}(\alpha)e^{-i\alpha t}d\alpha$$

Подставляя в последнее равенство выражение (1.12) для $\Phi_1^{+}(\alpha)$, применяя теорию вычетов и используя соотношения (1.8) и (1.13), находим окончательно

$$\chi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\beta_n t}A_n^- - e^{(\lambda-t)\beta_n}A_n^+}{K_n X_n} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F^+(\alpha)e^{-i\alpha t}}{1+\mu\alpha\operatorname{cth}\alpha}d\alpha \tag{1.16}$$

Получим явное решение системы (1.13) в случае $f(x) = 1$. Тогда

$$F^+(\alpha)=(e^{i\alpha\lambda}-1)(i\alpha)^{-1}$$

решение задачи по скачку (1.8) проводить не требуется. Формулы (1.12) приобретают вид

$$\Phi_1^+(\alpha)=\frac{ig_1\alpha^{-1}+\Psi^-(\alpha)}{K^+(\alpha)X^+(\alpha)} + \frac{e^{i\alpha\lambda}}{G(\alpha)}K^+(\alpha)X^+(\alpha)\left[\frac{g_1}{i\alpha} + \Psi^+(\alpha)\right]$$

$$\Phi_2^\pm(\alpha)=\pm i\alpha^{-1}+K^\pm(\alpha)X^\pm(\alpha)[\mp ig_1\alpha^{-1}+\Psi^\pm(\alpha)] \tag{1.17}$$

$$g_1=[K^\pm(0)X^\pm(0)]^{-1}=(\mu+1)^{-1/2}$$

Коэффициенты $f_n^\pm$ определяются явно, без квадратур: $f_n^\pm = \mp\beta_n^{-1}g_1$. Вследствие этого соотношения (1.15) упрощаются:

$$\pm A_n^\pm = A_n,\quad \pm a_{nk}^\pm = a_{nk},\quad a_{n0}=\Delta_n g_1\beta_n^{-1}$$

$$A_n=e^{-\lambda\beta_n}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk},\qquad a_{np}=-\Delta_n\sum_{j=1}^{p}\frac{e^{-\lambda\beta_j}a_{j,p-j}}{\beta_n+\beta_j} \tag{1.18}$$

Отсюда находим явное выражение для коэффициентов a_{np}

$$a_{np}=\Delta_n g_1\left[-\frac{\Delta_p}{(\beta_n+\beta_p)\beta_p} + \frac{2}{\beta_n+\beta_1}\left(-\frac{e^{-\lambda\beta_1}\Delta_1}{2\beta_1}\right)^p + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{p-2}(-1)^{m+1}\sum_{j_1=1}^{\sigma(0)-1}h_1\sum_{j_2=1}^{\sigma(1)-1}h_2\ldots\sum_{j_m=1}^{\sigma(m-1)-1}\frac{h_m\Delta_{\sigma(m)}}{\beta_{\sigma(m)}(\beta_{j_m}+\beta_{\sigma(m)})}\right] \tag{1.19}$$

$$\sigma(m)=p-j_1-\ldots-j_m\quad (m=1,2,\ldots),\quad \sigma(0)=p,\ \ j_0=n,$$

$$h_m=(\beta_{j_{m-1}}+\beta_{j_m})^{-1}\Delta_{j_m}e^{-\lambda\beta_{j_m}}$$

В рассматриваемом случае вычисление квадратуры в (1.16) не требуется, и решение уравнения (1.4) при $f(t) = 1$ имеет вид

$$\chi(t)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{K_n X_n}e^{\frac{1}{2}\lambda\beta_n}\operatorname{ch}\beta_n\left(t-\frac{\lambda}{2}\right) \tag{1.20}$$

2. Растяжение упругой бесконечной полосы по стрингером. Пусть упругая полоса П $\{\,|x|<\infty,\ |y|<b\}$ с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν усилена стрингером $S=\{|x|<a,\ |y|<\frac{1}{2}h\}$ (тонким упругим стержнем, лишенным изгибной жесткости) с модулем упругости E_0 и растягивается на бесконечности равномерно распределенными усилиями интенсивности q. В условиях плоского напряженного состояния требуется определить контактные касательные напряжения (нормальные равны нулю) и осевые усилия на концах включения.

