

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. В.М. Фомин

## ИЗЛУЧЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ СТАЦИОНАРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ

Методы, предложенные автором [1], используются для исследования излучения и дифракции упругих волн на периодическом ряде круговых отверстий в ортотропной плоскости.

Ряд аналогичных двумерных задач для изотропной среды рассматривался ранее [2–4]. Для анизотропного случая подобная задача изучена, по-видимому, только для сдвиговых *SH*-волн в слое [5].

1. Рассмотрим однородную ортотропную упругую среду, и пусть  $x_1, x_2, x_3$  – оси, перпендикулярные плоскостям упругой симметрии, – главные оси. Будем исследовать случай плоской деформации в плоскости  $x_1, x_2$ .

Уравнения динамической теории упругости запишутся так

$$\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = c_{kjlm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} \quad (1.1)$$

Здесь  $u_k$  – перемещения точек в направлении оси  $x_k$ ,  $\rho$  – плотность,  $c_{kjlm}$  – компоненты тензора модулей упругости [6]. В (1.1) и дальнейшем предполагается суммирование по повторяющимся индексам, принимающим значения 1 и 2.

Полагая  $u_k = u_k^0 \exp(-i\omega t)$  и опуская временной множитель, можно представить (1.1)

в виде

$$C_{jl} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_j \partial x_l} + \rho \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – двумерный вектор с компонентами  $u_k^0$  ( $k = 1, 2$ ), а  $C_{jl}$  – матрица, элементы которой  $c_{kjlm}$  ( $k, m = 1, 2$ ).

Матрица Грина ортотропной плоскости  $G(\omega, x_1, x_2)$  является решением уравнения

$$L G(\omega, x_1, x_2) = \delta(x_1) \delta(x_2) \mathbf{I}, \quad L = C_{kj} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \rho \omega^2 \mathbf{I} \quad (1.3)$$

( $\delta(x_j)$  – дельта-функция,  $\mathbf{I}$  – двумерная единичная матрица).

В результате проведения двойного преобразования Фурье по  $x_1$  и  $x_2$  в (1.3) будем иметь

$$M(\omega, \xi_1, \xi_2) G(\omega, \xi_1, \xi_2) = \mathbf{I}, \quad M(\omega, \xi_1, \xi_2) = -C_{kj} \xi_k \xi_j + \rho \omega^2 \mathbf{I} \quad (1.4)$$

Здесь  $\xi_j$  ( $j = 1, 2$ ) – параметры преобразования,  $G(\omega, \xi_1, \xi_2)$  – двойная трансформанта Фурье матрицы Грина  $G(\omega, x_1, x_2)$ . В дальнейшем как функции, так и их трансформанты будем обозначать одной и той же буквой, различая их по аргументам.

Из (1.4) получаем  $G(\omega, \xi_1, \xi_2) = M(\omega, \xi_1, \xi_2)^{-1}$ . Это равенство после преобразований может быть приведено к виду

$$G(\omega, \xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\Delta(\omega, \xi_1, \xi_2)} (-F_{kj} \xi_k \xi_j + \rho \omega^2 I) \quad (1.5)$$

$$\Delta(\omega, \xi_1, \xi_2) = \det M(\omega, \xi_1, \xi_2)$$

где  $F_{kj}$  – матрица, взаимная к  $C_{kj}$ ,  $F_{kj} = \det C_{kj} \cdot C_{kj}^{-1}$ .

Производя в (1.5) обратное преобразование Фурье по  $\xi_2$ , будем иметь

$$G(\omega, \xi_1, x_2) = -F_{11} \xi_1^2 \eta_0(\omega, \xi_1, x_2) - i(F_{12} + F_{21}) \xi_1 \eta_1(\omega, \xi_1, x_2) + F_{22} \eta_2(\omega, \xi_1, x_2) \quad (1.6)$$

$$\eta_0(\omega, \xi_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\xi_2 x_2)}{\Delta(\omega, \xi_1, \xi_2)} d\xi_2, \quad \eta_j = \frac{\partial^j \eta_0}{\partial x_2^j} \quad (j=1,2) \quad (1.7)$$

Можно убедиться, что уравнение

$$\Delta(\omega, \xi_1, \xi_2) = 0$$

представимо в виде

$$a_0 \xi_2^4 + a_1(\omega, \xi_1) \xi_2^2 + a_2(\omega, \xi_1) = 0 \quad (1.8)$$

причем в случае ортотропной плоскости

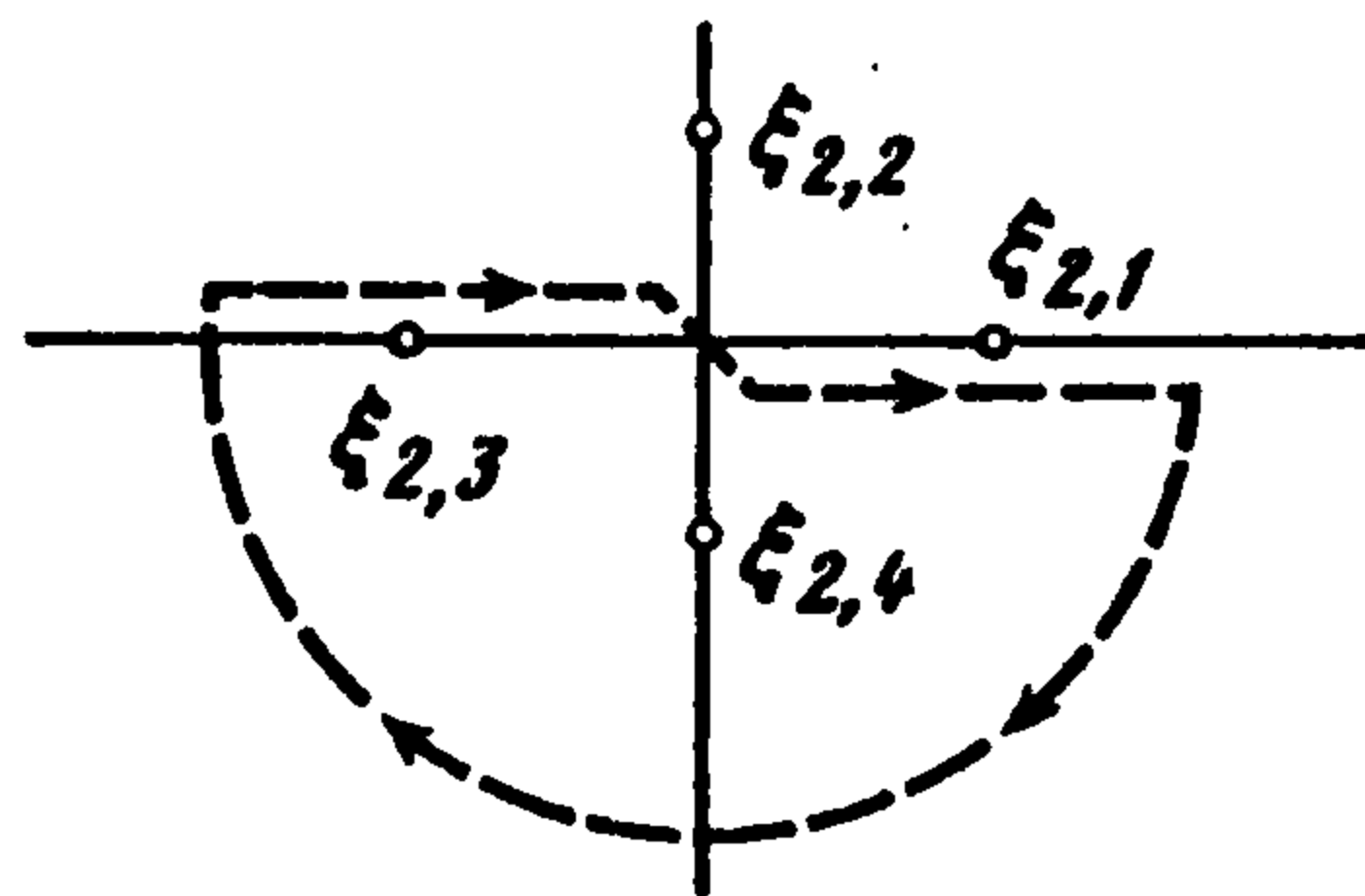
$$a_0 = c_{22} c_{66}, \quad a_1(\omega, \xi_1) = a_{11} \xi_1^2 - a_{12} \omega^2$$

