

УДК 539.3

© 1993 г. М.П. Лазарев

## СДВИГОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХФАЗНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Рассматривается периодическая структура, состоящая из чередующихся слоев двух различных упругих твердых фаз одного и того же химического вещества. Предполагается, что фазовый переход сопровождается малой аффинной "собственной" деформацией (СД), которая переводит опорную конфигурацию фазы "плюс" в опорную конфигурацию фазы "минус". Градиенты перемещений, вызванных СД, задаются постоянным тензором  $\Delta_{ij}$ . Границы между слоями различных фаз считаются когерентными [1], т.е. такими, на которых до и после превращения сохраняется соседство частиц. Изучается устойчивость равновесной системы, в которой фазы находятся в однородных состояниях с постоянными градиентами  $k_{ij}^{\pm}$  перемещений, отсчитываемых от опорных конфигураций. Связь между тензорами  $k_{ij}^+$  и  $k_{ij}^-$

определяется соотношениями (1), (2) работы [2]. Из этих формул, в частности, вытекает, что для периодической структуры состояния в слоях одной фазы совпадают. Состояние в слоях фазы "минус" однозначно определяется по заданному состоянию фазы "плюс", СД превращения и известным упругим модулям фаз.

В отличие от рассмотренного ранее [3] частного случая рассматривается общая ситуация, когда произвольно заданы как тензоры  $k_{ij}^{\pm}$ ,  $\Delta_{ij}$ , так и толщины слоев. Проанализировано влияние указанных параметров на устойчивость двухфазной периодической структуры. Обнаружен эффект "сдвиговой неустойчивости", который является отличительной чертой гетерогенных слоистых структур с когерентными межфазными границами.

**I. Постановка задачи.** Рассмотрим декартову систему координат  $(x, z)$ . Пусть  $z \in (0, 2H_+)$  – слой фазы "плюс", а  $z \in (-2H_-, 0)$  – слой фазы "минус". Вопрос об устойчивости кусочно-однородных конфигураций с плоскими межфазными границами сводится [1] к анализу знакоопределенности собственных спектральных значений  $\pi$  системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Специальные краевые условия этой системы содержат информацию о напряженном состоянии фаз. Если для рассматриваемой равновесной конфигурации существует хотя бы одно отрицательное собственное значение  $\pi$  спектральной задачи, то такая конфигурация оказывается неустойчивой. Для случая изотропных несжимаемых фаз, находящихся в состоянии плоской деформации [4] (плоскость деформирования перпендикулярна слоям), спектральная задача имеет следующий вид [3]:

внутри фаз

$$c_{1\pm}^2 \left( \frac{\partial^2 a_1^{\pm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_1^{\pm}}{\partial z^2} \right) - m^{-1} \frac{\partial p'_{\pm}}{\partial x} + \pi a_1^{\pm} = 0 \quad (1.1)$$

$$c_{1\pm}^2 \left( \frac{\partial^2 a_1^\pm}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_2^\pm}{\partial z^2} \right) - m^{-1} \frac{\partial p'_\pm}{\partial z} + \pi a_2^\pm = 0, \quad \frac{\partial a_1^\pm}{\partial x} - \frac{\partial a_2^\pm}{\partial z} = 0$$

на межфазной границе

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial a_1}{\partial x} - \beta \frac{\partial a_2}{\partial x} \right] &= 0, \quad \left[ -m^{-1} p' + 2c_1^2 \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] = 0 \\ \left[ c_1^2 \left( \frac{\partial a_1}{\partial z} + \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) + \alpha \frac{\partial a_2}{\partial x} \right] &= 0 \\ \alpha \frac{\partial a_1^-}{\partial x} - \beta c_{1+}^2 \left( \frac{\partial a_1^+}{\partial z} + \frac{\partial a_2^+}{\partial x} \right) - 2c_{1+}^2 \frac{\partial a_2^+}{\partial z} + m^{-1} p'_+ &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\alpha \equiv \frac{[2c_1^2(\kappa_{11} - \kappa_{22})]}{[\kappa_{22} + \Delta_{22}]} = -m^{-1} \Delta^{-1} ((\sigma_{11}^+ - \sigma_{22}^+)(1 - \chi^{-1}) + 4\mu_- \Delta_{11})$$

$$\beta \equiv \frac{[\kappa_{12} + \Delta_{12}]}{[\kappa_{22} + \Delta_{22}]} = \Delta^{-1} (2\Delta_{(12)} + (\chi - 1)\sigma_{12}^+ / \mu_+) \quad (1.3)$$

$$\Delta \equiv \Delta_{11} + \Delta_{22}, \quad \chi \equiv \mu_+ / \mu_-, \quad \sigma_{ij} \equiv -p\delta_{ij} + 2\mu\kappa_{(ij)}, \quad i, j = 1, 2.$$

Здесь  $c_1$  – скорость поперечных объемных волн,  $m$  – плотность массы в начальной однофазной конфигурации,  $a_i(x, z)$  – возмущения (вариации) поля перемещений частиц,  $i = 1$  соответствует направлению вдоль оси  $x$ ,  $i = 2$  – вдоль оси  $z$ ,  $p'(x, z)$  – предельное для несжимаемых фаз значение величины  $-\lambda(\partial a_1/\partial x + \partial a_2/\partial z)$ , где  $\lambda$  – коэффициент Ламе, символ  $[ ]$  означает скачок:  $[a] \equiv a_+ - a_-$ ,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\alpha, \beta$  – параметры напряженного состояния равновесной двухфазной конфигурации.

Рассмотрим устойчивость периодической структуры по отношению к возмущениям поля перемещений  $a_i^\pm$  и давления  $p'_\pm$ , имеющим периодический характер, т.е.

$$\begin{aligned} a_i(x, z) &= a_i(x, z \pm 2(H_+ + H_-)) \\ p'(x, z) &= p'(x, z \pm 2(H_+ + H_-)) \end{aligned} \quad (1.4)$$

При анализе равновесия и устойчивости указанной системы естественным образом выделяется "периодическая ячейка" толщины  $2(H_+ + H_-)$ , состоящая из двух соседних слоев. Все характеристики системы повторяются при переходе от одной ячейки к другой. Решения спектральной задачи на внешних границах ячейки подчиняются условиям сшивания.

Назовем двухфазную периодическую структуру устойчивой, если периодическим вдоль оси  $z$  и имеющим колебательный характер вдоль межфазных границ решениям  $a_i(x, z), p'(x, z)$  спектральной задачи (1.1), (1.2) соответствуют неотрицательные собственные значения  $\pi$ . Если среди собственных значений имеются отрицательные, то соответствующую систему будем называть неустойчивой.

**2. Симметричные и антисимметричные возмущения.** Общее решение системы дифференциальных уравнений (1.1) в ячейке  $z \in (-2H_-, 2H_+)$  можно представить в виде суммы симметричных  $f_i^\pm, p'_{f\pm}$  и антисимметричных  $g_i^\pm, p'_{g\pm}$  возмущений:

$$a_i^\pm = f_i^\pm + g_i^\pm, \quad p'_\pm = p'_{f\pm} + p'_{g\pm} \quad (2.1)$$

$$f_1^\pm = i(F_1^\pm \operatorname{ch} k(z \mp H_\pm) + F_2^\pm \xi_\pm \operatorname{ch} k\xi_\pm(z \mp H_\pm)) \exp(-ikx)$$

$$f_2^\pm = -(F_1^\pm \operatorname{sh} k(z \mp H_\pm) + F_2^\pm \operatorname{sh} k\xi_\pm(z \mp H_\pm)) \exp(-ikx)$$

$$p'_{p\pm} = -qmkF_1^\pm \operatorname{ch} k(z \mp H_\pm) \exp(-ikx), \quad \xi_\pm \equiv (1 - qc_{\pm}^{-2})^{1/2}, \quad q \equiv \pi k^{-2}$$

Здесь  $k$  – вещественное волновое число,  $F_{1,2}^\pm$  – константы. Для антисимметричных возмущений  $g_i^\pm$ ,  $p'_{g\pm}$  косинусы и синусы в формулах для  $f_i^\pm$ ,  $p'_{g\pm}$  взаимно заменяются, а вместо постоянных  $F_{1,2}^\pm$  берутся  $G_{1,2}^\pm$ .

**3. Дисперсионное соотношение и уравнение нейтральной устойчивости.** Подстановка (2.1) в условия на межфазной границе (1.2) приводит к линейной однородной системе алгебраических уравнений относительно  $F_{1,2}^\pm$ ,  $G_{1,2}^\pm$ . Условием существования нетривиального решения (2.1) спектральной задачи (1.1), (1.2) является равенство нулю определителя матрицы  $D$  этой системы.