Из уравнения равновесия стрингера вытекает выражение для его горизонтальных деформаций

$$\varepsilon_x^{(0)}(x) = \frac{1}{E_0 h}\left[P_1 - \int_{-a}^{x} \tau_0(\xi)\, d\xi\right], \quad |x| < a$$

Условие равновесия включения имеет вид

$$\int_{-a}^{a} \tau_0(x)\, dx = P_1 - P_2, \quad \tau_0(x) = \tau_+(x) - \tau_-(x) \tag{2.1}$$

где $\tau_\pm(x)$ – неизвестные тангенциальные контактные напряжения на верхнем и нижнем берегах включения, а P_1 и P_2 – неизвестные осевые усилия на его концах $x = -a$ и $x = a$ соответственно. Вследствие симметрии задачи $P_1 = P_2 = P$, $\tau_+(x) = -\tau_-(x) = \frac{1}{2}\tau_0(x)$.

Примем модель [5] контакта стрингера с полосой, согласно которой совпадают горизонтальные деформации $\varepsilon_x^{(0)}(x)$ и $\varepsilon_x(x,0)$ соответственно стрингера и упругой однородной полосы, загруженной по отрезку $(-a, a)$ оси x касательными напряжениями $\tau_0(x)$, а также силами на бесконечности. Указанные деформации полосы имеют вид

$$\varepsilon_x(x,0) = \frac{q}{E} + \frac{\partial u}{\partial x}(x,0), \quad E\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

где $U(x, y)$ – функция напряжений, удовлетворяющая следующей краевой задаче:

$$\Delta^2 U(x,y) = 0, \quad |x| < \infty, \quad 0 < y < b$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{y=b} = 0, \quad -\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right|_{y=b} = 0, \quad |x| < \infty \tag{2.2}$$

$$-\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right|_{y=0} = \tau_+(x), \quad \left[\frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y}\right]_{y=0} = 0, \quad |x| < \infty$$

решение которой строится при помощи преобразования Фурье. Имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=0} = \frac{\kappa_0}{\pi E}\int_{-a}^{a} \tau_+(\xi)\int_0^\infty \sin\alpha(x-\xi)\frac{\operatorname{ch}^2 \alpha b + \kappa_1 \alpha^2 b^2 + \kappa_2}{\operatorname{sh} 2\alpha b + 2\alpha b}\, d\alpha\, d\xi$$

$$\kappa_0 = (3-\nu)(1+\nu), \quad \kappa_1 = (1+\nu)(3-\nu)^{-1}, \quad \kappa_2 = (1-\nu)^2 \kappa_0^{-1}$$

Принимая во внимание условие контакта $\varepsilon_x^{(0)}(x) = \varepsilon_x(x,0)$, $|x| < a$ и вводя новую неизвестную функцию

$$\chi(t) = \frac{2b}{P_*}\int_0^t \tau_+(-a + b\xi)\, d\xi, \quad P_* = P - \frac{E_0}{E} qh \tag{2.3}$$

приходим к интегродифференциальному уравнению

$$\chi(t) + \mu\int_0^\lambda S(t-\tau)\chi'(\tau)\, d\tau = 1, \quad 0 < t < \lambda$$

$$\mu = \frac{E_0 h \kappa_0}{4bE}, \quad \lambda = \frac{2a}{b}, \quad S(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha + \kappa_1 \alpha^2 + \kappa_2}{\operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\alpha + \alpha}\sin\alpha t\, d\alpha \tag{2.4}$$

при дополнительном условии

$$\chi(0) = \chi(\lambda) = 0 \tag{2.5}$$

которое следует из равенств (2.3) и (2.1) ($P_1 = P_2$).