$$a_2(\omega, \xi_1) = a_{21} \xi_1^4 - a_{22} \xi_1^2 \omega^2 + \omega^4, \quad \omega_0^2 = \rho \omega^2$$

$$a_{11} = c_{11} c_{22} - c_{12}^2 - 2c_{12} c_{66}, \quad a_{12} = c_{22} + c_{66}, \quad a_{21} = c_{11} c_{66}$$

$$a_{22} = c_{11} + c_{66}, \quad c_{11} = c_{1111}, \quad c_{22} = c_{2222}, \quad c_{12} = c_{1122}, \quad c_{66} = c_{1212}$$

Для ортотропных материалов, упругие постоянные которых приведены в [6, 7], билинейная форма принимает положительные значения. Тогда корни  $\xi_{2,j}$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) уравнения (1.8) расположатся на вещественной и мнимой осях симметрично относительно этих осей (фигура).



Для вычисления интеграла (1.7) используем лемму Жордана и теорему о вычетах. Контур интегрирования для случая  $x_2 > 0$  приведен на фиг. 1. Получаем

$$\eta_0(\omega, \xi_1, x_2) = -\frac{1}{2a_0} \sum_{j=1}^2 \frac{(-1)^{j-1} \exp(-\gamma_j |x_2|)}{(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \gamma_j} \quad (1.9)$$

$$\gamma_j = \left\{ \frac{a_1(\omega, \xi_1) + (-1)^j [a_1(\omega, \xi_1)^2 - 4a_0 a_2(\omega, \xi_1)]^{1/2}}{2a_0} \right\}^{1/2}$$

В соответствии с условиями излучения во второй формуле (1.9) выбирается такая

ветвь радикала, для которой  $\gamma_j = \sqrt{a}$  при  $a \geq 0$  и  $\gamma_j = -i\sqrt{-a}$  при  $a < 0$  (здесь корень арифметический).

Производя в (1.6) обратное преобразование Фурье по  $\xi_1$ , получим матрицу Грина для ортотропной плоскости в виде

$$G(\omega, x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\xi_1 x_1) [F_{11} \xi_1^2 \eta_0(\omega, \xi_1, x_2) + i(F_{12} + F_{21}) \xi_1 \eta_1(\omega, \xi_1, x_2) - F_{22} \eta_2(\omega, \xi_1, x_2)] d\xi_1 \quad (1.10)$$

2. Составляющая напряжения, параллельная оси  $x_i$ , на площадке с нормалью  $n$  вычисляется по формуле  $p_i = \sigma_{ik} n_k$  ( $\sigma_{ik}$  – компоненты тензора напряжений,  $n_k$  – проекция  $n$  на ось  $x_k$ ).

Используя закон Гука

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{2} c_{iklm} \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right)$$

после ряда преобразований получаем

$$p_i = \frac{\partial}{\partial x_m} t_{ilm}^n u_l, \quad t_{ilm}^n = c_{iklm} n_k \quad (2.1)$$

Заметим, что соотношение (2.1) можно записать

$$P^n = T^n u, \quad T^n = T_m^n \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad T_m^n = [t_{ilm}^n]_{i,l=1}^2 \quad (2.2)$$

Воздействуя оператором  $T^n$  на матрицу Грина (1.10), находим

$$G_1^n(\omega, x_1, x_2) = T^n G(\omega, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1^n(\omega, \xi_1, x_2) \exp(-i\xi_1 x_1) d\xi_1$$

В дальнейшем матрицу  $G_1^n(\omega, x_1, x_2)$  будем называть матрицей напряжений Грина.

Из (2.2) и (1.10) получаем:

$$G_1^n(\omega, \xi_1, x_2) = \sum_{m=0}^3 \eta_m(\omega, \xi_1, x_2) U_m(\omega, \xi_1) \quad (2.3)$$

$$U_0(\omega, \xi_1) = i\xi_1 (\xi_1^2 T_1^n F_{11} - \rho\omega^2 T_1^n)$$

$$U_1(\omega, \xi_1) = \xi_1^2 T_2^n F_{11} - \xi_1^2 T_1^n F_{12} + \rho\omega^2 T_2^n$$

$$U_2(\omega, \xi_1) = -i\xi_1 (T_2^n F_{12} + T_1^n F_{22})$$

$$U_3(\omega, \xi_1) = T_2^n F_{22}$$

$$\eta_m(\omega, \xi_1, x_2) = \frac{(-1)^m (\text{sign } x_2)^m}{2a_0 (\gamma_2^2 - \gamma_1^2)} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \gamma_j^{m-1} \exp(-\gamma_j |x_2|) \quad (2.4)$$

При выводе (2.4) учтено, что при  $m = 2$  множитель при  $\delta(x_2)$  обращается в нуль при  $x_2 = 0$  и поэтому соответствующее слагаемое может быть отброшено.

Можно убедиться, что

$$\gamma_j \sim |\xi_1| d_j, \quad d_j = \{a_{11}^2 + (-1)^j (a_{11}^2 - 4a_0 a_{21})^{1/2}\}^{1/2} \text{ при } |\xi_1| \rightarrow \infty$$

Отсюда следует, что

$$\eta_m(\omega, \xi_1, x_2) \sim \frac{(-1)^m (\text{sign } x_2)^m}{2a_0(d_2^2 - d_1^2)|\xi_1|^3} \sum_{j=1}^2 (-1)^j d_j^{m-1} \exp(-d_j |\xi_1 x_2|) \quad (2.5)$$

Используя (2.5), находим, что  $G_1^n(\omega, \xi_1, x_2) \sim G_1^n(0, \xi_1, x_2)$  при  $|\xi_1| \rightarrow \infty$ .