Вычисление определителя матрицы  $D$  приводит к дисперсионному соотношению для нахождения собственного спектрального значения  $\pi$ :

$$\|D\| = A\beta^4 + B\beta^2 + C = 0 \quad (3.1)$$

$$A \equiv R_i \cdot R_c, \quad C \equiv d_f \cdot d_g, \quad B \equiv 2B_{1i}B_{1c} + B_{2i}B_{2c} + B_{3i}B_{2c}$$

$$R_i \equiv q(S_-^2 \operatorname{cth} h_- + S_+^2 \operatorname{cth} h_+ - 4c_{\pm}^4 \xi_\pm \operatorname{cth} h_\pm \xi_\pm - 4c_{\pm}^4 \xi_\mp \operatorname{cth} h_\mp \xi_\mp)$$

$$B_{1i} \equiv (S_+ R_+ \operatorname{th} h_+ \xi_+ - 2c_{\pm}^2 \xi_\pm Q_+ \operatorname{th} h_+) (R_- \operatorname{th} h_- \xi_- - Q_- \xi_- \operatorname{th} h_-) -$$

$$-(2c_{\pm}^2 \xi_\pm \operatorname{th} h_\pm - S_\pm \operatorname{th} h_\pm \xi_\pm) (Q_-^2 \xi_- \operatorname{th} h_- - R_-^2 \operatorname{th} h_- \xi_-) -$$

$$-q \operatorname{th} h_+ \operatorname{th} h_+ \xi_+ (2c_{\pm}^2 \xi_- R_- - S_- Q_-), \quad B_{2i} \equiv q^2 \alpha^2 \xi_- \operatorname{th} h_+ \operatorname{th} h_+ \xi_+ -$$

$$-(S_+^2 \operatorname{th} h_+ \xi_+ - 4c_{\pm}^4 \xi_\pm \operatorname{th} h_\pm) (R_-^2 \operatorname{th} h_- \xi_- - Q_-^2 \xi_- \operatorname{th} h_-)$$

$$B_{3i} \equiv (2c_{\pm}^2 Q_- \xi_- \operatorname{th} h_- - S_- R_- \operatorname{th} h_- \xi_-) (\xi_+ \operatorname{th} h_+ - \operatorname{th} h_+ \xi_+) +$$

$$+(S_+ R_+ \operatorname{th} h_+ \xi_+ - 2c_{\pm}^2 \xi_\pm Q_+ \operatorname{th} h_+) (\operatorname{th} h_- \xi_- - \xi_- \operatorname{th} h_-) +$$

$$+(Q_+ \xi_+ \operatorname{th} h_+ - R_+ \operatorname{th} h_+ \xi_+) (S_- \operatorname{th} h_- \xi_- - 2c_{\pm}^2 \xi_- \operatorname{th} h_-) +$$

$$+(R_- \operatorname{th} h_- \xi_- - Q_- \xi_- \operatorname{th} h_-) (2c_{\pm}^2 \xi_\pm \operatorname{th} h_\pm - S_\pm \operatorname{th} h_\pm \xi_\pm) -$$

$$-q^2 \xi_+ \operatorname{th} h_- \operatorname{th} h_- \xi_- - q^2 \xi_- \operatorname{th} h_+ \operatorname{th} h_+ \xi_+$$

$$d_f \equiv q(\xi_+ \xi_- (Q_-^2 \operatorname{th} h_- + Q_+^2 \operatorname{th} h_+) - \xi_+ R_-^2 \operatorname{th} h_- \xi_- - \xi_- R_+^2 \operatorname{th} h_+ \xi_+)$$

$$Q_\pm \equiv 2c_{\pm}^2 + \alpha, \quad R_\pm \equiv 2c_{\pm}^2 - q + \alpha, \quad S_\pm \equiv 2c_{\pm}^2 - q, \quad h_\pm \equiv kH_\pm$$

Формулы для  $R_c$ ,  $B_{ic}$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $d_g$  получаются из формул для  $R_i$ ,  $B_{ii}$ ,  $d_f$  взаимной заменой тангенсов и котангенсов.

Раскрывая неопределенность  $(q^{-4} \|D\|)_{q=0}$ , приходим к уравнению нейтральной устойчивости:

$$(2c_{\pm} + c_{\pm})^2 (q^{-4} \|D\|)_{q=0} = a\beta^4 + b\beta^2 + d = 0 \quad (3.2)$$

$$a \equiv a_i a_c, \quad b \equiv 2b_{1i} b_{1c} + b_{2i} b_{2c} + b_{3i} b_{2c}, \quad d \equiv d_i d_c$$

$$a_i \equiv l_- / \sqrt{\chi} + l_+ \sqrt{\chi}, \quad \bar{\alpha} \equiv \alpha / (2c_{\pm} + c_{\pm})$$

$$b_{1i} \equiv -\bar{\alpha}(\chi n_+ l_+ + \operatorname{th}^2 h_+ + t_+ t_-) + n_+ t_- \sqrt{\chi} - n_- t_+ / \sqrt{\chi}$$

$$\begin{aligned}
b_{2i} &\equiv \bar{\alpha}^2 (\chi n_+ l_- + \text{th}^2 h_+) - 2\bar{\alpha} t_- n_+ \sqrt{\chi} - n_+ n_- \\
b_{3i} &\equiv -(\chi^{-1} l_+ n_- + \chi l_- n_+ + \text{th}^2 h_- + \text{th}^2 h_+ + 2t_+ t_-) \\
d_i &\equiv -\bar{\alpha}^2 (l_- \sqrt{\chi} + l_+ / \sqrt{\chi}) + 2\bar{\alpha} (t_+ + t_-) + n_- / \sqrt{\chi} + n_+ \sqrt{\chi} \\
t_{\pm} &\equiv h_{\pm} (1 - \text{th}^2 h_{\pm}), \quad l_{\pm} \equiv \text{th} h_{\pm} - t_{\pm}, \quad n_{\pm} \equiv \text{th} h_{\pm} + t_{\pm}
\end{aligned}$$

Формулы для  $a_c$ ,  $b_{ic}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и  $d_c$  получаются из формул (3.2) заменой тангенсов на котангенсы.

Для устойчивости двухфазной периодической структуры необходимо, чтобы уравнение (3.1) не имело отрицательных корней  $q$ .

Изучим влияние параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $h_{\pm}$  на устойчивость двухфазного равновесия.

**4. Случай  $\beta = 0$ .** В этом случае симметричные и антисимметричные возмущения являются, каждое в отдельности, решениями спектральной задачи (1.1), (1.2) (при  $\beta \neq 0$  подобное утверждение неверно).

Если состояние в слоях фазы "плюс" удовлетворяет условию  $\beta = 0$ , а  $\bar{\alpha} \in (-\infty, \bar{\alpha}_1^f) \cup (\bar{\alpha}_2^f, +\infty)$  ( $\bar{\alpha} \in (-\infty, \bar{\alpha}_1^g) \cup (\bar{\alpha}_2^g, +\infty)$ ), то равновесие в структуре неустойчиво по отношению к возмущениям симметричного (антисимметричного) типа. Здесь  $\bar{\alpha}_{1,2}^f$  – корни уравнения  $d_i = 0$ , а  $\bar{\alpha}_{1,2}^g$  – уравнения  $d_c = 0$ .

Параметр  $\alpha$ , определяемый по (1.3), характеризует "скачок негидростатичности" напряжений в фазах при переходе через когерентную границу. Возрастание абсолютной величины такого скачка, как показано выше, приводит к неустойчивости периодической структуры. Этот результат согласуется с полученным ранее [2, 5].

Укажем области неустойчивости для некоторых интересных с физической точки зрения асимптотик. Обозначим через  $s$  концентрацию фазы "минус" в периодической ячейке:  $s = h_-(h_+ + h_-)^{-1}$ ,  $0 \leq s \leq 1$ . Тогда  $h_- = sh$ ,  $h_+ = (1-s)h$ , где  $h = h_+ + h_-$ .

Если  $0 < s < 1$  и  $h \rightarrow +\infty$ , то  $\bar{\alpha}_1^{f,s} \rightarrow -1$ ,  $\bar{\alpha}_2^{f,s} \rightarrow 1$ .

