УДК 539.3+624.074

© 1993 г. В.Д. Потапов

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ

Получены достаточные условия устойчивости нулевого решения систем интегродифференциальных уравнений при достаточно общих предположениях относительно ядер интегральных операторов и вида случайных коэффициентов. Отыскиваются также аналогичные условия устойчивости в случае экспоненциального ядра и стохастических коэффициентов в виде гауссовского белого шума с целью определения более широкой области устойчивости в пространстве параметров системы. Если в предыдущих работах анализировалась устойчивость нулевого решения уравнения движения вязкоупругого стержня в среднеквадратичном, то ниже рассматривается устойчивость вязкоупругой системы по вероятности.

Решение задачи об устойчивости решений систем интегродифференциальных уравнений со случайными параметрами, которыми, в частности, описывается поведение вязкоупругих систем, находящихся под действием стохастических нагрузок, вызывает значительные трудности. Если мера вязкости материала конструкции мала, а также случайные флуктуации нагрузок малы в среднеквадратичном, эти трудности могут быть преодолены с помощью асимптотического метода [1, 2]. Для ядра интегрального оператора, представимого суммой экспонент, и нагрузок, являющихся гауссовским белым шумом, были найдены [3, 4] необходимые и достаточные условия устойчивости по отношению к статистическим моментам. При тех же предположениях относительно нагрузок и ядра получено [5] достаточное условие устойчивости почти наверное, которое совпадает с условием устойчивости в среднеквадратичном [3, 4] при отсутствии внешнего демпфирования. Было найдено [6] достаточное условие устойчивости в среднеквадратичном для общего случая ядра ползучести материала и продольной силы в виде дельта-коррелированного стационарного процесса.

1. Общий случай. В дальнейшем решение системы уравнений будет называться устойчивым почти наверное [7–9] (устойчивым по вероятности в сильном смысле [10]) при $t > 0$, если

$$P\left\{\lim_{\|x_0\|\to 0}\sup_{t>0}\|x(t,x_0)\|=0\right\}=1$$

Это условие можно представить в несколько иной эквивалентной форме

$$\lim_{\delta\to 0}P\left\{\sup_{\|x_0\|<\delta}\sup_{t>0}\|x(t,x_0)\|>\varepsilon\right\}=0$$

где ε – любое малое положительное число.

Под $\|x(t)\|$, $\|x_0\|$ понимается норма решений в моменты времени t и $t = 0$.

Решение $\mathbf{x}(t)$ почти наверное асимптотически устойчиво, если выполняется предыдущее условие и, кроме того, найдется $\delta > 0$ такое, что при $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ для любого малого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{t_1 \to \infty} P\left\{\sup_{t > t_1} \|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)\| > \varepsilon\right\} = 0$$

Рассмотрим систему линейных интегродифференциальных уравнений

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{G}_1\Gamma\mathbf{x} + \mathbf{D}_1\dot{\mathbf{x}} \tag{1.1}$$

$$\Gamma x_j = \int_0^t \hat{\Gamma}(t - \tau) x_j(\tau) d\tau$$

где $\mathbf{x} = \{x_j\}$ – вектор неизвестных, $j = 1,2,\ldots,n_1$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{D}_1$ – квадратные $(n_1 \times n_1)$-матрицы, ядро $\hat{\Gamma}(t - \tau)$ представляет собой строго монотонно убывающую функцию, которая удовлетворяет условию

$$0 \leqslant \int_0^\infty \hat{\Gamma}(\theta) d\theta < 1, \quad 0 \leqslant \hat{\Gamma}(\theta) \quad \text{при} \quad \theta \geqslant 0$$

Путем расширения фазового пространства уравнение (1.1) можно записать в виде системы уравнений относительно первых производных

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{G}\Gamma\mathbf{z} \tag{1.2}$$

Вектор $\mathbf{z}$ содержит $n = 2n_1$ компонент, $\mathbf{A}$, $\mathbf{G}$ – квадратные $(n \times n)$-матрицы.

В дальнейшем будем считать, что матрица $\mathbf{A}$ может быть записана в виде суммы $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{F}(t)$, где матрицы $\mathbf{D}$, $\mathbf{G}$ постоянные (матрица $\mathbf{D}$ – устойчивая), а $\mathbf{F}(t)$ – матрица, элементы которой являются случайными стационарными эргодическими процессами.