После преобразований получаем из (2.3)

$$G_1^n(0, \xi_1, x_2) = \frac{1}{2a_0(d_2^2 - d_1^2)} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} [i \text{sign}(\xi_1) d_j N_{j1}^n - \text{sign}(x_2) N_{j2}^n] \exp(-d_j |\xi_1 x_2|) \quad (2.6)$$

$$N_{j1}^n = d_j^{-2} T_1^n F_{11} + T_2^n F_{12} - T_1^n F_{22}, \quad N_{j2}^n = T_1^n F_{12} - T_2^n F_{11} + d_j^2 T_2^n F_{22}$$

Можно показать, что

$$|G_1^n(\omega, \xi_1, x_2) - G_1^n(0, \xi_1, x_2)| = \omega^2 [O(|x_2| O(|\xi_1|^{-1})) + O(|\xi_1|^{-2})] \quad (2.7)$$

Подставив (2.6) в (2.3), будем иметь после интегрирования

$$G_1^n(0, x_1, x_2) = \frac{1}{2a_0 \pi (d_2^2 - d_1^2)} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} d_j \left( N_{j1}^n \frac{x_1}{d_j^2 x_2^2 + x_1^2} - N_{j2}^n \frac{x_2}{d_j^2 x_2^2 + x_1^2} \right) \quad (2.8)$$

Представим матрицу  $G_1^n(\omega, x_1, x_2)$  в виде

$$G_1^n(\omega, x_1, x_2) = G_1^n(0, x_1, x_2) + R^n(\omega, x_1, x_2) \quad (2.9)$$

$$R^n(\omega, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [G_1^n(\omega, \xi_1, x_2) - G_1^n(0, \xi_1, x_2)] \exp(-i\xi_1 x_1) d\xi_1$$

Из оценки (2.7) следует, что матрица  $R^n(\omega, x_1, x_2)$  непрерывна по совокупности переменных  $x_1, x_2$ . Таким образом, особенности функций  $G_1^n(\omega, x_1, x_2)$  при  $\omega \neq 0$  и  $G_1^n(0, x_1, x_2)$  совпадают. Из (2.8) следует, что  $G_1^n(0, x_1, x_2)$  имеет единственную особенность при  $x = 0$ .

Построим теперь матрицу Грина  $\Gamma(\omega, x_1, x_2)$  квазипериодической задачи, т.е. определим составляющие амплитудных перемещений в точке  $x = (x_1, x_2)$  от действия системы сосредоточенных сил  $e_{jm} \exp(-i\omega t)$ , приложенных в точках с координатами  $x_1 = ml$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $x_2 = 0$  ( $l$  – длина некоторого отрезка), удовлетворяющих равенству  $e_{jm} = e_j \exp(-im\alpha)$  ( $e_j$  – орт оси  $x_j$ ,  $j = 1, 2$ ), а затем образуем из этих составляющих  $j$ -й столбец матрицы  $\Gamma(\omega, x_1, x_2)$ . Здесь  $\alpha$  – параметр квазипериодической задачи,  $|\alpha| \leq \pi$ .

Аналогично определяется матрица напряжений Грина квазипериодической задачи, столбцами которой являются составляющие напряжений на площадке с нормалью  $n$ . Ее обозначение  $\Gamma_1^n(\omega, x_1, x_2)$ .

Заметим, что представления динамических матриц Грина для анизотропной плоскости были получены в ряде работ (см. например, [8, 9]). Однако эти представления не могут быть использованы для эффективного построения матриц Грина квазипериодической задачи.

Заменим в (2.9)  $x_1$  на  $x_1 - ml$ , умножим на  $\exp(-im\alpha)$  и просуммируем по  $m$  от  $-\infty$

до  $\infty$ . В результате получим:

$$\Gamma_1^n(\omega, x_1, x_2) = \Gamma_1^n(0, x_1, x_2) + Q^n(\omega, x_1, x_2) \quad (2.10)$$

$$\Gamma_1^n(0, x_1, x_2) = G_1^n(0, x_1, x_2) + S^n(x_1, x_2)$$

$$S^n(x_1, x_2) = [2a_0\pi(d_2^2 - d_1^2)]^{-1} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} d_j \times$$

$$\times \left[ N_{j1}^n \sum_m' \frac{(x_1 - ml) \exp(-im\alpha)}{d_j^2 x_2^2 + (x_1 - ml)^2} - N_{j2}^n \sum_m' \frac{x_2 \exp(-im\alpha)}{d_j^2 x_2^2 + (x_1 - ml)^2} \right]$$

$$Q^n(\omega, x_1, x_2) = \sum_m R^n(\omega, x_1 - ml, x_2) \exp(-im\alpha) \quad (2.11)$$

$$Q^n(\omega, x_1, x_2) = Q_1^n(\omega, x_1, x_2) - Q_1^n(0, x_1, x_2)$$

$$Q_1^n(\omega, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1^n(\omega, \xi_1, x_2) \sum_m \exp[-i\xi_1(x_1 - ml) - im\alpha] d\xi_1$$

(штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемого с  $m = 0$ ).

Таким образом,

$$\Gamma_1^n(\omega, \mathbf{x}) = \sum_{l=1}^4 \Gamma_{1,l}^n(\mathbf{x}), \quad \Gamma_{11}^n(\mathbf{x}) = G_1^n(0, \mathbf{x}), \quad \Gamma_{12}^n(\mathbf{x}) = S^n(\mathbf{x}) \quad (2.12)$$

$$\Gamma_{13}^n(\mathbf{x}) = -Q_1^n(0, \mathbf{x}), \quad \Gamma_{14}^n(\mathbf{x}) = Q_1^n(\omega, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)$$

Воспользуемся формулой

$$\sum_m \exp(iml\xi) = \frac{2\pi}{l} \sum_k \delta\left(\xi - k \frac{2\pi}{l}\right)$$

получаем из (2.11)

$$Q^n(\omega, x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_m [G_1^n(\omega, \xi_1, x_2) - G_1^n(0, \xi_1, x_2)] \times$$

$$\times \exp[-i\xi_1(x_1 - ml) - im\alpha] d\xi_1 = \frac{1}{l} \sum_k [G_1^n(\omega, \xi_{1,k}, x_2) -$$

$$- G_1^n(\omega, \xi_{1,k}, x_2)] \exp(-i\xi_{1,k} x_1), \quad \xi_{1,k} = (2k\pi - \alpha) / l \quad (2.13)$$

Из (1.12) вытекает, что при значениях  $\omega$ , которые обращают  $\gamma_{jk}$  (т.е.  $\gamma_j$  при  $\xi_1 = \xi_{1,k}$ ) в нуль,  $\eta_0(\omega, \xi_{1,k}, x_2)$ , а следовательно, и  $\Gamma_1^n(\omega, x_1, x_2)$  принимают бесконечно большие значения. Назовем эти частоты резонансными и будем обозначать их  $\omega_{jk}$ .

Приравнявая (1.11) нулю, получаем

$$\omega_{jk} = \left| \xi_{1,k} \left[ a_{22} / 2 + (-1)^j (a_{22}^2 / 4 - a_{21})^{1/2} \right]^{1/2} \right. \quad (2.14)$$

Заметим, что при нерезонансном значении  $\omega$   $\Gamma_1^n(\omega, x_1, x_2)$  имеет ту же особенность,

что и  $G_1^n(0, x_1, x_2)$ , так как  $Q^n(\omega, x_1, x_2)$  и  $S^n(x_1, x_2)$  непрерывны.