Пусть  $h \rightarrow 0$  и  $0 < s < 1$  (физически это соответствует случаю больших длин возмущений  $k^{-1}$  при конечных толщинах слоев  $H_{\pm}$  или случаю конечных длин возмущений при малых толщинах слоев). Структура будет неустойчивой относительно симметричных (антисимметричных) возмущений, если  $\bar{\alpha} \in (-\infty, \bar{\alpha}_{01}^f)$  ( $\bar{\alpha} \in (-\infty, \bar{\alpha}_{01}^g) \cup (0, +\infty)$ ), так как

$$\bar{\alpha}_{01}^f \equiv \lim \bar{\alpha}_1^f = -(s/\sqrt{\chi} + (1-s)\sqrt{\chi}), \quad \lim \bar{\alpha}_2^f = +\infty$$

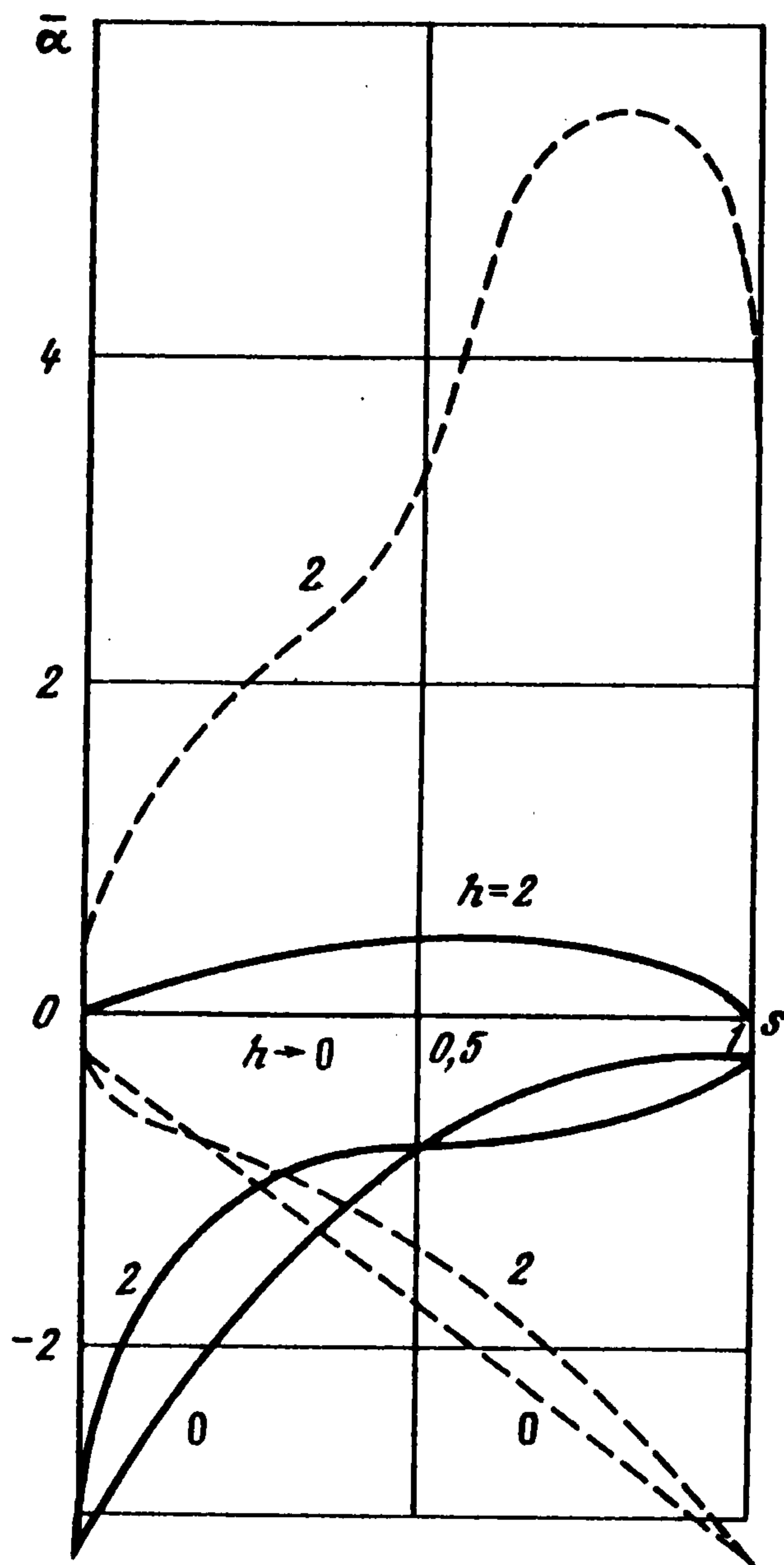
$$\bar{\alpha}_{01}^g \equiv \lim \bar{\alpha}_1^g = -(s/\sqrt{\chi} + (1-s)\sqrt{\chi})^{-1}, \quad \lim \bar{\alpha}_2^g = 0, \quad (h \rightarrow 0).$$

(4.1)

При  $s \rightarrow 0$ ,  $h \sim 1$  (т.е.  $h_+ \sim 1$ ,  $h_- \sim 0$ ), что соответствует двухфазной структуре с тонкими периодическими зародышами, система будет неустойчива относительно симметричных (антисимметричных) возмущений, если  $\bar{\alpha} \in (-\infty, -\sqrt{\chi}) \cup (\sqrt{\chi}(\text{sh} 2h_+ + 2h_+)(\text{sh} 2h_+ - 2h_+)^{-1}, +\infty)$  ( $\bar{\alpha} \in (-\infty, -1/\sqrt{\chi}) \cup (0, +\infty)$ ).

Если  $s \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow +\infty$  (т.е.  $h_+ \rightarrow +\infty$ ,  $h_- \ll +\infty$ ), то приходим к решению задачи об устойчивости уединенного плоского слоя-зародыша новой фазы "минус" в безграничной упругой матрице основной фазы "плюс" [5].

Корни  $\bar{\alpha}_{1,2}^f$  и  $\bar{\alpha}_{1,2}^g$  рассчитывались на ЭВМ при разных значениях параметров  $s$ ,  $h$  и  $\chi$ . На фиг. 1 показаны зависимости  $\bar{\alpha}_{1,2}^f(s)$ ,  $\bar{\alpha}_{1,2}^g(s)$  при  $h = 2$ ,  $\chi = 0,1$ , а также зависимости  $\bar{\alpha}_{01}^f(s)$  и  $\bar{\alpha}_{01}^g(s)$  при  $\chi = 0,1$  ( $\bar{\alpha}_2^f \rightarrow +\infty$ ,  $\bar{\alpha}_2^g \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ ). Штриховой линией отмечена зави-



Фиг. 1

симось  $\bar{\alpha}^f$ , сплошной —  $\bar{\alpha}^s$ . Графики функций  $\bar{\alpha}_{1,2}^f(h)$  и  $\bar{\alpha}_{1,2}^s(h)$  были приведены в [3].

**5. Пример.** Рассмотрим случай СД всестороннего растяжения — сжатия ( $\Delta_{ij} = \delta\delta_{ij}$ ) при  $\chi = 0,1$ ,  $\sigma_{12} = 0$ . Если  $\delta > 0$  ( $\delta < 0$ ), то фазовый переход сопровождается всесторонним растяжением (сжатием) частиц менее жесткой фазы "плюс" и образованием более жесткой фазы "минус".

1°. Пусть в менее жесткой фазе главные напряжения в направлении касательной к межфазной границе равны нулю ( $\sigma_{11}^+ = 0$ ). При этом те же напряжения в более жесткой фазе

определяются по формуле (2) работы [2]:  $\sigma_{11}^- = -9\sigma_{22}^+ - 4\mu_- \delta$ . Критические значения напряжений  $\sigma_{22}$  ( $\sigma_{22}^+ = \sigma_{22}^- = \sigma_{22}$ ) связаны с критическими значениями параметра  $\bar{\alpha}$  соотношением (1.3):

$$\bar{\alpha}^* = -\frac{9}{4}\delta^{-1}(\mu_+\mu_-)^{-1/2}\sigma_{22}^* - \sqrt{10}$$

(Звездочкой отмечены критические значения.)

Если менее жесткая фаза находится в гидростатическом состоянии ( $\sigma_{11}^+ = \sigma_{22} = 0$ ), то  $\bar{\alpha} = -\sqrt{10}$ . В этом случае имеет место неустойчивость по отношению к возмущениям симметричного и антисимметричного типов ([3], фиг. 1) при  $s = 1/2$ . Более детальный численный анализ показывает, что это верно и для любых значений концентрации  $s$ . При СД всестороннего растяжения (сжатия) выполнение необходимых условий устойчивости возможно

только в результате приложения сжимающих (растягивающих) главных напряжений в направлении оси  $z$ :  $\sigma_{22} > 0$  ( $\sigma_{22} < 0$ ).