Следуя схеме разд. 1 (случай $f(x) = 1$), уравнение (2.4) сводим к матричной задаче Римана (1.6), где

$$G(\alpha)=1+\mu\alpha\frac{\operatorname{ch}^2\alpha+\kappa_1\alpha^2+\kappa_2}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha+\alpha},\quad F^{\pm}(\alpha)=\pm\frac{e^{\pm i\alpha}-1}{i\alpha}$$

Факторизация функции $G(\alpha)$ определяется формулами (1.7), где в качестве функции $G_0(\alpha)$ следует взять

$$G_0(\alpha)=1+\frac{\operatorname{th}\alpha}{\mu\alpha}+\frac{(\kappa_1\alpha^2+\kappa_2)\operatorname{th}\alpha-\alpha}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha+\alpha}$$

Исследуем трансцендентное уравнение $G(\alpha) = 0$. У функции $G(\alpha)$ нет вещественных корней, а на мнимой оси два симметрично расположенных корня $\pm i\beta_1$, причем при $\mu \to \infty$, $\beta_1 \to 0$, а при $\mu \to 0$ $\beta_1 \to \infty$. Кроме того, функция $G(\alpha)$ имеет счетное множество комплексных корней $\pm\alpha_m \in C^{\pm}$, $\alpha_m = i\beta_m$, $\beta_{2m+j} = \frac{1}{2}[b_m-(-1)^j i a_m]$ ($m = 1, 2, \dots ; j = 0, 1$). Числа $z_m = a_m + ib_m$ – корни уравнения

$$\operatorname{sh} z+z+\mu z(\tfrac{1}{2}\operatorname{ch} z+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\kappa_1 z^2+\kappa_2)=0$$

и вычисляются по итеративной формуле

$$z_n^{(k)}=2\pi ni+\ln\varphi(z_n^{(k-1)})\qquad(k=2,3,\dots),\quad z_n^{(1)}=2\pi ni$$

$$\varphi(z)=\left(1+\frac{2}{\mu z}\right)^{-1}\left[-\kappa_1 z^2-2\left(1+2\kappa_2+\frac{2}{\mu}\right)+\left(\frac{2}{\mu z}-1\right)e^{-z}\right]$$

откуда находим

$$z_n=2\pi ni+\ln[4\pi^2n^2\kappa_1-2(1+2\kappa_2+2\mu^{-1})]+o(1),\quad n\to\infty$$

Решение матричной задачи Римана имеет вид (1.17), где

$$g_1=(1+2\mu\kappa_0^{-1})^{-1/2}$$

Коэффициенты A_n определяются соотношениями (1.18), (1.19), а Δ_n – формулами (1.14), где следует принять

$$G_n=\mu e_n[-\cos^2\beta_n+\beta_n\sin2\beta_n+3\kappa_1\beta_n^2-\kappa_2+2e_n\beta_n\cos^2\beta_n(\cos^2\beta_n-\kappa_1\beta_n^2+\kappa_2)],$$
$$e_n=(\sin\beta_n\cos\beta_n+\beta_n)^{-1}$$

Решение уравнения (2.4) имеет вид (1.20). На основании (2.3) и (1.20) получаем формулу для контактных напряжений

$$\tau_+(x)=-\frac{P_*}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_nA_n}{K_nX_n}e^{\frac{1}{2}\lambda\beta_n}\operatorname{sh}\frac{\beta_nx}{b}$$

Проведем анализ этой формулы при $x \to -a + 0$. Для этого сначала изучим поведение определенной в (1.17) функции $\Phi_1^+(\alpha)$ при $\alpha \to \infty$ $(0 < \arg\alpha < \pi)$. Имеем [6]

$$\frac{1}{K^+(\alpha)} = \frac{(-i\alpha)^{-1/2}}{\mu^{1/2}}\left[1+\frac{\pi}{8i\alpha}+O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\right], \quad \alpha\to\infty, \ |\arg(-i\alpha)|<\frac{\pi}{2} \tag{2.6}$$