Матрицу $\mathbf{F}(t)$ можно представить следующим образом:

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{k=1}^{m} f_k(t)\mathbf{F}_k, \quad m \leqslant n_1^2$$

причем $\mathbf{F}_k$ – постоянные матрицы, $f_k(t)$ – случайные стационарные функции, считающиеся ограниченными, интегрируемыми и эргодическими.

Введем положительно определенную квадратичную форму $V = \mathbf{z}^*\mathbf{P}\mathbf{z}$. Здесь и далее звездочка означает транспонированную матрицу.

Используя обозначение $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{1/2}\mathbf{z}$, квадратичную форму V можно записать в виде квадрата нормы вектора $\mathbf{y}$

$$V = \mathbf{y}^*\mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|^2$$

Матрица $\mathbf{P}^{1/2}$ определяется выражением

$$\mathbf{P}^{1/2} = \mathbf{W}\mathbf{L}^{1/2}\mathbf{W}^*, \quad \mathbf{L}^{1/2} = \mathrm{diag}[\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2}]$$

где $\mathbf{W}$ – матрица ортонормированных собственных векторов симметричной матрицы $\mathbf{P}$, $\mathbf{L}$ – диагональная матрица собственных значений той же матрицы.

Производная квадратичной формы вдоль траектории решения уравнения (1.2) равна

$$\dot{V} = \mathbf{y}^*(\mathbf{B}^* + \mathbf{B})\mathbf{y} + \sum_{k=1}^{m} f_k(t)\mathbf{y}^*(\mathbf{C}_k^* + \mathbf{C}_k)\mathbf{y} + \tag{1.3}$$

$$+ \mathbf{y}^*\mathbf{H}(\Gamma\mathbf{y}) + (\Gamma\mathbf{y})^*\mathbf{H}^*\mathbf{y}$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{P}^{1/2}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1/2},\quad \mathbf{C}_k=\mathbf{P}^{1/2}\mathbf{F}_k\mathbf{P}^{-1/2},\quad \mathbf{H}=\mathbf{P}^{1/2}\mathbf{G}\mathbf{P}^{-1/2}$$

Для квадратичных форм известны неравенства [11]

$$\mathbf{y}^*(\mathbf{B}^*+\mathbf{B})\mathbf{y}\leqslant\eta\|y\|^2,\quad y^*(\mathbf{C}_k^*+\mathbf{C}_k)y\leqslant\mu_k\|y\|^2$$

Здесь η, μ_k – максимальные собственные значения матриц $\mathbf{B}^*+\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}_k^*+\mathbf{C}_k$ (μ_k – максимальное по модулю значение).

Опираясь на неравенство Коши–Буняковского–Шварца [12], можно записать

$$\mathbf{y}^*\mathbf{H}(\Gamma\mathbf{y})\leqslant n\rho\|\mathbf{y}(t)\|\int_0^t\hat{\Gamma}(t-\tau)\|\mathbf{y}(\tau)\|d\tau$$

$$\rho=\max_{i,j}|h_{ij}|$$

В результате из (1.3) имеем

$$2\frac{d}{dt}\|\mathbf{y}(t)\|\leqslant\left(\eta+\sum_{k=1}^m\mu_k\left|f_k(t)\right|\right)\|\mathbf{y}(t)\|+ \tag{1.4}$$

$$+2n\rho\int_0^t\hat{\Gamma}(t-\tau)\|y(\tau)\|d\tau$$

Воспользуемся подстановкой

$$\|y(t)\|=e^{\eta t/2}r(t),\quad r(t)\geqslant0$$

после чего неравенство (1.4) принимает вид

$$\dot{r}(t)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\mu_k\left|f_k(t)\right|r(t)+n\rho\int_0^t\hat{\Gamma}(t-\tau)e^{-\eta(t-\tau)/2}r(\tau)d\tau$$

или

$$\dot{r}(t)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\mu_k\left|f_k(t)\right|\upsilon(t)+n\rho\upsilon(t)\int_0^t\hat{\Gamma}(\theta)e^{-\eta\theta/2}d\theta \tag{1.5}$$

$$\left(\upsilon(t)=\max_{\tau\in[0,t]}r(\tau)\right)$$

Далее предполагаем ядро $\hat{\Gamma}(\theta)$ таким, что функция

$$\Phi(t)=\int_0^t\hat{\Gamma}(\theta)e^{-\eta\theta/2}d\theta\geqslant0 \tag{1.6}$$