2°. Пусть в более жесткой фазе главные напряжения в направлении касательной к межфазной границе равны нулю ( $\sigma_{11}^- = 0$ ). При этом  $\sigma_{11}^+ = 0,9\sigma_{22} + 4\mu_+\delta$  ([2], формула (2)).

Критические значения  $\bar{\alpha}$  и  $\sigma_{22}$  связаны соотношением

$$\bar{\alpha}^* = -0,2025\delta^{-1}(\mu_+\mu_-)^{-1/2}\sigma_{22}^* - \sqrt{0,1} \quad (5.1)$$

Если более жесткая фаза находится в гидростатическом состоянии, то  $\bar{\alpha} = -\sqrt{0,1}$ . В этом случае выполняются необходимые условия устойчивости для возмущений обоих типов (фиг. 1). Численный анализ показывает, что это верно при любых  $s$  и  $h$ .

Рассмотрим верхние ветви зависимостей  $\bar{\alpha}^*$  (т.е.  $\bar{\alpha}_2^{f,g}$ ) на фиг. 1. Если  $\delta > 0$  ( $\delta < 0$ ), то этим ветвям соответствуют функции критических сжимающих (растягивающих) напряжений  $\sigma_{22}(s)$ . На фиг. 1 эти функции имеют четко выраженные максимумы для обоих типов возмущений. При этом максимумы сдвинуты в сторону оси  $s = 1$ . В этом проявляется стабилизирующее влияние роста концентрации более жесткой фазы. При  $s \rightarrow 0$  или  $s \rightarrow 1$  запас устойчивости падает, то есть значительное уменьшение толщины слоев одной из фаз дестабилизирует систему.

Нижние ветви  $\bar{\alpha}^*$  (т.е.  $\bar{\alpha}_1^{f,g}$ ) представлены монотонными функциями от  $s$  при  $h = 2$ . С ростом концентрации более жесткой фазы "минус" абсолютная величина критических значений напряжений  $\sigma_{22}(s)$  для симметричных возмущений монотонно растет, а для антисимметричных – падает (см. формулу (5.1)).

**6. Анализ решения в случае  $\beta \neq 0$ . Эффект "сдвиговой неустойчивости".** Прежде всего поясним физический смысл параметра  $\beta$ . Обозначим:  $\varepsilon^+ = \kappa_{(12)}^+$ ,  $\varepsilon^- = \Delta_{(12)} + \kappa_{(12)}^-$ .

Рассмотрим материальные прямые линии, проходящие в начальной однофазной конфигурации (которая отождествлена с опорной конфигурацией фазы "плюс") перпендикулярно к поверхности – прообразу межфазной границы. Величина  $\Delta_{(12)}$  определяет угол отклонения материальных линий в опорной конфигурации фазы "минус" от положения в начальной конфигурации. Величины  $\kappa_{(12)}^\pm$  определяют угол отклонения материальных линий в актуальной конфигурации от положения в опорных конфигурациях. Величины  $\varepsilon^\pm$  определяют (в каждой фазе соответственно) углы отклонения указанных материальных линий в актуальной конфигурации от своего первоначального геометрического расположения. Таким образом, величина  $[\varepsilon]$  имеет геометрический смысл скачка скошения углов между указанными материальными линиями в актуальной двухфазной конфигурации. Параметр  $\beta$  связан со скачком скошения углов  $[\varepsilon]$  соотношением

$$\beta = -2\Delta^{-1}[\varepsilon].$$

*Достаточные условия неустойчивости.* Если  $\beta \neq 0$ , то сложный вид уравнений (3.1), (3.2) не позволяет проанализировать знакоопределенность собственного значения спектральной задачи в том же объеме, как это делалось при  $\beta = 0$ . Здесь приведем некоторые качественные рассуждения и выскажем несколько предположений.

Рассмотрим соотношение нейтральной устойчивости (3.2) при фиксированных  $\chi$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $s$  и  $h$  как уравнение относительно  $\beta$ . Это уравнение может иметь: А) четыре вещественных корня  $\pm\beta_1$  и  $\pm\beta_2$  (пусть  $0 < \beta_1 < \beta_2$ ), Б) два мнимых корня  $\pm\beta_1$  и два вещественных

венных  $\pm\beta_2$  ( $\beta_2 > 0$ ). Возможен также случай *B*, когда (3.2) не имеет вещественных корней.

Из (3.1) следует, что  $q^{-4}\|D\| \rightarrow +\infty$  при  $q \rightarrow -\infty$ . Поэтому уравнение (3.1) обязательно будет иметь отрицательный корень  $q$ , если  $\beta$  удовлетворяет неравенству  $(q^{-4}\|D\|)_{q=0} < 0$ . В случае *A* это неравенство выполняется при  $\beta_1 < |\beta| < \beta_2$  и в случае *B* – при  $|\beta| < \beta_2$ . Значит, при указанных значениях параметра  $\beta$  периодическая структура неустойчива.

При  $\beta_2 < |\beta|$  в случаях *A* и *B*, а также при любых  $\beta$  в случае *B* периодическая структура, по-видимому, устойчива. Такое предположение опирается на следующее свойство соотношения (3.1): при любых фиксированных  $s, h \neq 0, \chi$  и  $\bar{\alpha}$  существует такое значение  $\beta_0$  ( $\beta_0 > 0$ ), что при любых  $\beta$ , удовлетворяющих неравенству  $\beta_0 < |\beta|$ , уравнение (3.1) не имеет отрицательных корней  $q$ .

Теперь исследуем устойчивость при  $|\beta| < \beta_1$  в случае *A*. Случай *A* может иметь место только при условии  $d_1 d_c > 0$ , которое выполняется, если: 1)  $\bar{\alpha} \in (-\infty, \min(\bar{\alpha}_1^f, \bar{\alpha}_1^g)) \cup (\max(\bar{\alpha}_2^f, \bar{\alpha}_2^g), +\infty)$  или 2)  $\bar{\alpha} \in (\max(\bar{\alpha}_1^f, \bar{\alpha}_1^g), \min(\bar{\alpha}_2^f, \bar{\alpha}_2^g))$ . По-видимому, в первом случае имеют место неустойчивые состояния, а во втором – устойчивые. Эти предположения опираются на результат, который был получен при рассмотрении состояний, удовлетворяющих условию  $\beta = 0$ .

*Асимптотика длиннопериодных возмущений. Эффект "сдвиговой неустойчивости"*. В (3.2) обозначим  $y = \beta^2$ . Исследуем поведение корней  $y_1$  и  $y_2$  уравнения (3.2) в случае длиннопериодных возмущений. При  $h \rightarrow 0$  и  $s \in (0, 1)$  предельные значения коэффициентов этого уравнения имеют вид

$$a = 0, \quad b = \bar{\alpha}^2 \frac{(1-2s)^2}{s(1-s)} - 4\bar{\alpha} \left( s\sqrt{\chi} + \frac{1-s}{\sqrt{\chi}} \right) - 4$$

$$c = -4\bar{\alpha}\bar{\alpha}_{01}^f (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_{01}^f) (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_{01}^g) \quad (6.1)$$

При этом корень  $y_1$  рассчитывается по формулам

$$y_1 = \frac{4\bar{\alpha}\bar{\alpha}_{01}^f (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_{01}^f) (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_{01}^g) s(1-s)}{(1-2s)^2 (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_+) (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_-)}, \quad s \neq 1/2 \quad (6.2)$$