3. Рассмотрим ортотропную однородную упругую плоскость с периодическим рядом круговых отверстий радиуса  $R$ , центры которых расположены на расстоянии  $l$  друг от

друга вдоль оси  $x_1$ . Будем решать стационарную квазипериодическую задачу, в которой нагрузка на отверстия преобразуется по неприводимому представлению группы трансляций с параметром  $\alpha$  ( $|\alpha| \leq \pi$ )

$$p_{k+1}(\theta) = \exp(-im\alpha)p_k(\theta)$$

Здесь  $k$  – номер отверстия ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $\theta$  – угловая координата точки контура. Решение задачи будем искать в виде потенциала простого слоя

$$u(x) = \int_{\Pi} \Gamma(\omega, x - y)q(y)ds_y \quad (3.1)$$

( $q(y)$  – двумерный вектор,  $\Pi$  – контур основного отверстия, центр которого находится в начале координат).

Поддействуем на (3.1) оператором  $T^n$

$$T^n u(x) = \int_{\Pi} \Gamma_1^n(\omega, x - y)q(y)ds_y \quad (3.2)$$

Перейдя к пределу при  $x \rightarrow x_0 \in \Pi$ , будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_{\Pi} \Gamma_1^n(\omega, x - y)q(y)ds_y = p_0(x_0) \quad (3.3)$$

Здесь  $n$  – нормаль к окружности  $\Pi$  в точке  $x_0$ ,  $p_0(x_0)$  – заданная нагрузка на контуре.

Предел интеграла в (3.3) не равен интегралу по окружности при  $x = x_0$  из-за особенности ядра  $\Gamma_1^n(\omega, x)$  при  $x = 0$ . Как уже было отмечено, эта особенность та же, что и у  $G_1^n(0, x)$ , поэтому отыскание дополнительного слагаемого к интегралу по  $\Pi$  при предельном переходе будем производить для ядра  $G_1^n(0, x)$ .

Введем комплексные переменные  $z_j = x_1 + id_j x_2$ ,  $\tau_j = y_1 + id_j y_2$ .

Тогда

$$\frac{x_1 - y_1}{d_j^2(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z_j - \tau_j} + \frac{1}{z_j + \tau_j} \right) \quad (3.4)$$

Пусть  $\theta$  – угол, определяющий положение точки  $y$  на окружности  $\Pi$ . Тогда  $y_1 = R \cos \theta$ ,  $y_2 = R \sin \theta$ ,  $\tau_j = R(\cos \theta + id_j \sin \theta)$ .

Отсюда

$$d\tau_j = \tau_j'(\theta)d\theta = (-y_2 + id_j y_1)d\theta \quad (3.5)$$

Так как  $ds_y = R d\theta$ , то, используя (3.5), получаем

$$ds_y = r(\tau_j)d\tau_j, \quad r(\tau_j) = R / (y_2 + id_j y_1)$$

Можно убедиться, что

$$\int_{\Pi} \frac{(x_1 - y_1)q(y)ds_y}{d_j^2(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2} = \frac{1}{2} \left[ \int_{\Pi_j} \frac{q(\tau_j)r(\tau_j)}{z_j - \tau_j} d\tau_j + \int_{\bar{\Pi}_j} \frac{q(\mu_j)r(\mu_j)}{\bar{z}_j - \mu_j} d\mu_j \right] \quad (3.6)$$

где  $q(\tau_j) = q(\mu_j) = q(y)$ ,  $\Pi_j$  – эллипс, являющийся образом окружности  $\Pi$  при преобразовании  $\tau_j = \tau_j(z)$ ,  $z = y_1 + iy_2 \in \Pi$ .

Аналогично,  $\bar{\Pi}_j$  – образ  $\Pi$  при отображении  $\mu_j = \bar{\tau}_j(z)$ , причем обход  $\bar{\Pi}_j$  производится по часовой стрелке.

Полагая, что функция  $q = q(y)$  удовлетворяет условию Липшица–Гельдера, из формул Сохоцкого–Племеля находим

$$\lim_{z \rightarrow z_{0j} \Pi_j} \int \frac{q(\tau_j)r(\tau_j)}{z_j - \tau_j} d\tau_j = \int_{\Pi_j} \frac{q(\tau_j)r(\tau_j)}{z_{0j} - \tau_j} d\tau_j + \pi i q(z_{0j})r(z_{0j}) \quad (3.7)$$

( $z_{0j} \in \Pi_j$ ,  $z_j \rightarrow z_{0j}$  с внешней стороны контура  $\Pi_j$ ).

Подобным образом может быть получено выражение для предела второго интеграла в правой части (3.6).

Учитывая представления (2.10) и (2.11), а также выражения для пределов в формуле (3.7), имеем из (3.3)

$$A^n(x)q(x) + \int_{\Pi} \Gamma_1^n(\omega, x-y)q(y)ds_y = p_0(x), \quad x \in \Pi \quad (3.8)$$

$$A^n(x) = d_0 \pi R \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} [N_{j1}^n d_j x_1 - N_{j2}^n x_2 / d_j] / (x_2^2 + d_j^2 x_1^2)$$

$$d_0 = [2a_0 \pi (d_2^2 - d_1^2)]^{-1}$$

Это и есть интегральное уравнение задачи.

В дальнейшем если вектор  $n$  направлен вдоль нормали к контуру  $\Pi$ , индекс  $n$  будем опускать.

4. Заменяя в (2.8)  $x$  на  $x - y$  и подставляя  $y_1 = R \cos \theta$ ,  $y_2 = R \sin \theta$ ,  $x_1 = R \cos \theta_0$ ,  $x_2 = R \sin \theta_0$ , будем иметь после преобразований

$$\begin{aligned} G_1^n(0, x-y) = & \frac{d_0}{2R} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} d_j \left[ N_{j1}^n \left( \cos \theta_0 + \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \sin \theta_0 \right) + \right. \\ & \left. + N_{j2}^n \left( \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \right) \right] \left( d_j^2 \cos^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta_0 + \theta}{2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из (2.10), (2.11) и (4.1) следует, что уравнение (3.8) сингулярно. Решение его будем искать в виде

$$q(\theta) = \sum_m q_m \exp(im\theta) \quad (4.2)$$

Здесь и в дальнейшем  $q(y)$  при  $y \rightarrow \Pi$  обозначается через  $q(\theta)$ , где  $\theta$  – полярный угол точки  $y$ . Аналогично  $p_0(x) = p_0(\theta_0)$  ( $\theta_0$  – полярный угол точки  $x$ ),  $\Gamma_1(\omega, x-y) = \Gamma_1(\omega, \theta_0, \theta)$  и т.д.

