

УДК 531.36: 62-50

© 1993 г. Э.К. Лавровский, А.М. Формальский

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РАСКАЧИВАНИЕМ И ТОРМОЖЕНИЕМ КАЧЕЛЕЙ

Рассматривается задача об управлении, максимизирующем или минимизирующем отклонение качелей от вертикали в их высшей точке. Моделью качелей служит плоский физический маятник с расположенной на нем материальной точкой. Эта точка может перемещаться в ограниченных пределах вдоль прямой, проходящей через ось подвеса и центр масс маятника. Учитываются силы вязкого и сухого трения в оси подвеса, а также линейная по скорости сила "аэродинамического" сопротивления, действующая на подвижную точку. Управляющей переменной служит расстояние от оси подвеса до подвижной точки.

Известно (см., например, [1, 2]), что качели с находящимся на них человеком раскачиваются, если центр тяжести системы поднимается, когда они проходят через низшую точку, и опускается, когда они оказываются в высшей точке, где их скорость равна нулю. При некоторых условиях подобный закон управления, как выясняется здесь, оптимален с точки зрения максимизации отклонения качелей от вертикали в их высшей точке, т.е. к концу полупериода колебаний. Если, однако, из-за сопротивления воздуха движению возникает вязкое трение и (или) есть сухое трение в шарнире, то оптимальное управление видоизменяется. Его переключение, как оказывается, происходит до того, как качели пройдут через низшую точку. Кроме того, это переключение может происходить плавно (непрерывно). Построен оптимальный закон торможения качелей, в каком-то смысле обратный закону раскачивания.

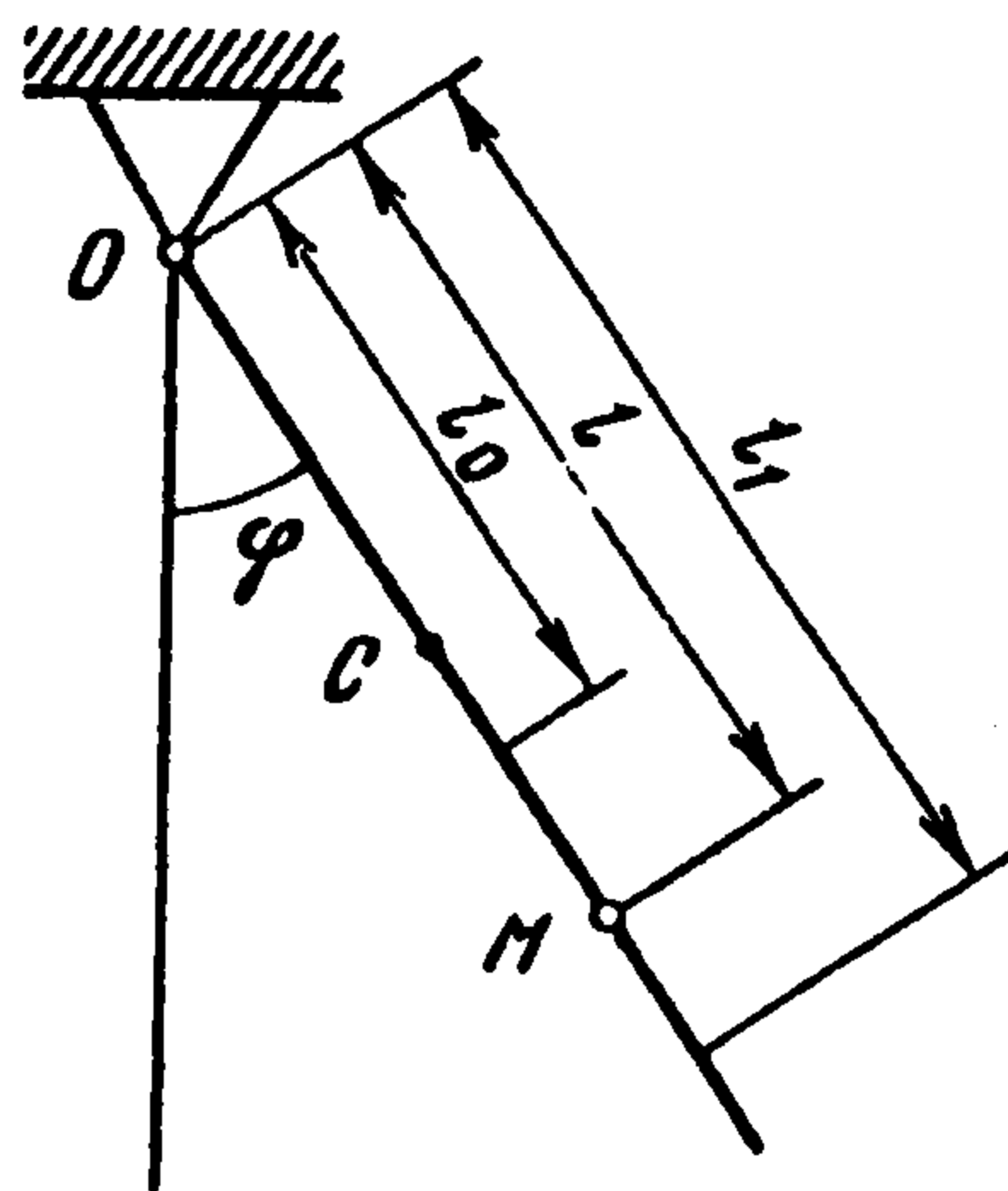
Задача управления качелями связана с задачей гашения при помощи выдвигания штанг колебаний вокруг центра масс спутника, находящегося в гравитационном поле, и с задачами управления некоторыми спортивными движениями. Она представляет также теоретико-механический интерес.