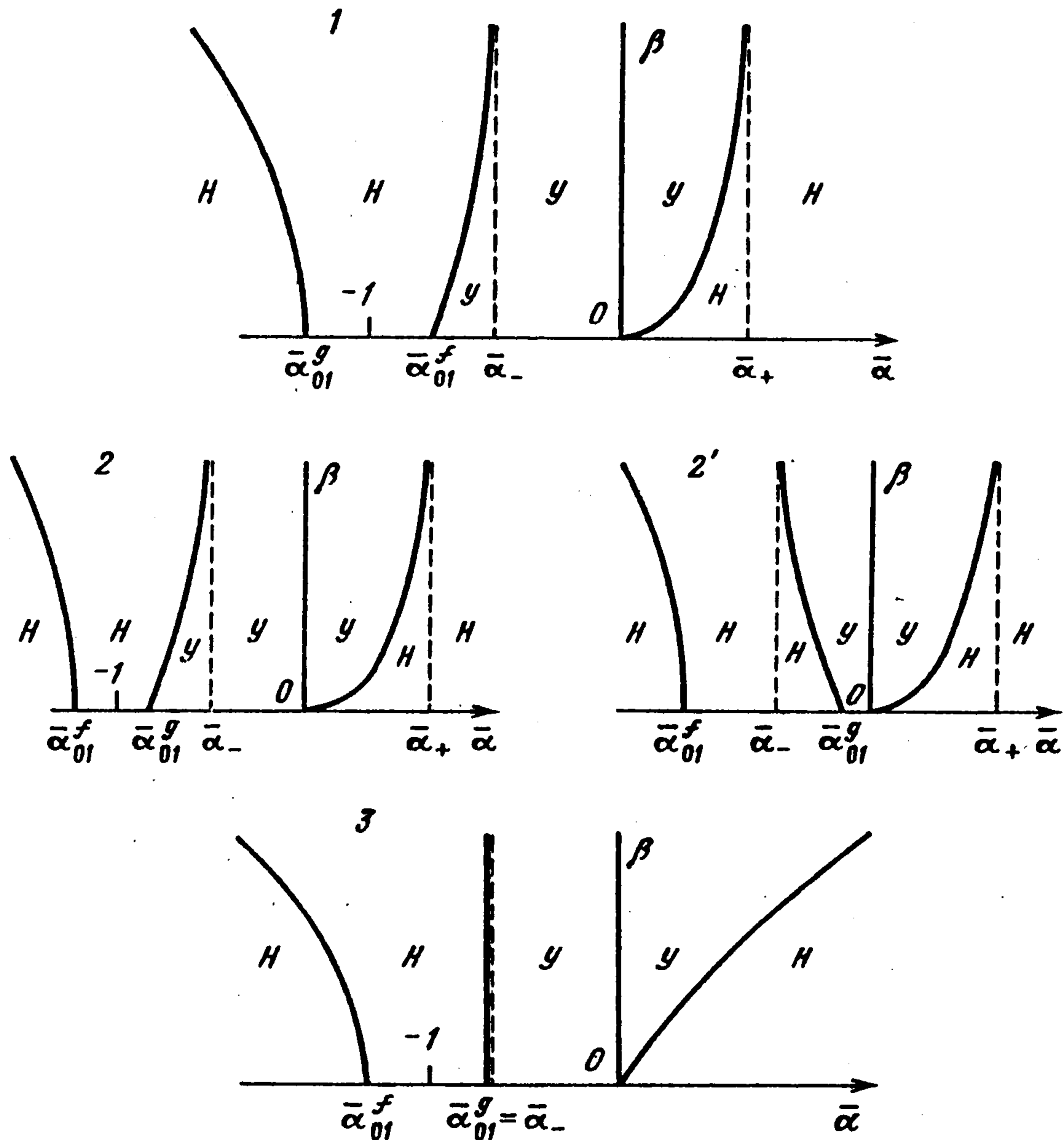
$$\bar{\alpha}_{\pm} \equiv \frac{2s(1-s)}{(1-2s)^2} \left( s\sqrt{\chi} + \frac{1-s}{\sqrt{\chi}} \pm \left( \left( s\sqrt{\chi} + \frac{1-s}{\sqrt{\chi}} \right)^2 + \frac{(1-2s)^2}{s(1-s)} \right)^{1/2} \right) \quad (6.3)$$

$$y_1 = \bar{\alpha}(\bar{\alpha} + \frac{1}{2}(\sqrt{\chi} + 1/\sqrt{\chi})), \quad s = 1/2 \quad (6.4)$$

Для корня  $y_2$  при  $h \rightarrow 0$  получаем:  $y_2 \rightarrow +\infty$ , если  $\bar{\alpha} < \bar{\alpha}_-$  или  $\bar{\alpha}_+ < \bar{\alpha}$ , и  $y_2 \rightarrow -\infty$ , если  $\bar{\alpha}_- < \bar{\alpha} < \bar{\alpha}_+$ .

Различные значения  $y_1$  и  $y_2$  определяют предельные ситуации для случаев *A*, *B* и *B*. Если  $y_1 > 0, y_2 \rightarrow +\infty$ , имеет место случай *A*; если  $y_1 > 0, y_2 \rightarrow -\infty$  или  $y_1 < 0, y_2 \rightarrow +\infty$ , то – случай *B*; если  $y_1 < 0, y_2 \rightarrow -\infty$ , то – случай *B*.

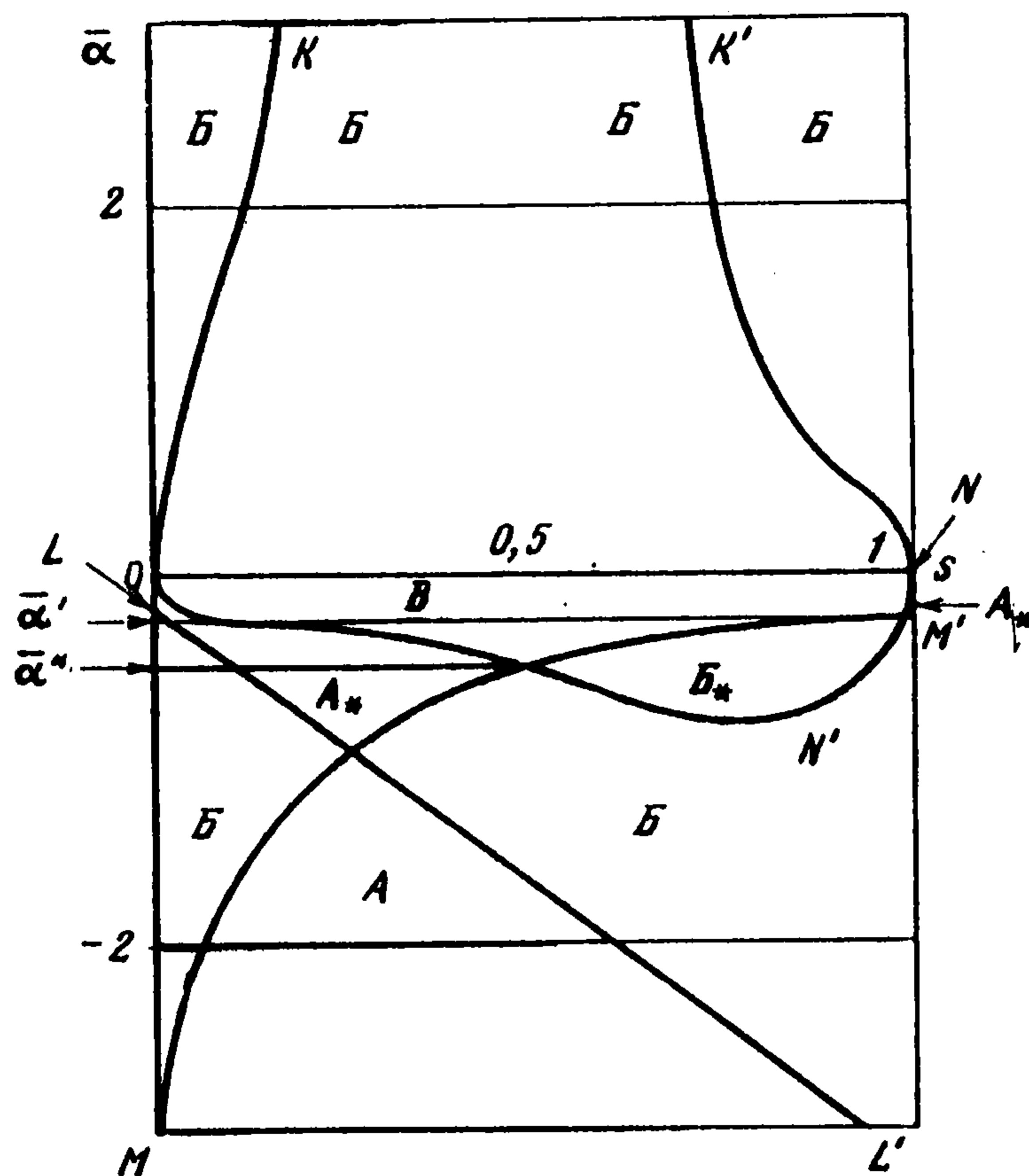
Выясним взаиморасположение корней  $\bar{\alpha}_{01}^f, \bar{\alpha}_{01}^g$  и  $\bar{\alpha}_{\pm}$ . Из формул (4.1) и (6.3) видно, что  $\bar{\alpha}_{01}^f, \bar{\alpha}_{01}^g$  и  $\bar{\alpha}_-$  отрицательны, а  $\bar{\alpha}_+$  положителен. Более детальный анализ показывает следующее: 1) если  $s \geq S$  ( $S \equiv \sqrt{\chi} / (1 + \sqrt{\chi})$ ),  $\chi \geq 1$  или  $s \leq S, \chi \leq 1$ , то



Фиг. 2

$\bar{\alpha}_{01}^g \leq \bar{\alpha}_{01}^f \leq \bar{\alpha}_-$ , 2) если  $s \geq S$ ,  $\chi \leq 1$  или  $s \leq S$ ,  $\chi \geq 1$ , то  $\bar{\alpha}_{01}^f \leq \bar{\alpha}_{01}^g$ ,  $\bar{\alpha}_{01}^f \leq \bar{\alpha}_-$ , 3) если  $s = 1/2$ , то  $\bar{\alpha}_+ \rightarrow +\infty$ ,  $\bar{\alpha}_- = -2/(\sqrt{\chi} + 1/\sqrt{\chi})$ ,  $\bar{\alpha}_{01}^g = \bar{\alpha}_-$ ,  $\bar{\alpha}_{01}^f = 1/\bar{\alpha}_-$ , т.е.  $\bar{\alpha}_{01}^f \leq -1 \leq \bar{\alpha}_- = \bar{\alpha}_{01}^g$ . Случай, когда одновременно выполняются неравенства  $\bar{\alpha}_- < \bar{\alpha}_{01}^g$  и  $\bar{\alpha}_- < \bar{\alpha}_{01}^f$ , невозможен.