Подставив (4.2) в (3.9), получим равенство, умножая обе части которого на  $(2\pi)^{-1} \exp(-in\theta_0)$  и интегрируя по  $\theta_0$  от  $-\pi$  до  $\pi$ , приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно  $q_m$

$$\sum_m B_{nm} q_m = p_n \quad (4.3)$$

Здесь

$$B_{nm} = A_{n-m} + \frac{R}{2\pi} \sum_{l=1}^4 B_{lnm}$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\theta_0) \exp(-in\theta_0) d\theta_0, \quad p_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_0(\theta_0) \exp(-in\theta_0) d\theta_0$$

$$B_{lnm} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Gamma_{1,l}(\theta_0, \theta) \exp(im\theta - in\theta_0) d\theta d\theta_0 \quad (4.4)$$

Не останавливаясь на выводе, приведем формулы для вычисления коэффициентов линейной алгебраической системы

$$B_{lnm} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^2 [w_{j,2l-2+k,n-1,m} (N_{jk2} - iN_{jk1}) + w_{j,2l-2+k,n+1,m} (N_{jk2} + iN_{jk1})] \quad (4.5)$$

Здесь  $N_{jkm}$  ( $j, k, m = 1, 2$ ) – двумерные матрицы, являющиеся коэффициентами следующего представления матриц  $N_{jk}^n$ :

$$N_{jk}^n = N_{jk1} \sin \theta_0 + N_{jk2} \cos \theta_0, \quad \mathbf{n} = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$$

$$w_{j,1,n,m} = d_0 \pi^2 R^{-1} [s_{j,2m} (\delta_{n+1,m} + \delta_{n-1,m}) + s_{j,n-m-1} \text{sign}(m+n-1) - s_{j,n-m+1} \text{sign}(m+n+1)]$$

$$w_{j,2,n,m} = id_0 \pi^2 R^{-1} [s_{j,2m} (\delta_{n-1,m} - \delta_{n+1,m}) + s_{j,n-m-1} \text{sign}(m+n-1) + s_{j,n-m+1} \text{sign}(m+n+1)] \quad (4.6)$$

$$w_{j,3,n,m} = 4d_0 \pi^2 R^{-1} \sum_p e^{-ip\alpha} (t_{j,p,m+1} + t_{j,p,m-1} - p l R^{-1} t_{jpm}) \delta_{nm}$$

$$w_{j,4,n,m} = i4d_0 \pi^2 R^{-1} \sum_p e^{-ip\alpha} (t_{j,p,m-1} - t_{j,p,m+1}) \delta_{nm}$$

$$w_{j,5,n,m} = -4\pi^2 a_0 l^{-1} \sum_{q,p} \text{sign}(q) f_{jqp} \exp[i(m-n)\alpha_{pq}] J_m(a_{pq}) J_n(a_{pq})$$

$$w_{j,6,n,m} = -4\pi^2 a_0 l^{-1} \sum_{q,p} g_{jqp} \exp[i(m-n)\alpha_{pq}] J_m(a_{pq}) J_n(a_{pq})$$

( $J_m(x)$  – функция Бесселя первого рода,  $\delta_{nm}$  – символ Кронекера).

В этих формулах  $s_{jm}, t_{jkm}, f_{jkm}, g_{jkm}$  – коэффициенты разложений

$$(d_j^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{-1} = \sum_m s_{jm} e^{im\theta}, \quad [d_j^2 \sin^2 \theta + (kl - \cos \theta)^2]^{-1} = \sum_m t_{jkm} e^{im\theta}$$

$$\exp(-d_j |\xi_{1,k} x_2|) = \sum_m f_{jkm} \exp(im\pi x_2 / 2R)$$

$$\exp(-d_j |\xi_{1,k} x_2|) \text{sign } x_2 = \sum_m g_{jkm} \exp(im\pi x_2 / 2R)$$

Величины  $a_{jk}$  и  $\alpha_{jk}$  определяются из равенств

$$a_{jk} = (j^2 \pi^2 / 4 + R^2 \xi_{1,k}^2)^{1/2}, \quad \text{tg } \alpha_{jk} = 2R \xi_{1,k} / j\pi$$

Можно убедиться, что

$$s_{jm} = O(z_1^{|m|}), \quad t_{jkm} = O(z_2^{|m|}), \quad f_{jkm} = O(m^{-2}), \quad g_{jkm} = O(|m|^{-1}) \quad (4.7)$$

где  $z_k$  – некоторые комплексные числа,  $|z_k| < 1$  ( $k = 1, 2$ ).

Заметим, что при выводе (4.5) и (4.6) использованы соотношения

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta - \theta_0}{2}\right) \exp(im\theta) d\theta = 2\pi i \exp(im\theta_0) \operatorname{sign} m$$

Аналогичные соотношения имеют место и для  $A_n$ :

$$A_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^2 [w_{j,6+k,n-1} (N_{j,k,2} + N_{j,k,1}) + w_{j,6+k,n+1} (N_{j,k,2} - N_{j,k,1})]$$

$$w_{j,7,n} = \frac{d_0 d_1}{2} (s_{j,n-1} + s_{j,n+1}), \quad w_{j,8,n} = \frac{d_0}{2iR d_j} (s_{j,n-1} - s_{j,n+1})$$

5. Покажем, что при нерезонансных значениях  $\omega$  система приводится к квази-регулярной.

Из (4.4) и (4.5) имеем

$$\mathbf{B}_{1,n,m} = \frac{d_0 \pi^2}{2R} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} d_j [s_{j,2,m} (\delta_{n-2,-m} \mathbf{E}_{j1} +$$

$$+ \delta_{n+2,-m} \mathbf{E}_{j2} + 2\delta_{n,-m} \mathbf{E}_{j3}) + s_{j,n-m-2} \operatorname{sign}(m+n-2) \mathbf{E}_{j1} -$$

Здесь

$$\mathbf{E}_{j0} = i(N_{j11} - N_{j22}), \quad \mathbf{E}_{j1} = -iN_{j11} + N_{j12} + N_{j21} - iN_{j22}$$

$$\mathbf{E}_{j2} = iN_{j11} + N_{j12} + N_{j21} + iN_{j22}, \quad \mathbf{E}_{j3} = N_{j12} - N_{j21}$$

Можно убедиться, что при  $|n| \geq 2$

$$\mathbf{B}_{1,n,n} = \mathbf{B}_0 \operatorname{sign} n, \quad \mathbf{B}_0 = \frac{d_0 \pi^2}{2R} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} [s_{j2} (\mathbf{E}_{j1} - \mathbf{E}_{j2}) + 2s_{j0} \mathbf{E}_{j0}]$$

Аналогично

$$A_n = \frac{d_0 \pi}{4} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} d_j (s_{j,n-2} \mathbf{E}_{j5} + s_{j,n+2} \mathbf{E}_{j6} + 2s_{jn} \mathbf{E}_{j4})$$

$$\mathbf{E}_{j4} = d_j N_{j12} + d_j^{-1} N_{j21}, \quad \mathbf{E}_{j5} = d_j (-iN_{j11} + N_{j12}) - d_j^{-1} (N_{j21} + iN_{j22})$$

$$\mathbf{E}_{j6} = d_j (iN_{j11} + N_{j22}) - d_j^{-1} (N_{j21} - iN_{j22})$$

Отсюда

$$A_0 = \frac{d_0 \pi}{4} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} d_j [s_{j2} (\mathbf{E}_{j5} + \mathbf{E}_{j6}) + 2s_{j0} \mathbf{E}_{j4}]$$

Введем обозначение  $\mathbf{D}_n = A_0 + R\mathbf{B}_0 \operatorname{sign} n / (2\pi)$  и сделаем в системе (4.3) подстановку  $\mathbf{q}_m = \mathbf{D}_m^{-1} \mathbf{q}_m^D$ . В результате получим систему

$$\sum_m \mathbf{B}_{nm}^D \mathbf{q}_m^D = \mathbf{p}_n, \quad \mathbf{B}_{nm}^D = \mathbf{B}_{nm} \mathbf{D}_m^{-1} \quad (5.3)$$

Заметим, что

$$\mathbf{B}_{nm}^D = \sum_{l=1}^4 \mathbf{B}_{lnm}^D, \quad \mathbf{B}_{1,n,m}^D = \left( A_{n-m} + \frac{R}{2\pi} \mathbf{B}_{1,n,m} \right) \mathbf{D}_m^{-1}, \quad \mathbf{B}_{lnm}^{-1} = \mathbf{B}_{lnm} \mathbf{D}_m^{-1} \quad (l > 1)$$

Очевидно, что при  $|n| \geq 2$  на главной диагонали матриц  $\mathbf{B}_{1,n,m}^D$  стоят единицы.