Если $\alpha \to \infty$ в области C^+ и при этом $|\alpha - i\beta_n| > \varepsilon$ для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и любого $n = 1, 2, \ldots$, то вследствие (1.10)

$$\Psi^-(\alpha) = \frac{A^{(0)}}{i\alpha} - \frac{A^{(1)}}{(-i\alpha)^2} + O\left(\frac{1}{\alpha^3}\right), \quad \alpha\to\infty; \ A^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m^k A_m \tag{2.7}$$

Рассмотрим поведение на бесконечности функции $[X^+(\alpha)]^{-1}$. Представим функцию $G_0(x)$ в виде

$$G_0(x) = \left(1+\frac{\operatorname{th}x}{\mu x}\right)G_*(x), \quad G_*(x) = 1 + \frac{(\kappa_1 x^2+\kappa_2)\operatorname{th}x - x}{(\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x + x)[1+(\mu x)^{-1}\operatorname{th}x]}$$

а также учтем асимптотическое разложение интеграла

$$\frac{i\alpha}{\pi}\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{\operatorname{th}x}{\mu x}\right)\frac{dx}{x^2+(-i\alpha)^2} = \frac{\ln(-i\alpha)}{\pi\mu i\alpha} + \frac{u_0}{i\alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

$$\alpha\to\infty, \ |\arg(-i\alpha)| < \pi/2; \quad u_0 = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty\left[\ln\left(1+\frac{\operatorname{th}x}{\mu x}\right) - \frac{1}{\mu x}\right]dx$$

В результате на основании (1.7) получим

$$\frac{1}{X^+(\alpha)} = 1 + \frac{\ln(-i\alpha)}{\pi\mu i\alpha} + \frac{u_1}{i\alpha} + \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{(-i\alpha)^m}\sum_{k=0}^{m} c_{mk}^{(0)}\ln^k(-i\alpha)$$

$$\alpha\to\infty, \quad |\arg(-i\alpha)| < \pi/2 \tag{2.8}$$

$$u_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \ln G_0(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \ln G_*(x)\,dx + u_0$$

где коэффициенты $c_{mk}^{(0)}$ определяются. Подставляя разложения (2.6)–(2.8) в (1.17), имеем

$$-i\alpha\Phi_1^+(\alpha) \sim (-i\alpha)^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(-i\alpha)^m}\sum_{k=0}^{m} c_{mk}\ln^k(-i\alpha) + \omega(\alpha)$$

$$\alpha\to\infty, \quad |\arg(-i\alpha)| < \pi/2 \tag{2.9}$$

$$c_{00} = \mu^{-1/2}(g_1 - A^{(0)}), \quad c_{10} = -(\pi/8 + u_1)c_{00} - \mu^{-1/2}A^{(1)}, \quad c_{11} = -\pi\mu^{-3/2}$$

Функция $\omega(\alpha)$ при $\alpha \to \infty$ $(\alpha \in C^+)$ убывает как $(-i\alpha)^{-1/2}e^{i\alpha\lambda}$. Числа c_{mk} $(m \geqslant 2)$ выражаются через коэффициенты разложений (2.6)–(2.8). Принимая во внимание значения интегралов

$$\int_0^\infty \tau^{-1/2+k}e^{i\alpha\tau}d\tau = \frac{\Gamma(1/2+k)}{(-i\alpha)^{1/2+k}} \qquad (k = 0,1)$$

$$\int_0^\infty \tau^{1/2}\ln\tau e^{i\alpha\tau}d\tau = \frac{\pi^{1/2}}{2(-i\alpha)^{3/2}}\left[\psi\left(\frac{3}{2}\right)-\ln(-i\alpha)\right], \quad |\arg(-i\alpha)|<\frac{\pi}{2}$$