интегрируема и

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\Phi(\tau)d\tau=c\quad c=\mathrm{const}$$

Интегрируя обе части неравенства (1.5), найдем

$$r(t)\leqslant\upsilon(t)\leqslant\|\mathbf{y}(0)\|+$$

$$+\int_0^t\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\mu_k\left|f_k(\tau)\right|+n\rho\Phi(\tau)\right]\upsilon(\tau)d\tau$$

На основании леммы Гронуолла–Беллмана [12] имеем

$$\upsilon(t)\leqslant\|\mathbf{y}(0)\|\exp\left\{\int_0^t\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\mu_k\left|f_k(\tau)\right|+n\rho\Phi(\tau)\right]d\tau\right\}$$

или

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq \|\mathbf{y}(0)\| \exp\left\{\left[\frac{\eta}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\mu_k \frac{1}{t}\int_0^t |f_k(\tau)|d\tau + n\rho\frac{1}{t}\int_0^t \Phi(\tau)d\tau\right]t\right\}$$

Очевидно, что норма $\| \mathbf{y} \|$ при $t \to \infty$ стремится к нулю, если выражение в квадратных скобках при этом является отрицательной величиной.

Из условия эргодичности стационарных функций $f_k(t)$ следует

$$\langle |f_k| \rangle = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |f_k(\tau)|d\tau$$

Здесь угловыми скобками обозначено усреднение по множеству реализаций.

В результате нулевое решение системы интегродифференциальных уравнений (1.1) является почти наверное асимптотически устойчивым, если выполняется условие

$$\eta + \sum_{k=1}^{m} \mu_k \langle |f_k| \rangle + 2n\rho c < 0 \tag{1.7}$$

Таким образом, требование эргодичности стохастических коэффициентов уравнений позволяет сформулировать условия устойчивости для широкого класса стационарных процессов, с помощью которых может быть описано параметрическое возбуждение реальных вязкоупругих систем.

Пример. При исследовании устойчивости сжатого вязкоупругого стержня, шарнирно опертого по концам, уравнение относительно амплитуды синусоидального прогиба (при начальных возмущениях, задаваемых также в виде синусоиды) имеет вид

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + (1-\alpha)x - f(t)x - \Gamma x = 0 \tag{1.8}$$

где 2ε – коэффициент, характеризующий влияние внешнего демпфирования, α – безразмерный параметр внешней постоянной сжимающей силы ($\alpha < 1$), а $f(t)$ – случайный стационарный процесс, пропорциональный переменной составляющей продольной силы, математическое ожидание которой считается равным нулю.

Матрицы **D**, **G**, **F** имеют вид

$$\mathbf{D} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1+\alpha & -2\varepsilon \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{F} = f(t)\mathbf{G}$$

Ядро $\hat{\Gamma}(t-\tau)$ примем в виде (κ и R – постоянные):

$$\hat{\Gamma}(t-\tau) = \kappa R \exp[-\kappa(t-\tau)] \quad (0 \leq R < 1)$$

В этом случае

$$\Phi(t) = \kappa R(\kappa + \eta/2)^{-1}\{1 - \exp[-(\kappa+\eta/2)t]\}$$

$$I(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \Phi(\tau)d\tau = \frac{\kappa R}{\kappa + \eta/2}\left\{1 - \frac{1}{(\kappa+\eta/2)t}\left[1 - e^{-(\kappa+\eta/2)t}\right]\right\}$$

Если κ таково, что $\kappa + \eta/2 > 0$, то

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = c = \kappa R(\kappa + \eta/2)^{-1}$$

Тогда неравенство (1.7) записывается следующим образом:

$$\eta + \mu\langle |f| \rangle + 4\rho c < 0$$

Если $\kappa >> \eta/2$, то можно положить

$$\eta + \mu\langle|f|\rangle + 4\rho R < 0$$

Отсюда найдем

$$\langle|f|\rangle < -(\eta + 4\rho R)/\mu \qquad (1.9)$$

В качестве матрицы **P** возьмем

$$\mathbf{P} = \begin{Vmatrix} 1-\alpha+2\varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{Vmatrix}$$

которая была получена в [9] для уравнения (1.8) (при $\Gamma x \equiv 0$) из условия определения наибольшей области устойчивости в пространстве параметров уравнения.