Оценим сумму  $\sum_{l=1}^2 \sum_{m \neq n} |\mathbf{B}_{1,n,m,k,l}^D|$  ( $\mathbf{B}_{1,n,m,k,l}^D$  – элементы матрицы  $\mathbf{B}_{1,n,m}^D$ ).

Из (5.1) следует

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{m \neq n} |\mathbf{B}_{1,n,m,k,l}^D| \leq \beta_{nk} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \beta_{nk} = & \frac{d_0 \pi}{4} \sum_{j=1}^2 d_j \sum_{l=1}^2 (|\mathbf{E}_{1,j,k,l}^D| |s_{j,2n-4}| + |\mathbf{E}_{j,2,n,l}^D| |s_{j,2n+4}| + \\ & + 2|\mathbf{E}_{j,3,k,l}^D| |s_{jn}| + (|\mathbf{E}_{j,1,k,l}^D| + |\mathbf{E}_{j,5,k,l}^D|) \sum_m' |s_{j,m-2}| + \\ & + (|\mathbf{E}_{j,2,k,l}^D| + |\mathbf{E}_{j,6,k,l}^D|) \sum_m' |s_{j,m+2}| + (|\mathbf{E}_{j,0,k,l}^D| + |\mathbf{E}_{j,4,k,l}^D|) \sum_m' |s_{jm}| \end{aligned}$$

Здесь штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемого с  $m = n$ ,  $\mathbf{E}_{jmk,l}^D$  – элементы матриц  $\mathbf{E}_{jm}^D = \mathbf{E}_{jm} D_m^{-1}$ .

Из асимптотических оценок (4.7) следует сходимость рядов в (5.4).

Условие  $\beta_{nk} < 1$ , а также условие существования  $\mathbf{D}_m^{-1}$  являются ограничениями, накладываемыми на упругие константы материала. Однако для ортотропных материалов, характеристики которых приведены в [6, 7], эти условия выполнены.

Из (4.7) следует, что коэффициенты  $\mathbf{B}_{2,n,m}^D$  не влияют на квазирегулярность системы (5.3).

Можно показать, что функция  $Q(\omega, \theta_0, \theta)$  непрерывна в квадрате  $|\theta_0|, |\theta| \leq \pi$  и имеет там частные производные, удовлетворяющие условию Липшица некоторого порядка  $\mu$  ( $0 < \mu < 1$ ). Интегрируя по частям по  $\theta$  в (4.4) и учитывая, что внеинтегральные члены обращаются в нуль, получим

$$\mathbf{B}_{3,n,m} + \mathbf{B}_{4,n,m} = \frac{i}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} [Q(\omega, \theta_0, \theta) - Q(0, \theta_0, \theta)] e^{im\theta} d\theta e^{-in\theta_0} d\theta_0 \quad (5.5)$$

Так как  $\frac{\partial}{\partial \theta} [Q(\omega, \theta_0, \theta) - Q(0, \theta_0, \theta)]$  удовлетворяет условию Липшица, то внутренний интеграл стремится к нулю при  $|m| \rightarrow \infty$  как  $|m|^{-\mu}$ . Кроме того, внутренний интеграл является непрерывной функцией  $\theta_0$ . Поэтому правая часть (5.5) стремится к нулю и при  $|n| \rightarrow \infty$ . Тогда из (5.5) вытекает, что

$$S_{nk}^D = \sum_m \sum_{l=1}^2 |\mathbf{B}_{3,n,m,k,l}^D + \mathbf{B}_{4,n,m,k,l}^D|$$

существует и  $S_{nk}^D \rightarrow 0$  при  $|n| \rightarrow \infty$ .

Резюмируя все изложенное выше относительно коэффициентов системы (5.3), приходим к выводу, что эта система квазирегулярна, а значит, и она, и система (4.3) могут быть решены редукцией.

6. Исследуем поведение решения уравнения (3.9) в окрестности резонансной частоты (2.14). Предположим, например, что  $\omega \rightarrow \omega_{1,k}$  ( $k$  – фиксировано). Тогда  $\gamma_{1,k} \rightarrow 0$ , а слагаемое в  $G_1^n(\omega, \xi_{1,k}, x_2)$  стремится к бесконечности. Можно убедиться, что это слагаемое имеет приведенный ниже вид и следующую асимптотику:

$$U_0(\omega, \xi_{1,k}) \frac{\exp(-\gamma_{1,k}|x_2|)}{2a_0 l (\gamma_{2,k}^2 - \gamma_{1,k}^2) \gamma_{1,k}} \sim U_0(\omega_{1,k}, \xi_{1,k}) [2a_0 l \gamma_{2,k}^2 \gamma_{1,k}]^{-1}$$

при  $\omega \rightarrow \omega_{1,k}$ ,  $\gamma_{1,k} \rightarrow 0$ .

Тогда матрица напряжений Грина квазипериодической задачи может быть записана так:

$$\Gamma_1^n(\omega, x_1, x_2) = G_1^n(0, x_1, x_2) + U_0(\omega_{1,k}, \xi_{1,k}) \frac{\exp(-i\xi_{1,k}x_1)}{2a_0 l \gamma_{2,k}^2} \gamma_{1,k}^{-1} + H_k^n(\omega, x_1, x_2) \quad (6.1)$$

где  $H_k^n(\omega, x_1, x_2)$  – матрица, непрерывная как функция  $x_1$  и  $x_2$ , и остающаяся ограниченной при  $\omega \rightarrow \omega_{1,k}$ .