Зная возможное положение корней  $\bar{\alpha}_{01}^f$ ,  $\bar{\alpha}_{01}^g$  и  $\bar{\alpha}_{\pm}$  на оси  $\bar{\alpha}$ , качественно построим график зависимостей критического значения параметра  $\beta$  как функции от  $\bar{\alpha}$ :  $\beta = \sqrt{y_1}$  (фиг. 2). На фиг. 2 отметим области неустойчивости ( $H$ ) и области, где не выполняются достаточные условия неустойчивости ( $Y$ ). Есть основания предполагать, что в областях  $Y$  структура устойчива (см. анализ случаев А-В, приведенный выше). Из графиков видно, что увеличение абсолютного значения параметра  $\bar{\alpha}$  приводит к неустойчивости. Увеличение абсолютного значения параметра  $\beta$  может в ряде случаев стабилизировать систему. Такая картина качественно совпадает с результатом исследования локальной устойчивости когерентной границы [1-3]. Однако здесь возникает и качественно новый эффект: если  $\bar{\alpha} \in (\max(\bar{\alpha}_{01}^f, \bar{\alpha}_{01}^g), \bar{\alpha}_-)$ , то при увеличении  $|\beta|$  система из области устойчивости переходит в область неустойчивости. Значение  $|\beta|$  можно увеличивать за счет сдвиговых напряжений  $\sigma_{12}^+$ . Поэтому данный эффект естественно назвать "эффектом сдвиговой неустойчивости периодической двухфазной



Фиг. 3

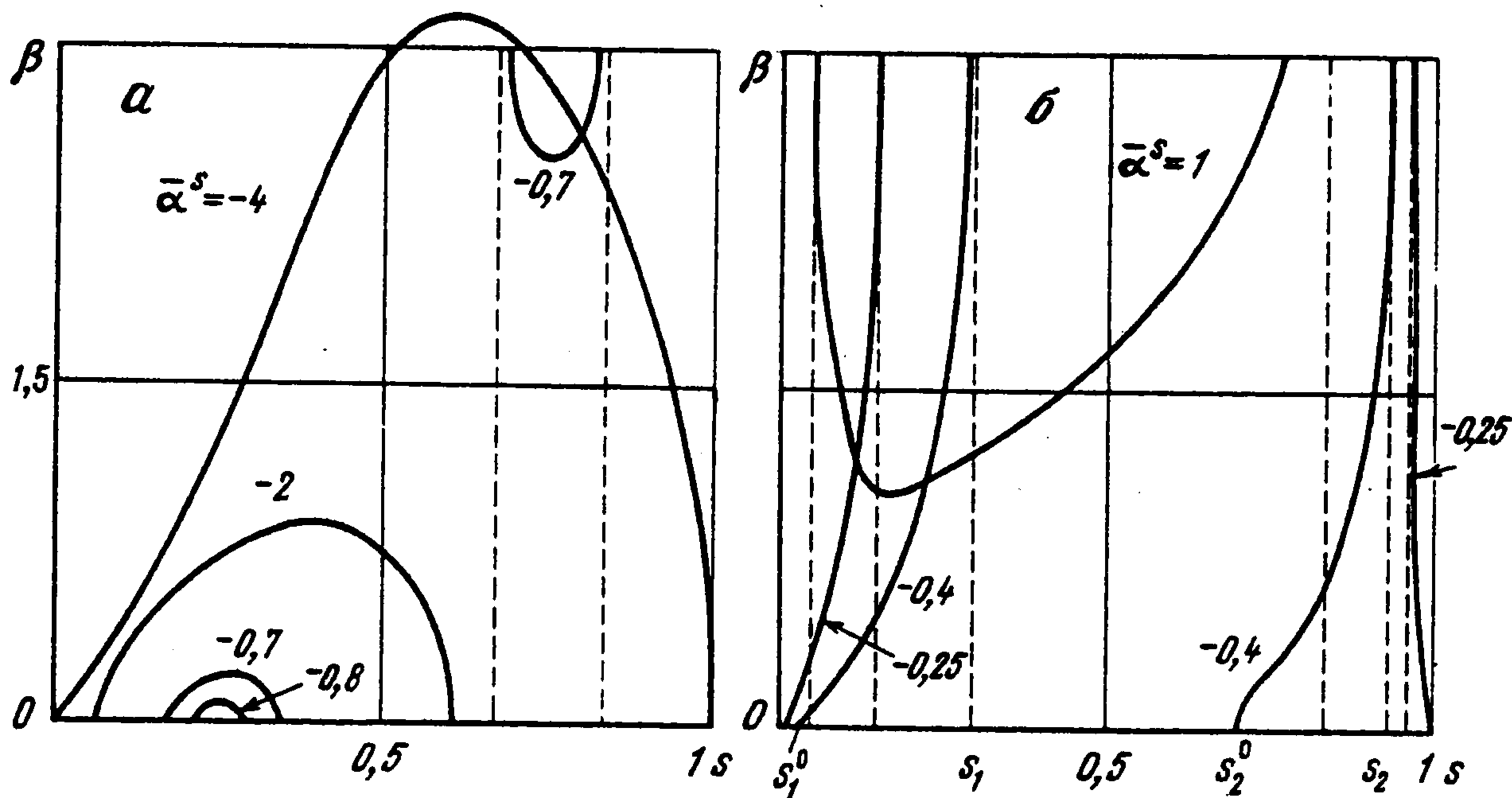
структуры". "Сдвиговая неустойчивость" также имеет место в задаче о плоском зародыше новой фазы в безграничной упругой матрице [5].

В рамках асимптотики длиннопериодных возмущений рассмотрим предельные случаи  $\chi \rightarrow \infty$ ,  $\chi \rightarrow 0$  и  $\chi = 1$ .

Из формул (4.1) и (6.3) видно, что  $\bar{\alpha}_+ \rightarrow +\infty$ ,  $\bar{\alpha}_- \rightarrow 0$ ,  $\bar{\alpha}_{01}^g \rightarrow 0$ ,  $\bar{\alpha}_{01}^f \rightarrow -\infty$ , если  $\chi \rightarrow \infty$  или  $\chi \rightarrow 0$ . Для  $\chi \rightarrow 0$  имеем  $\bar{\alpha}_- / \bar{\alpha}_{01}^g \rightarrow s / (1-s)$ . Значит,  $\bar{\alpha}_{01}^g > \bar{\alpha}_-$  при  $s > 1/2$ , а  $\bar{\alpha}_{01}^g < \bar{\alpha}_-$  при  $s < 1/2$ . Для  $\chi \rightarrow \infty$  имеем  $\bar{\alpha}_- / \bar{\alpha}_{01}^g \rightarrow (1-s) / s$ . Значит,  $\bar{\alpha}_{01}^g < \bar{\alpha}_-$  при  $s > 1/2$ , а  $\bar{\alpha}_{01}^g > \bar{\alpha}_-$  при  $s < 1/2$ . Следовательно, в периодической структуре (при  $\chi \gg 1$  или  $\chi \ll 1$ ) эффект "сдвиговой неустойчивости" обязательно имеет место, когда концентрация менее жесткой фазы превышает концентрацию более жесткой фазы.