Для этой матрицы собственные значения и отвечающие им векторы равны

$$\lambda_1 = 1-\alpha/2+\varepsilon^2+k, \quad \lambda_2 = 1-\alpha/2+\varepsilon^2-k$$

$$\mathbf{W}_1 = (1+r^2)^{-1/2}\begin{Vmatrix} 1 \\ -r \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = (1+r^2)^{-1/2}\begin{Vmatrix} r \\ 1 \end{Vmatrix}$$

$$k = [\varepsilon^4 + (1-\alpha)\varepsilon^2 + \alpha^2/4]^{1/2}, \quad r = -\alpha/(2\varepsilon) + \varepsilon - k/\varepsilon$$

На фиг. 1–3 показаны графики изменения параметров η, μ, ρ при разных значениях ε в зависимости от изменения параметра α. Используя эти графики при заданных значениях R, ε, нетрудно найти оценку величины $\langle|f|\rangle$. Заметим, что при малых значениях ε величина R допускается малой.

2. Частный случай. Условие устойчивости в форме (1.7) получено при достаточно общих предположениях относительно вида ядер интегрального оператора Γx и стохастических процессов $f_k(t)$. В силу этого оценки характерных параметров системы, обеспечивающие устойчивость решения уравнений (1.1) почти наверное, оказываются весьма стеснительными, что объясняется, в частности, достаточно грубыми оценками интегральных слагаемых в неравенстве (1.4), а также ограничением на характер изменения ядра $\hat{\Gamma}(t-\tau)$, представленном в форме (1.6). Указанные ограничения можно ослабить, если рассмотреть частные случаи ядра $\hat{\Gamma}(t-\tau)$ и функций $f_k(t)$.

В теории вязкоупругости часто используется предположение о том, что ядро операторов релаксации и ползучести материала может быть представлено в виде суммы экспонент (κ_j и R_j – постоянные):

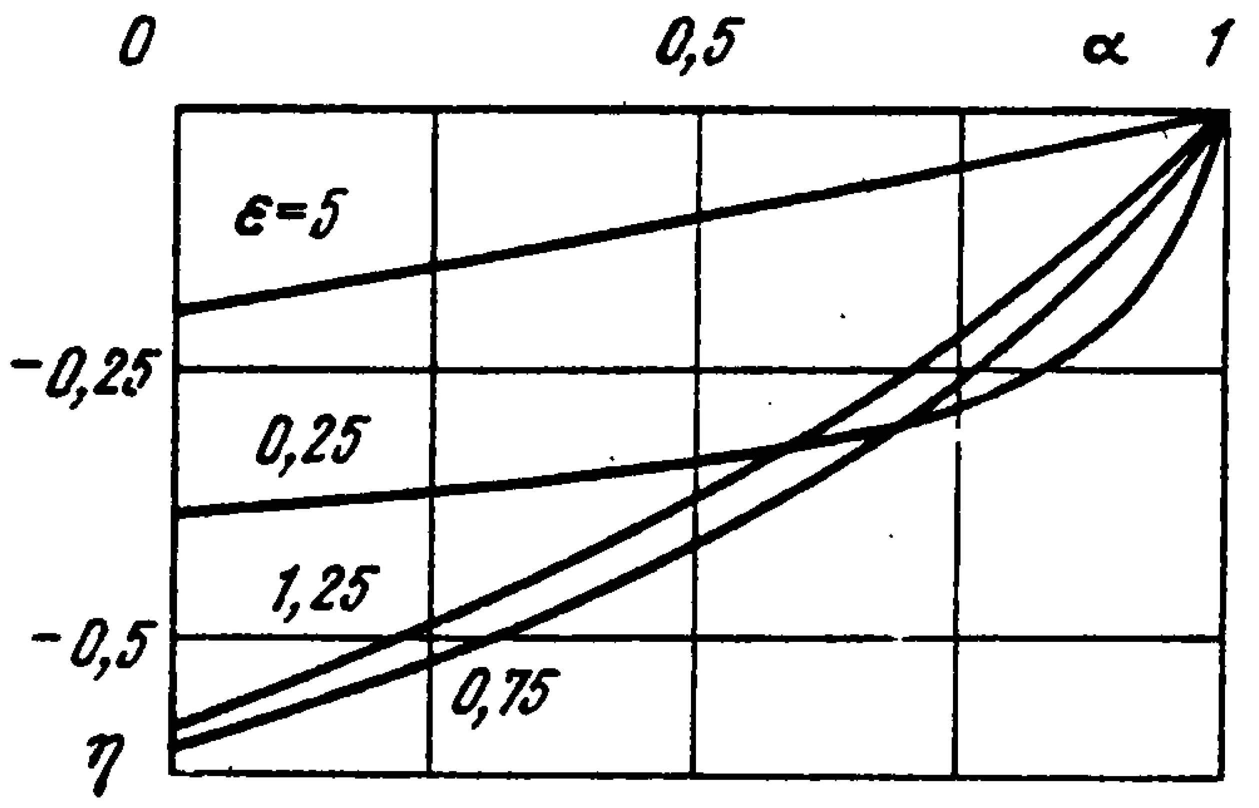
$$\hat{\Gamma}(t-\tau) = \sum_{j=1}^{l} \kappa_j R_j \exp[-\kappa_j(t-\tau)]$$