($\psi(x)$ – пси-функция), а также связь

$$-i\alpha\Phi_1^+(\alpha)=\int_0^\lambda \chi'(\tau)e^{i\alpha\tau}d\tau$$

и формулу (2.9), находим представление функции $\chi'(t)$ в окрестности точки $t = 0$

$$\chi'(t) \sim \sum_{m=0}^{\infty} t^{m-1/2}\sum_{k=0}^{m} D_{mk}\ln^k t+\Omega(t), \qquad t\to 0$$

$$D_{00}=(\pi\mu)^{-1/2}(g_1-A^{(0)}), \quad D_{11}=2(\pi\mu)^{-3/2}$$

$$D_{10}=-2(\pi/8+u_1)D_{00}-2(\pi\mu)^{-1/2}A^{(1)}-2(\pi\mu)^{-3/2}\psi(3/2)$$

Остальные коэффициенты D_{mk} ($m \geqslant 2$) пересчитываются через c_{mk}. Функция $\Omega(\tau)$ бесконечно дифференцируема на отрезке $[0,\lambda_*]$ для любого $\lambda_* < \lambda$ и имеет вид

$$\Omega(t) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n A_n}{K_n X_n}e^{\beta_n t}$$

Учитывая связь (2.3), находим асимптотическое разложение

$$\tau_+(x) \sim \frac{P_*}{2b}\{\Omega\left(\frac{x+a}{b}\right)+D_{00}\left(\frac{x+a}{b}\right)^{-1/2}+D_{11}\left(\frac{x+a}{b}\right)^{1/2}\ln\frac{x+a}{b} + \qquad (2.10)$$

$$+D_{10}[(x+a)/b]^{1/2}+\ldots\}, \qquad x\to -a+0$$

Аналогичное разложение получается в окрестности точки $x = a$.

Определим коэффициенты интенсивности напряжений

$$K_{\text{II}}(\pm a)=\lim_{x\to\pm a\mp 0}[2\pi(a\mp x)]^{1/2}\tau_+(x)$$

и из разложения (2.10) вследствие нечетности функции $\tau_+(x)$ находим

$$K_{\text{II}}(\pm a) = \mp P_*(2\mu b)^{-1/2}(g_1-A^{(0)})$$

Получим формулу для осевого усилия P из соотношения [2]

$$P=\int_{-h/2}^{h/2}[q+\sigma_x(a,y)]dy=$$

$$=qh+2[\partial U/\partial y(a,h/2)-\partial U/\partial y(a,0)] \qquad (2.11)$$

Пусть $U_\alpha(y)$ – трансформанта Фурье функции $U(x, y)$. Тогда из решения задачи (2.2) имеем

$$\frac{d}{dy}U_\alpha(y) = \frac{\alpha b P_* e^{i\alpha a}\Phi_1^-(\alpha b)}{2(\operatorname{sh}2\alpha b+2\alpha b)}\{(y-b)[2\operatorname{ch}\alpha y-(1+\nu)\alpha b\operatorname{sh}\alpha y]+$$

$$+\alpha^{-1}\operatorname{sh}\alpha(y-b)[2\operatorname{ch}\alpha b-(\nu-1)\alpha y\operatorname{sh}\alpha b]\}$$

Подставляя последнее выражение в (2.11) и учитывая (2.5), находим

$$P = qh(1+R)^{-1}(1+E_0E^{-1}R)$$

$$R = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\Phi_1^-(\alpha)r(\alpha)\,d\alpha \tag{2.12}$$

$$r(\alpha) = (\operatorname{sh}2\alpha+2\alpha)^{-1}\{(\lambda_0-1)[2\operatorname{ch}\lambda_0\alpha-(1+\nu)\alpha\operatorname{sh}\lambda_0\alpha]+$$
$$+\alpha^{-1}\operatorname{sh}(\lambda_0-1)\alpha[2\operatorname{ch}\alpha-\lambda_0(\nu+1)\alpha\operatorname{sh}\alpha]\},\qquad \lambda_0 = h(2b)^{-1}$$

Для вычисления интеграла (2.12) воспользуемся связью

$$e^{-i\alpha a}\int_{-a}^{a}\tau_+(x)e^{i\alpha x}\,dx = -\frac{i\alpha b}{2}P_*\Phi_1^-(\alpha b)$$