При помощи (6.1) интегральное уравнение (3.9) записывается так:

$$(\varepsilon^{-1}V_1 + V_2)q = v \quad (6.2)$$

$$\varepsilon = \gamma_{1,k}, \quad V_1q = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-i\xi_{1,k}R(\cos\theta_0 - \cos\theta)]q(\theta)d\theta$$

$$V_2q = \frac{a_0 l \gamma_{2,k}^2}{\pi} U_0^{-1}(\omega_{1,k}, \xi_{1,k}) \left[ A(x)q(x) + \int_{\Pi} G_1(0, x-y)q(y)ds_y + \int_{\Pi} H_k(\omega, x-y)q(y)ds_y \right], \quad v = \frac{a_0 l \gamma_{2,k}^2}{\pi} U_0^{-1}(\omega_{1,k}, \xi_{1,k}) p_0(x) \quad (6.3)$$

Заметим, что  $V_1$  – конечномерный оператор, переводящий пространство  $L_2^{(2)}(-\pi, \pi)$  в двумерное подпространство, натянутое на векторы  $e_j \exp(-i\xi_{1,k}R \cos\theta_0)$  ( $j = 1, 2$ ). Через  $L_2^{(2)}(-\pi, \pi)$  обозначено гильбертово пространство интегрируемых с квадратом двумерных векторов со скалярным произведением

$$(p, q) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^2 p_j(\theta) \bar{q}_j(\theta) d\theta$$

Оператор  $V_2$  непрерывно зависит от  $\varepsilon$ , поэтому для малых  $\varepsilon$  полагаем  $V_2(\varepsilon) = V_2(0)$ . Из (6.2) получаем

$$(V_1 + \varepsilon V_2)q = \varepsilon v \quad (6.4)$$

Заметим, что  $L_2^{(2)}(-\pi, \pi)$  представляется в виде ортогональной суммы подпространств

$$L_2^{(2)}(-\pi, \pi) = R + N \quad (6.5)$$

Здесь  $R$  – область значений самосопряженного оператора  $V_1$ , а  $N$  – его нуль-пространство. Из (6.5) следует, что в  $L_2^{(2)}(-\pi, \pi)$  можно построить ортонормированный

базис следующим образом:

$$\mathbf{g}_{0j} \in R, \quad \mathbf{g}_{mj} (m \neq 0) \in N \quad (j = 1, 2)$$

Например, можно положить  $\mathbf{g}_{mj} = \mathbf{e}_j \exp(-i\xi_{1,k} R \cos \theta - im\theta)$

Решение уравнения (6.4) будем искать в виде ряда

$$\mathbf{q}(\theta) = \sum_m \sum_{j=1}^2 p_{mj} \mathbf{g}_{mj}(\theta) \quad (6.6)$$

Подставив (6.6) в (6.4) и умножив скалярно на  $\mathbf{g}_{nl}(\theta_0)$ , получим

$$p_{0l} + \varepsilon \sum_m \sum_{j=1}^2 p_{mj} (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{mj}, \mathbf{g}_{0l}) = \varepsilon (\mathbf{v}, \mathbf{g}_{0l}) \quad (l = 1, 2) \quad (6.7)$$

$$\sum_m \sum_{j=1}^2 p_{mj} (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{mj}, \mathbf{g}_{nl}) = (\mathbf{v}, \mathbf{g}_{nl}) \quad (n \neq 0, l = 1, 2)$$

Исключая в (6.7)  $p_{0l}$  ( $l = 1, 2$ ), приходим к следующей системе линейных уравнений относительно  $p_{mj}$  ( $j = 1, 2; m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ):

$$\sum_{m \neq 0} \sum_{j=1}^2 V_{mjnl} p_{mj} = v_{nl} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots; l = 1, 2)$$

Здесь

$$V_{mjnl} = (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{mj}, \mathbf{g}_{nl}) + \varepsilon \sum_{p=1}^2 (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{mj}, \mathbf{g}_{0p}) \kappa_{pnl}$$

$$\kappa_{1,n,l} = \{-[1 + \varepsilon (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{02}, \mathbf{g}_{02})] (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{01}, \mathbf{g}_{nl}) + \varepsilon (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{01}, \mathbf{g}_{02}) (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{02}, \mathbf{g}_{nl})\} / \kappa$$

$$\kappa_{2,n,l} = \{\varepsilon (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{02}, \mathbf{g}_{01}) (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{01}, \mathbf{g}_{nl}) + [1 - \varepsilon (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{01}, \mathbf{g}_{01})] (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{02}, \mathbf{g}_{nl})\} / \kappa$$

$$\kappa = 1 + \varepsilon [(\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{01}, \mathbf{g}_{01}) + (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{02}, \mathbf{g}_{02})] + \varepsilon^2 [(\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{01}, \mathbf{g}_{01}) (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{02}, \mathbf{g}_{02}) -$$

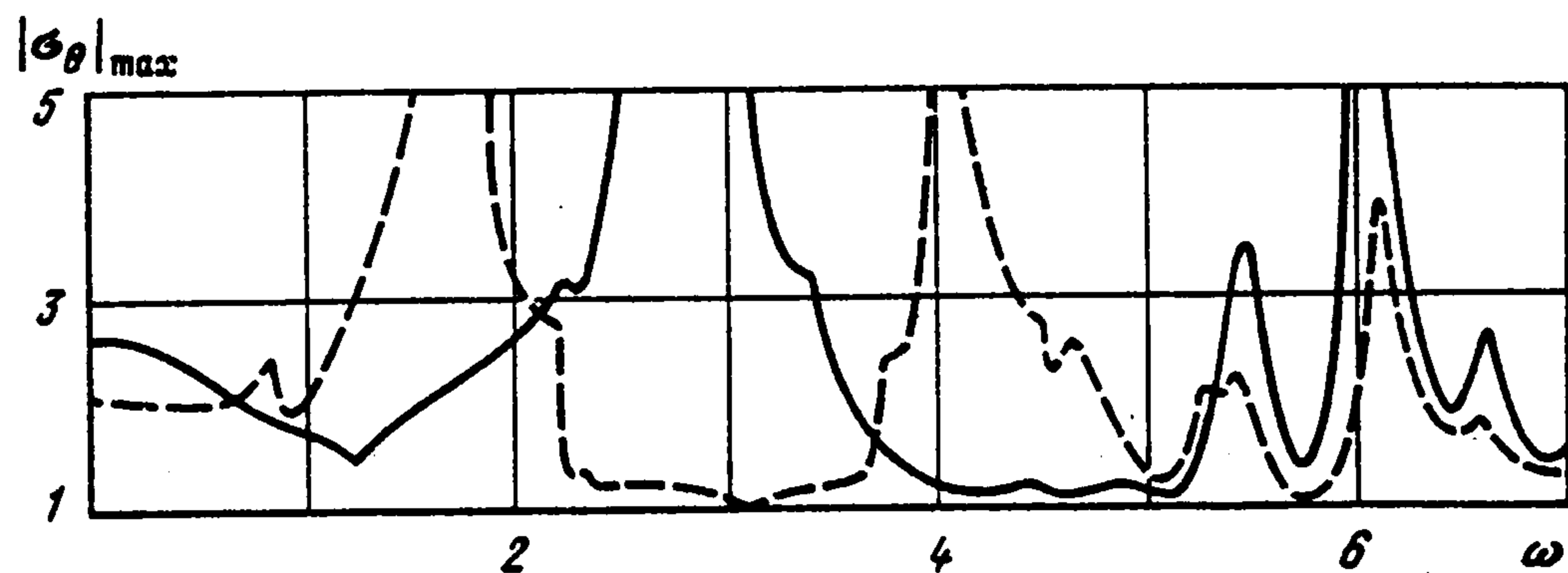
$$- (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{01}, \mathbf{g}_{02}) (\mathbf{V}_2 \mathbf{g}_{02}, \mathbf{g}_{01})], \quad v_{nl} = (\mathbf{v}, \mathbf{g}_{nl}) + \varepsilon \sum_{p=1}^2 (\mathbf{v}, \mathbf{g}_{0p}) \kappa_{pnl}$$

Из (6.3) следует, что система (6.6) приводится к квазирегулярной при достаточно малом  $\varepsilon$  (включая и  $\varepsilon = 0$ ). Доказательство проводится так же, как и для (4.4). Таким образом, поведение решения в окрестности резонансных точек принципиально не отличается от поведения его при других частотах.