Далее остановимся на рассмотрении ядер такого типа.

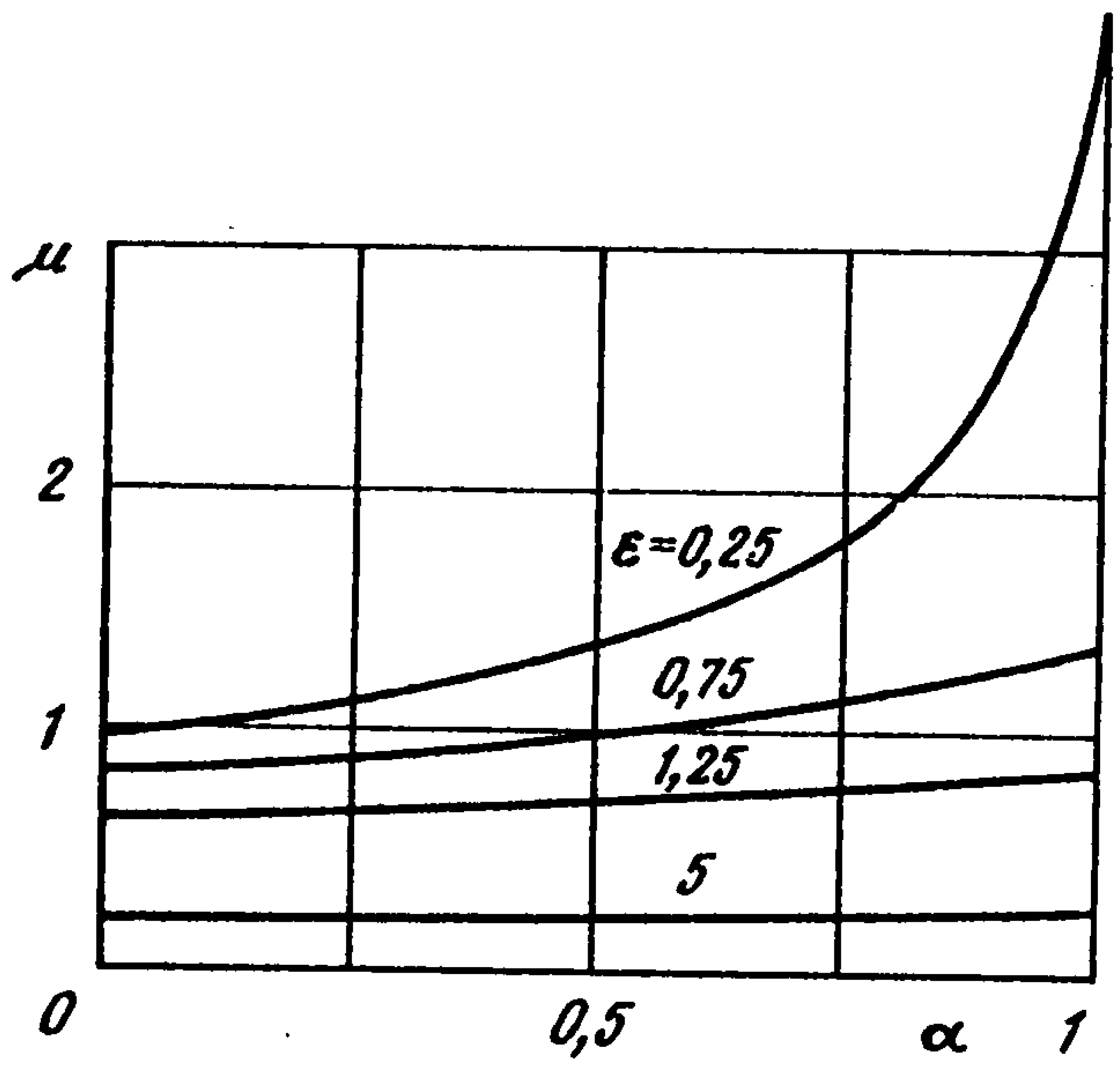
С помощью подстановки

$$\mathbf{u}_j = \int_0^t \kappa_j R_j \exp[-\kappa_j(t-\tau)]\mathbf{z}(\tau)d\tau$$

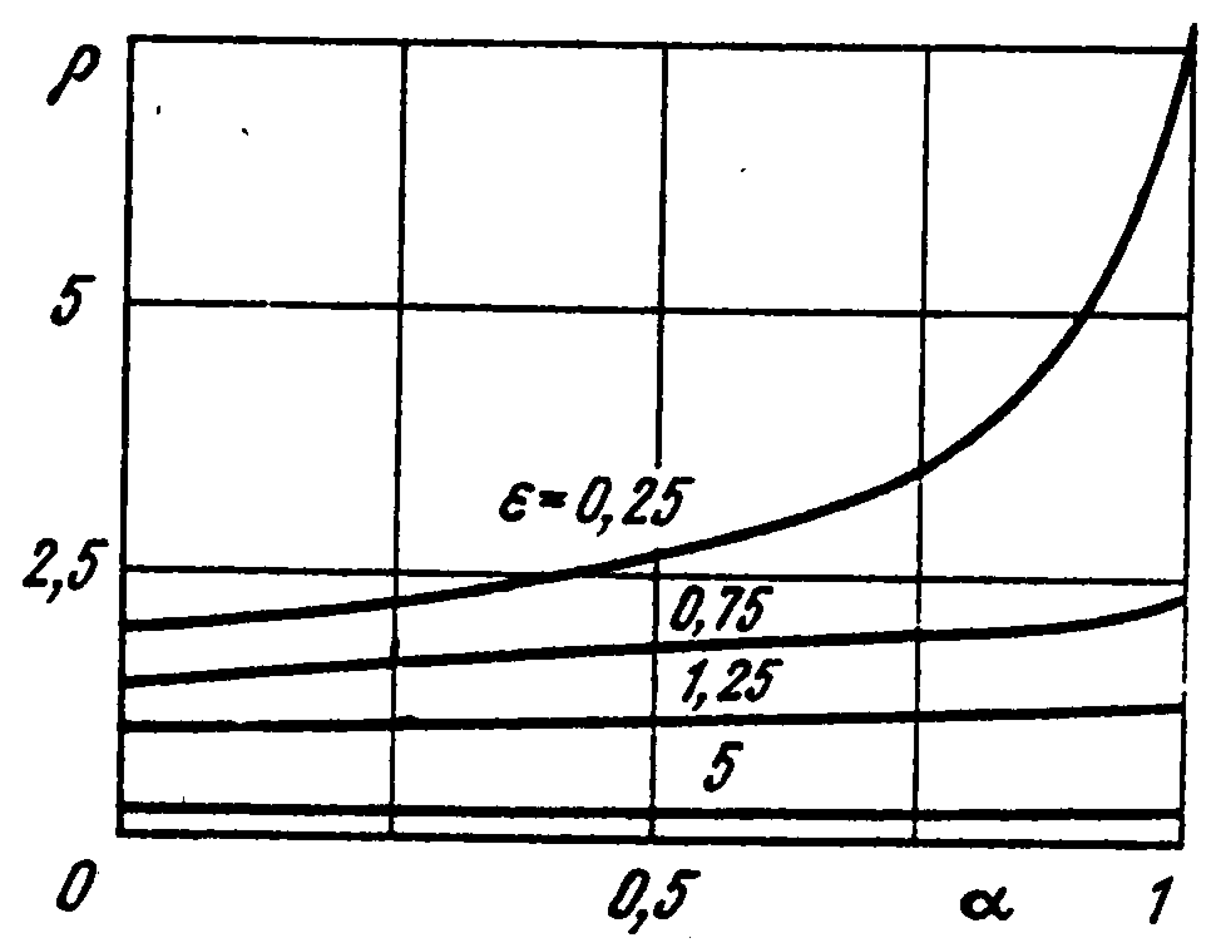
система интегродифференциальных уравнений (1.2) заменяется системой диффе-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ренциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{G}\sum_{j=1}^{l}\mathbf{u}_j \qquad (2.1)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_j = \kappa_j R_j \mathbf{z} - \kappa_j \mathbf{u}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, l)$$