и получим

$$R = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*R_n,\quad A_n^* = \frac{\beta_nA_n}{K_nX_n}e^{\lambda\beta_n} = O(n^{-1/2}),\quad n\to\infty$$

$$R_n = \int_0^{\infty}\frac{r(\alpha)}{\alpha^2+\beta_n^2}\left[2\alpha(1-e^{-\lambda\beta_n})\cos^2\frac{\lambda\alpha}{2}-\beta_n(1+e^{-\lambda\beta_n})\sin\lambda\alpha\right]d\alpha \tag{2.13}$$

Улучшим сходимость ряда (2.13). Имеем

$$R_n = -\frac{r_0}{\beta_n}+O\left(\frac{1}{\beta_n^2}\right),\quad n\to\infty;\qquad r_0 = \int_0^{\infty}\sin\lambda\alpha r(\alpha)\,d\alpha$$

$$A_n^* = \tfrac{1}{2}(\mu\beta_n)^{-1/2}(g_1-A^{(0)})+O(n^{-3/2}\ln n),\quad n\to\infty$$

и приходим к более удобным при численной реализации соотношениям ($\zeta(x)$ – ζ-функция Римана)

$$R = -Q\zeta\left(\frac{3}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}d_n,\quad d_n = O\left(\frac{\ln n}{n^{5/2}}\right),\quad n\to\infty$$

$$d_n = \pi^{-1}A_n^*R_n+Qn^{-3/2},\quad Q = \mu^{-1/2}\pi^{-5/2}r_0(q_1-A^{(0)})$$

Заметим, что коэффициенты $B_n = e^{\lambda\beta_n}A_n$ можно вычислять не только при помощи формул (1.18), (1,19), но и по следующей итеративной формуле:

$$B_n^{(k)} = \Delta_n\left(\frac{g_1}{\beta_n}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\beta_n}}{\beta_n+\beta_m}B_m^{(k-1)}\right)\qquad (k=2,3,\ldots),\quad B_n^{(1)} = \frac{\Delta_ng_1}{\beta_n}$$

где $B_n^{(k)}$ – k-е приближение коэффициента B_n.

Численные расчеты проведены для задачи о растяжении бесконечной полосы с упругим включением. Ниже представлены значения безразмерных величин $P^0 = 2(qh)^{-1}P$ (P – осевое усилие на конце стрингера) и $P_*^0 = 2(qh)^{-1}P_*$ в случае $\nu = 0{,}3$, $\lambda = 2ab^{-1} = 10$, $\lambda_0 = h(2b)^{-1} = 0{,}01$ для некоторых значений $k = E_0E^{-1}$

k	0,1	1	2	5	10	100	1000
P^0	1,54	2	2,48	3,60	4,98	13,4	19,1
P_*^0	1,34	0	–1,52	–6,40	–15,0	–187	–1981

$a^{-1}x$	$k = 0,1$	2	10	100
0,1	–0,001	–0,029	–0,030	4,19
0,3	–0,006	–0,067	0,815	21,3
0,5	0,065	1,65	13,0	80,7
0,7	0,901	18,8	96,7	275
0,9	11,1	235	956	1140
0,95	47,4	999	2915	2106

В таблице приведены соответствующие тем же величинам ν, λ и λ_0 значения функции $\tau_+^0(x) = -10^4 P_*^{-1} \tau_+(x)$ для некоторых значений x и k.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антипов Ю.А.* Аналитическое решение смешанных задач математической физики со сменой граничных условий по кольцу // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 3. С. 51–58.
2. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
3. *Арутюнян Н.Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 632–646.
4. *Морарь Г.А., Попов Г.Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 3. С. 412–421.
5. *Штернберг Э.* Передача нагрузки и диффузия нагрузки в статике упругого тела // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1972. № 6(136). С. 112–149.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.

Одесса

Поступила в редакцию
18.III.1992