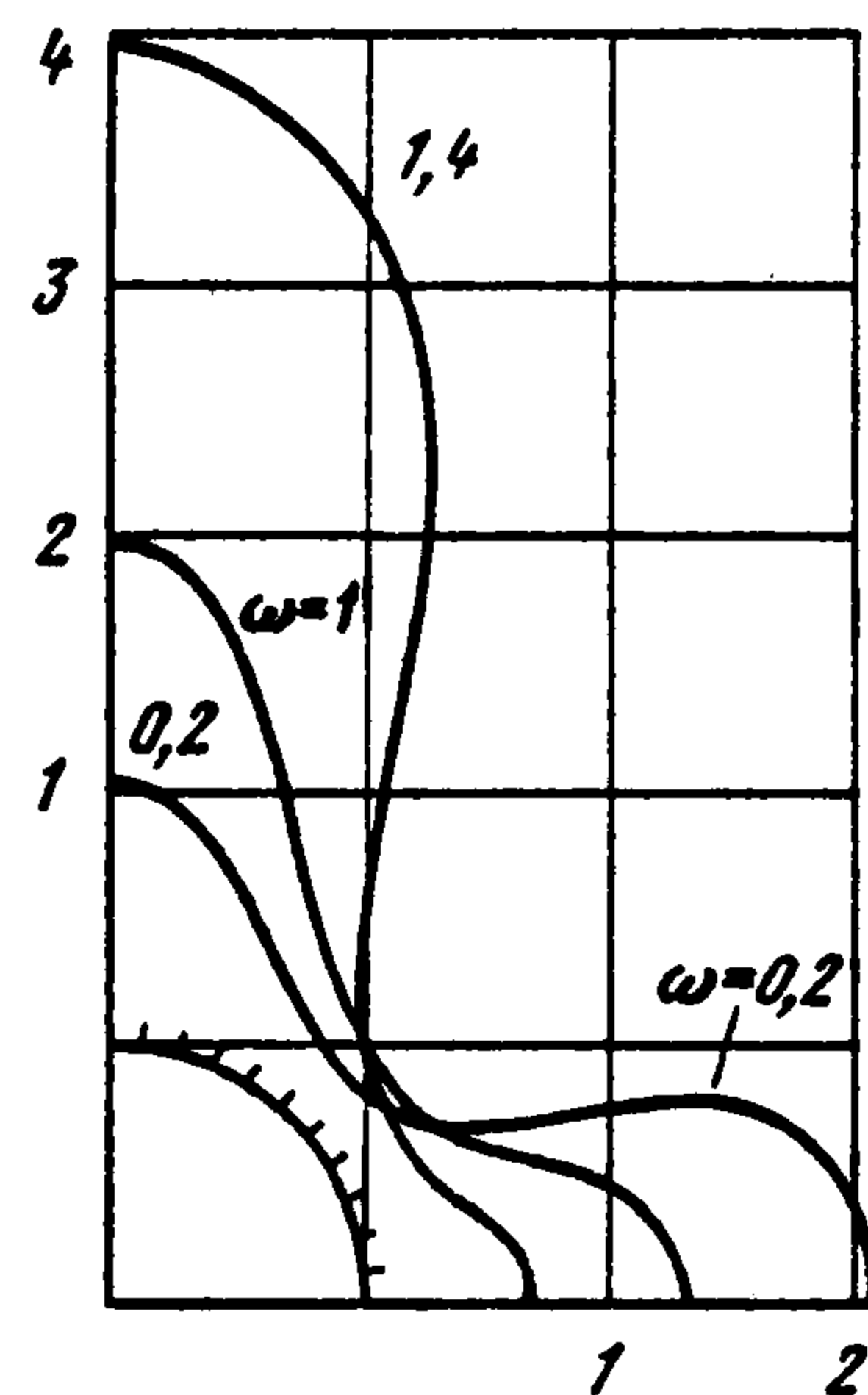
*Пример.* Периодическая задача ( $\alpha = 0$ ). Пусть на контурах отверстий действует одинаковая нормальная нагрузка  $p(\omega, t) = \exp(-i\omega t)$ . Для ортогональноармированного стеклопластика 2 : 1 [7] при  $l = 4$  имеем следующие значения резонансных частот:  $\omega_{1,k} = 3,025k$ ;  $\omega_{2,k} = 1,111k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), а при  $l = 6$ ,  $\omega_{1,k} = 2,017k$ ,  $\omega_{2,k} = 0,741k$ . Величины  $l$  и  $\omega$  безразмерны:  $l = l'/R$ ,  $\omega^2 = 4\rho(\omega'R)^2 c_{66}^{-1}$  ( $l'$ ,  $\omega'$ ,  $R$ ,  $\rho$ ,  $c_{66}$  – размерные величины). На фиг. 2 приведены графики

зависимости  $|\sigma_\theta|_{\max} / (2c_{66})$  на контуре отверстия от  $\omega$  для  $l = 4$  (сплошная линия) и  $l = 6$  (штрихи). Вблизи резонансных частот имеются конечные максимумы, причем с ростом  $\omega$  они становятся меньше, а их абсциссы приближаются к  $\omega_{j,k}$ . На фиг. 3 показана эволюция эпюры  $|\sigma_\theta|$  на контуре отверстия при приближении к резонансной частоте  $\omega_{1,1}$  для  $l = 6$ .

Если же на периодическую систему отверстий падает плоская волна, то можно убедиться, что в точках двух соседних отверстий отраженной волне соответствуют напряжения, различающиеся множителем  $\exp(ik/\cos\varphi)$  ( $\varphi$  – угол падения волны,  $k$  – ее волновое



Фиг. 2



Фиг. 3

число). Таким образом, в этом случае имеем квазипериодическую задачу с  $\alpha = -k/\cos\varphi$ .

Если рассматривается задача излучения с нагрузкой на отверстиях, не обладающей квазипериодическими свойствами, то решение ее сводится к решению ряда квазипериодических задач и их суперпозиции.

Работа выполнена в рамках проекта "Нерегулярность", финансируемого ГКНТ Украины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фомин В.М. Стационарные задачи излучения и дифракции упругих волн в плоскости с периодическим рядом отверстий // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 75–91.
2. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. Киев: Наук. думка, 1972. 254 с.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка, 1973. 308 с.
4. Черевко М.А. Дифракция продольной волны на ряде полых круговых включений // Прикл. механика. 1982. 18. № 2. С. 120–123.
5. Космодамианский А.С., Сторожев В.И. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. Киев: Наук. думка, 1985. 175 с.
6. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1986. 386 с.
7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
8. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.
9. Натрошвили Д.Г. О фундаментальных матрицах уравнений установившихся колебаний и псевдоколебаний анизотропной теории упругости. Сообщ. АН ГРУЗ. ССР. 1979. Т. 96. № 1. С. 49–52.
10. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963. 472 с.
11. Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980. 463 с.
12. Фомин В.М. Плоская стационарная динамическая контактная задача периодической структуры // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 84–94.