Уравнение (2.1) вновь можно записать в виде (**E** – единичная матрица)

$$\dot{\mathbf{w}} = \left[\mathbf{S} + \sum_{k=1}^{m} f_k(t)\mathbf{M}_k\right]\mathbf{w}$$

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{G} & \mathbf{G} & \ldots & \mathbf{G} \\ \mathbf{E}_1 & -\mathbf{N}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \mathbf{E}_2 & 0 & -\mathbf{N}_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mathbf{E}_l & 0 & 0 & \ldots & -\mathbf{N}_l \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{M}_k = \begin{Vmatrix} \mathbf{F}_k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{Vmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{u}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{u}_l \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{E}_i = \kappa_i R_i \mathbf{E}, \quad \mathbf{N}_i = \kappa_i \mathbf{E}$$

Далее по матрице **S** можно построить положительно определенную квадратичную форму [13] и, исходя из нее, почти дословно повторяя рассуждения предыдущего раздела, получить условие устойчивости в форме неравенства, аналогичного неравенству (1.7)

$$\eta+\sum_{k=1}^{m}\mu_k\left\langle\left|f_k\right|\right\rangle<0$$

3. Гауссовский белый шум. Если стационарные процессы являются гауссовскими белыми шумами, то изложенный подход в прямом виде оказывается неприемлемым. В этом случае следует обратиться к теории марковских процессов [10]. Особенности решения задачи при таком подходе рассмотрим на примере уравнения

$$\ddot{x}+(1-\alpha)x-\int_0^t \kappa R e^{-\kappa(t-\tau)}x(\tau)d\tau+2\varepsilon\dot{x}-\beta\xi(t)x=0 \tag{3.1}$$

где $\xi(t)$ – гауссовский белый шум, $\varepsilon \geqslant 0$, $\kappa \geqslant 0$, $0 \leqslant R < 1$.

Запишем уравнение (3.1) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{B}\mathbf{x}+\xi\mathbf{C}\mathbf{x} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{x}=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1+\alpha & -2\varepsilon & 1 \\ \kappa R & 0 & -\kappa \end{Vmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$x_3=\int_0^t \kappa R e^{-\kappa(t-\tau)}x_1(\tau)d\tau$$

Запишем положительно определенную квадратичную форму (a_{ij} – постоянные)

$$V=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+x_3^2$$

Условием ее положительной определенности является выполнение неравенств

$$\begin{gathered} a_{11}>0,\quad a_{22}>0,\quad a_{11}+a_{22}+a_{11}a_{22}-a_{12}^2-a_{13}^2-a_{23}^2>0, \\ a_{12}^2+a_{23}^2a_{11}+a_{22}a_{13}^2-2a_{12}a_{23}a_{13}-a_{11}a_{22}>0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Известно [10], что нулевое решение системы (3.2) устойчиво по вероятности в сильном смысле, если соблюдается условие

$$LV=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}b_{ij}x_j\frac{\partial V}{\partial x_i}+\frac{\beta^2}{2}x_1^2\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\leqslant 0$$