При  $\chi = 1$  имеем  $\bar{\alpha}_{01}^f = \bar{\alpha}_{01}^g = -1$ ,  $-1 \leq \bar{\alpha}_- \leq 0$ . Заметим, что при  $\chi = 1$  параметры  $\bar{\alpha}$  и  $\beta$  зависят только от вида тензора СД превращения  $\Delta_{(ij)}$  и не зависят от  $\sigma_{ij}$ . Значит, нельзя влиять на устойчивость, изменяя напряженное состояние. В этом случае при  $-1 < \bar{\alpha} < \bar{\alpha}_-$  система будет устойчива, если  $|\Delta_{(12)}|$  меньше некоторого критического значения, и неустойчива, если  $|\Delta_{(12)}|$  больше этого критического значения. Таким образом, можно говорить о "сдвиговой неустойчивости" за счет "собственной" сдвиговой деформации.

Проанализируем зависимость критических значений параметра  $\beta$  от концентрации  $s$ . Как следует из (6.2), эти значения  $\beta(s)$  существенно зависят от положения параметра  $\bar{\alpha}$  относительно  $\bar{\alpha}_{01}^f$ ,  $\bar{\alpha}_{01}^g$  и  $\bar{\alpha}_\pm$ . На фиг. 3 приведены графики зависимостей  $\bar{\alpha}_{01}^f(s)$  (отрезок  $LL'$ ),  $\bar{\alpha}_{01}^g(s)$  (кривая  $MM'$ ),  $\bar{\alpha}_+(s)$  (кривые  $OK$  и  $K'N$ ),  $\bar{\alpha}_-(s)$  (кривая  $ON'N$ ) и  $\bar{\alpha}_{02}^g(s)$  (отрезок  $ON$ ) при  $\chi = 0, 1$ , отмечены области, соответствующие выделенным выше трем случаям  $A-B$  (имеются в виду предельные ситуации, отвечающие асимптотике длиннопериодных возмущений), а также показаны области, где имеет место



Фиг. 4

"сдвиговая неустойчивость" (отмечены звездочкой). Анализ данных графиков позволяет представить все возможные виды зависимостей  $\beta(s)$  при разных значениях  $\bar{\alpha}$ .

Зафиксируем некоторое значение параметра  $\bar{\alpha}$  ( $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^s$ ). Прямая  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}^s$  пересекает кривые  $\bar{\alpha}_{\pm}(s)$  в точках  $s_1$  и  $s_2$ , а кривые  $\bar{\alpha}_{01}^f(s)$  и  $\bar{\alpha}_{01}^g(s)$  — в точках  $s_1^0$  и  $s_2^0$  (как видно из графиков, такие точки есть не всегда). Значения концентрации  $s_1$  и  $s_2$  соответствуют вертикальным асимптотам функции  $\beta(s)$ , а  $s_1^0$  и  $s_2^0$  — нулям функции  $\beta(s)$ . Зависимости

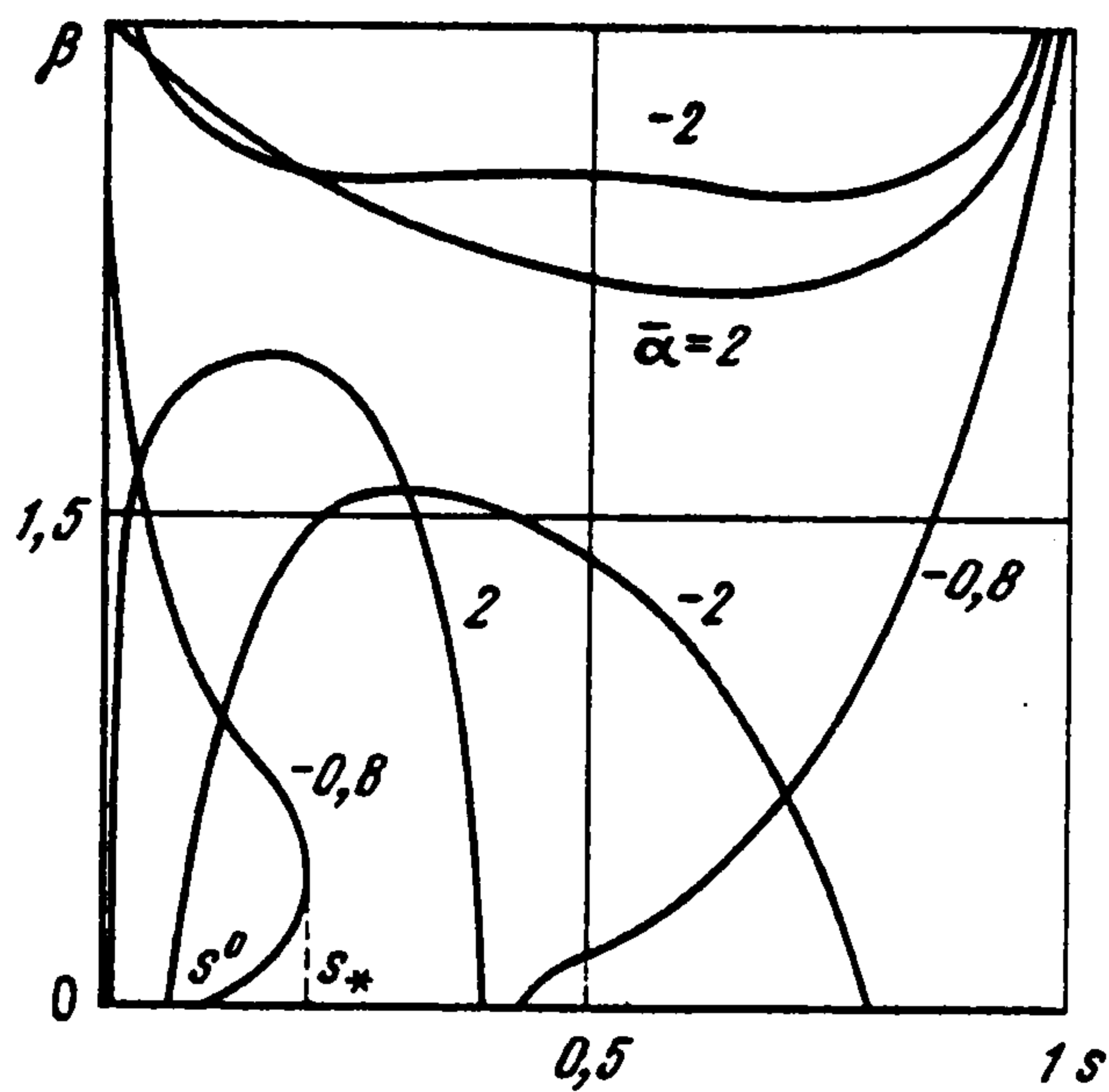
$\beta(s)$  для различных фиксированных  $\bar{\alpha}$  при  $\chi = 0, 1$  показаны на фиг. 4 ( $\beta(s) = \sqrt{y_1}$ ). Пользуясь приведенным выше анализом случаев А–В, можно выделить на фиг. 4 области устойчивости и неустойчивости.

Рассмотрим пример. Обозначим точки пересечения кривых  $\bar{\alpha}_{-}(s)$  и  $\bar{\alpha}_{01}^g(s)$  на фиг. 3 через  $\bar{\alpha}'$  и  $\bar{\alpha}''$  ( $\bar{\alpha}'' < \bar{\alpha}'$ ). Пусть  $\bar{\alpha}^s \in (\bar{\alpha}'', \bar{\alpha}')$ . Тогда при  $s \in [0, s_1^0] \cup [s_2, 1]$  двухфазная структура неустойчива при любых  $\beta$ , при  $s \in (s_1^0, s_1)$  имеет место "сдвиговая неустойчивость", при  $s \in [s_1, s_2^0]$  система устойчива при любых  $\beta$ , при  $s \in (s_2^0, s_2)$  система может становиться устойчивой при увеличении  $|\beta|$  (фиг. 4, б,  $\bar{\alpha}^s = -0,4$ ).