После всех подстановок получим

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}LV=[-(1-\alpha)a_{12}+\kappa R a_{13}+\tfrac{1}{2}\beta^2 a_{22}]x_1^2+ \\ &+[a_{11}-2\varepsilon a_{12}-(1-\alpha)a_{22}+\kappa a_{23}R]x_1x_2+ \\ &+[-(1-\alpha)a_{23}+a_{12}+\kappa R-\kappa a_{13}]x_1x_3+ \\ &+(a_{12}-2\varepsilon a_{22})x_2^2+(a_{13}-2\varepsilon a_{23}-\kappa a_{23}+ \\ &+a_{22})x_2x_3+(a_{23}-\kappa)x_3^2\leqslant 0 \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы коэффициент при x_1^2 был отрицательным, а все остальные равны нулю. Тогда

$$a_{11}=a(1-\alpha+4\varepsilon^2)\Delta-\kappa^2 R,\quad a_{12}=2\varepsilon a\Delta$$

$$a_{22}=a\Delta,\ a_{23}=\kappa,\quad a_{13}=a[(2\varepsilon+\kappa)^2-\Delta]$$

$$\beta^2<2[2\varepsilon(1-\alpha)+\kappa R-\kappa R(2\varepsilon+\kappa)^2/\Delta] \tag{3.4}$$

$$(a=\kappa/(2\varepsilon+\kappa),\quad \Delta=1-R-\alpha+\kappa(2\varepsilon+\kappa))$$

Условия (3.3) сводятся к следующим неравенствам:

$$\Delta>0,\ \ (1-\alpha+4\varepsilon^2)\Delta-\kappa(2\varepsilon+\kappa)R>0 \tag{3.5}$$

$$\Delta(2-\alpha+4\varepsilon^2-\kappa^2 R)-\alpha a\Delta^2-$$

$$-\kappa(2\varepsilon+\kappa)[1+R-2\Delta+(2\varepsilon+\kappa)^2]>0$$

$$(1-\alpha-R)\left\{[2\varepsilon(1-\alpha)+\kappa R]\Delta-\kappa(2\varepsilon+\kappa)^2 R\right\}>0$$

Итак, нулевое решение уравнения (3.1) устойчиво почти наверное, если соблюдаются условия (3.4) и (3.5).

Можно убедиться, что при достаточно малых κ и $1-\alpha-R>0$ (условие устойчивости при квазистатической постановке задачи при $\beta=0$) неравенства (3.5) удовлетворяются. Следовательно, в этом случае условием устойчивости является выполнение неравенства (3.4).

Если $\kappa=R=0$, то из (3.4) имеем

$$\beta^2<4\varepsilon(1-\alpha) \tag{3.6}$$

Если $\varepsilon=0$, то

$$\beta^2<2\,\kappa\,R(1-\alpha-R)(1-\alpha-R+\kappa^2)^{-1}$$

Заметим, что эти оценки величины β^2 совпадают с аналогичными оценками, полученными из условия устойчивости решения в среднеквадратичном.

Таким образом, область изменения значений параметра β^2 в этом случае совпадает с той, которая определяется из условия устойчивости решения $x\equiv 0$ в среднеквадратичном.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапов В.Д.* Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1985. 312 с.
2. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. М.: Наука, 1989. 175 с.
3. *Потапов В.Д.* Устойчивость вязкоупругого стержня, находящегося под действием случайной стационарной продольной силы // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 105–110.
4. *Potapov V.D.* On the stability of viscoelastic beams under a stachastic excitation // Creep in Structures: IUTAM Sympos. Cracow, Poland, 1990.; Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 1991. P. 609–614.
5. *Tylikowski A.* Stability and bounds on motion of viscoelastic columns with imperfections and time-dependent forces // Creep in Structures: IUTAM Sympos. Cracow, 1990. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 1991. P. 653–658.

6. *Дроздов А.Д., Колмановский В.Б.* Устойчивость вязкоупругих стержней при случайной продольной нагрузке // ПМТФ. 1991. № 5. С. 124–131.
7. *Caughey T.K., Gray A.H.* On the almost sure stability of linear dynamical systems with stochastic coefficients // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. № 2. P. 365–372.
8. *Infante E.F.* On the stability of some linear nonautonomous random systems // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1968. V. 35. № 1. P. 7–12.
9. *Kozin F., Wu C.-M.* On the stability of linear stochastic differential equations // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1973. V. 40. № 1 P. 87–92.
10. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 368 с.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
12. *Беккенбах Э., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.
13. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.

Москва

Поступила в редакцию
8.VII.1992