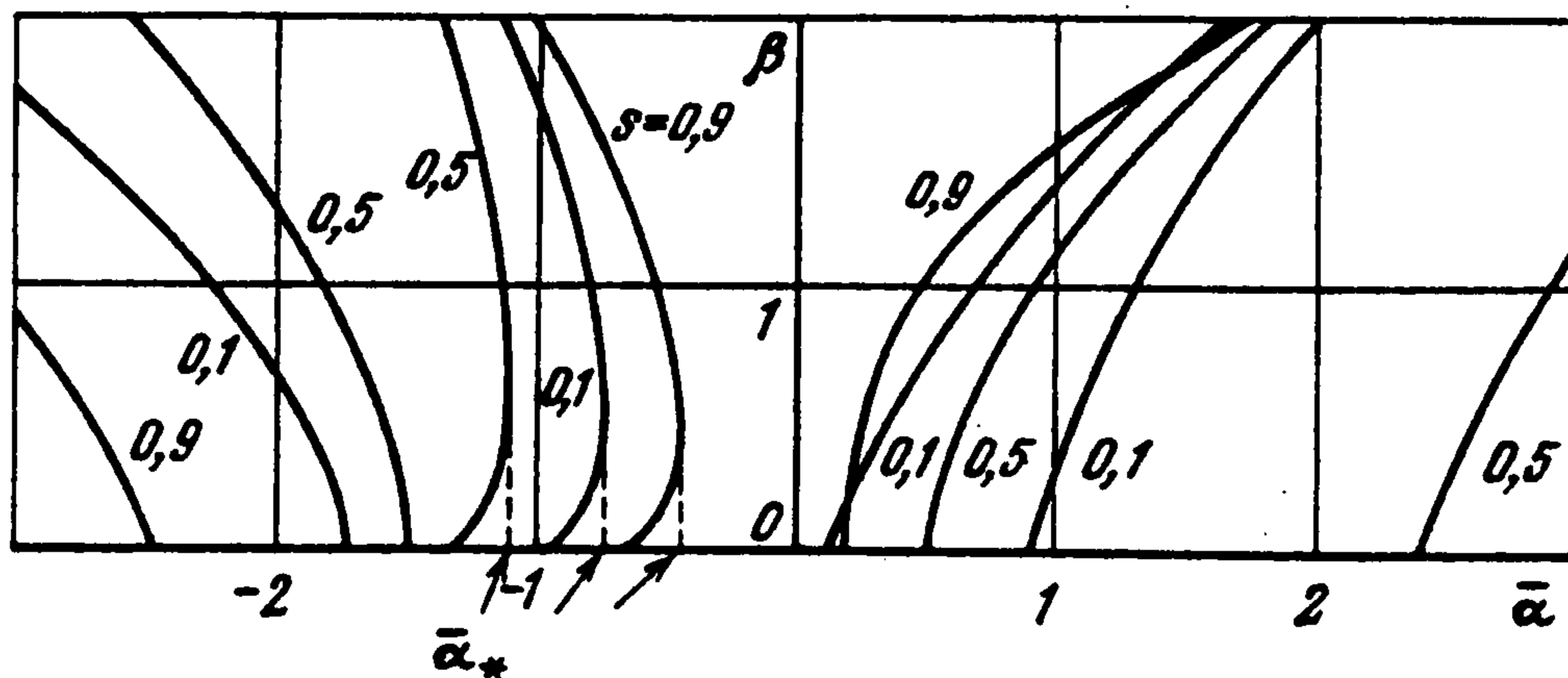
Продоланный анализ показывает, в частности, что при  $s \rightarrow 0$  и  $s \rightarrow 1$  периодическая структура не может быть устойчивой относительно длиннопериодных возмущений ни при каких значениях параметров напряженного состояния  $\bar{\alpha}$  и  $\beta$ .

**Асимптотика малой концентрации.** Если  $s \rightarrow 0$  (или  $s \rightarrow 1$ ) и  $h \rightarrow 0$ , то в уравнении (3.2) имеем  $a/b \rightarrow 0$ ,  $d/b \rightarrow 0$  и, следовательно,  $\bar{\alpha}^2 \beta^2 \rightarrow 0$ . Поэтому кривые нейтральной устойчивости в плоскости  $(\bar{\alpha}, \beta)$  превращаются в оси  $\bar{\alpha}$  и  $\beta$ . То есть при  $s \rightarrow 0$  (или  $s \rightarrow 1$ ) область устойчивых состояний асимптотически исчезает. Следовательно, двухфазная структура с тонкими периодическими зародышами неустойчива при любых  $\bar{\alpha}$ ,  $\beta$  и  $h$ .

Отметим еще две асимптотики. При  $h_{+} \sim h_{-} \rightarrow +\infty$  приходим к решению задачи об



Фиг. 5



Фиг. 6

устойчивости когерентной границы между полупространствами [2]. При  $h \rightarrow +\infty$ ,  $h_- \sim 1$  получаем решение задачи об устойчивости плоского слоя-зародыша новой фазы в безграничной упругой матрице основной фазы [5].

*Результаты численных расчетов.* Корни  $\beta_1, \beta_2$  уравнения нейтральной устойчивости (3.2) рассчитывались на ЭВМ при разных значениях параметров  $\bar{\alpha}$ ,  $s$ ,  $h$  и  $\chi$ . На фиг. 5, 6 для  $\chi = 0,1$ ,  $h = 2$  приведены графики зависимости критических значений параметра  $\beta$  (т.е. корней  $\beta_1, \beta_2$ ) от  $\bar{\alpha}$  и  $s$  для полуплоскости  $\beta \geq 0$ . Продолжение на полуплоскость  $\beta \leq 0$  получается с помощью симметрии. Разметку устойчивых и неустойчивых областей можно проделать, руководствуясь данным выше анализом случаев А–В.

При анализе локальной устойчивости отдельной когерентной границы в работе [2] были найдены две ветви гиперболы нейтральной устойчивости ([2], рис. 1). Как видно из фиг. 6, каждая из ветвей при  $h < +\infty$  заменяется двумя новыми кривыми. При  $h \rightarrow +\infty$  эти кривые переходят в гиперболу [2], а при  $h \rightarrow 0$  – в кривые, представленные на фиг. 2. В этом проявляется качественное различие условий устойчивости уединенного плоского слоя-зародыша новой фазы в безграничной упругой матрице [5] и двухфазной периодической структуры: зародыш неустойчив относительно длиннопериодных возмущений, а периодическая структура, как было показано выше, может быть устойчивой относительно таких возмущений.

Если в случае А при некоторых  $\bar{\alpha}$ ,  $h$  и  $s$  дискриминант уравнения (3.2) обращается в нуль, то  $\beta_1 = \beta_2$  – в пространстве параметров  $\bar{\alpha}$ ,  $h$ ,  $s$ ,  $\beta$  гиперповерхность  $\beta = \beta_1(\bar{\alpha}, h, s)$  переходит в гиперповерхность  $\beta = \beta_2(\bar{\alpha}, h, s)$ . На фиг. 5, 6 отмеченные значения  $\bar{\alpha}$ ,  $h$  и  $s$  определяют точки перегиба кривых  $\beta(s)$  и  $\beta(\bar{\alpha})$ . Точки перегиба обозначены буквами  $s^*$  и  $\bar{\alpha}^*$ .

При  $s \in [s^0, s^*]$ ,  $\bar{\alpha} = -0,8$  и при  $\bar{\alpha} \in [\bar{\alpha}_{01}^s, \bar{\alpha}^*]$ ,  $s = 0,1; 0,5; 0,9$  ветви кривых критических значений параметра  $\beta$  определяют двужначные функции  $\beta(s)$  и  $\beta(\bar{\alpha})$  соответственно, причем

для  $0 \leq \beta \leq \beta_1$  система устойчива (см. анализ случая  $A$ ), а для  $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$  – неустойчива, т.е. увеличение  $|\beta|$  в отмеченных случаях приводит к неустойчивости. Значит, здесь имеет место явление "сдвиговой неустойчивости" двухфазной периодической структуры относительно возмущений с конечным периодом ( $0 < h < +\infty$ ). В рассмотренной ситуации в отличие от случая длиннопериодных возмущений при  $\beta_2 < \beta$  система становится устойчивой – в этом проявляется стабилизирующая роль параметра  $\beta$  (при  $h \rightarrow 0$  было  $\beta_2^2 \rightarrow \infty$ ) [2, 3].

Эффект "сдвиговой неустойчивости" является отличительной чертой слоистых систем с когерентными межфазными границами. В слоистых системах, находящихся в состоянии плоской однородной деформации и содержащих поверхности фазовых переходов с проскальзыванием [1], подобный эффект невозможен, так как при отличных от нуля сдвиговых компонентах напряжений  $\sigma_{12}$  не выполняются условия равновесия.

Автор благодарит М.А. Гринфельда за многократные обсуждения этой работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гринфельд М.А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
2. Гринфельд М.А., Лазарев М.П. О достаточных условиях неустойчивости когерентных межфазных границ // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300. № 4. С. 836–840.
3. Гринфельд М.А., Лазарев М.П. Устойчивость гетерогенных систем с когерентными межфазными границами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 284–293.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: Главная ред. общетехн. лит. и номогр., ОНТИ, 1935. 674 с.
5. Лазарев М.П. Задача об устойчивости слоя новой фазы в безграничной упругой матрице // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. № 5. С. 1066–1070.

Москва

Поступила в редакцию  
13.IV.1992