1. Уравнения движения. В качестве модели качелей с человеком на них будем рассматривать плоский физический маятник массы m с перемещающейся на нем материальной точкой массы M (фиг. 1). Пусть I – момент инерции маятника относительно точки подвеса O , ρ – расстояние от точки O до центра масс маятника C . Материальная точка M может передвигаться вдоль прямой OC . Ее расстояние OM от точки O обозначим через l . Пусть $l_0 \leq l \leq l_1$, где $l_0, l_1 = \text{const}$, $l_1 > l_0$.

Уравнение движения описанной системы имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left[(I + Ml^2) \frac{d\varphi}{dt} \right] + (cl^2 + c_1) \frac{d\varphi}{dt} + v + \zeta = 0, \quad \zeta = (Ml + m\rho) g \sin \varphi \quad (1.1)$$

Здесь φ – угол отклонения маятника от вертикали, отсчитываемый против часовой стрелки (фиг. 1), $c > 0$ – коэффициент сил вязкого демпфирования, возникающих из-за сопротивления воздуха движению (раскачиванию) массы M (человека) [1], $c_1 > 0$ – коэффициент сил вязкого демпфирования, возникающих из-за сопротивления воздуха



Фиг. 1

движению качелей без массы M (без человека), а также в шарнире, g – ускорение свободного падения, v – момент сил сухого трения в шарнире, порог которого равен v_0 :

$$v = \begin{cases} v_0 \operatorname{sgn} \dot{\varphi}, & \dot{\varphi} \neq 0 \\ -\zeta, & \dot{\varphi} = 0, |\zeta| \leq v_0 \\ v_0, & \dot{\varphi} = 0, \zeta \leq -v_0 \\ -v_0, & \dot{\varphi} = 0, \zeta \geq v_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Введем безразмерные время τ , момент инерции j , коэффициенты вязкости χ и χ_1 , порог момента сил трения δ , момент силы тяжести маятника μ , расстояние OM , обозначенное через u ,

$$\tau = \frac{t\sqrt{g}}{\sqrt{l_0}}, \quad j = \frac{I}{Ml_0^2}, \quad \chi = \frac{c\sqrt{l_0}}{M\sqrt{g}}, \quad \chi_1 = \frac{c_1}{Mgl_0\sqrt{l_0g}}$$

$$\delta = \frac{v_0}{Mgl_0}, \quad \mu = \frac{m\rho}{Ml_0}, \quad u = \frac{l}{l_0}$$

Тогда уравнение (1.1) можно записать в виде системы уравнений Коши

$$\dot{\varphi} = K / (j + u^2)$$

$$\dot{K} = -(\chi u^2 + \chi_1)K / (j + u^2) - \delta \operatorname{sgn} K - (u + \mu) \sin \varphi \quad (1.3)$$

Здесь K – момент количества движения системы, точкой обозначено дифференцирование по τ . Введение фазовой переменной K вместо $\dot{\varphi}$ позволяет избежать дифференцирования по времени величины u , которая может изменяться скачкообразно. Вместе с функцией $u(\tau)$ претерпевает разрывы скорость $\dot{\varphi}(\tau)$, однако момент $K(\tau)$ остается непрерывной функцией (если силы трения, как принято в модели, остаются конечными). Управление u , впрочем как и угол φ , входит в систему (1.3) нелинейно. Из соотношения (1.2) в системе (1.3) используется только верхняя строка.

В соответствии со сказанным выше, управляющий параметр u ограничен:

$$1 \leq u \leq U \quad (U = l_1 / l_0, U > 1) \quad (1.4)$$

Будем считать, что $\delta < 1 + \mu$. Тогда зоны застоя системы (1.1), (1.2)

$$-\varphi_*(u) \leq \varphi \leq \varphi_*(u), \quad K = 0 \quad (1.5)$$

$$\pi - \varphi_*(u) \leq \varphi \leq \pi + \varphi_*(u), \quad K = 0 \quad (1.6)$$

$$(\varphi_*(u) = \arcsin[\delta / (u + \mu)])$$

не занимают весь диапазон $-\pi \leq \varphi < \pi$ при $u = 1$, а значит ни при каком значении $u \in [1, U]$. Следовательно, существуют такие два интервала, содержащие точки $\pi/2$ и $-\pi/2$, что при значениях угла $\varphi(0)$, принадлежащих им, сухое трение не мешает маятнику сдвинуться с места при любом расположении материальной точки M .

2. Постановка задачи. Пусть задано лежащее при всех $u \in [1, U]$ вне отрезков (1.5), (1.6) начальное состояние системы (1.3)

$$-\pi + \varphi_*(1) < \varphi(0) < -\varphi_*(1), \quad K(0) = 0 \quad (2.1)$$

Поставим задачу об оптимальном управлении раскачиванием качелей: требуется отыскать закон изменения управляющего параметра u на отрезке (1.4), при котором достигается $\max \varphi(\theta)$, где θ – первый после нулевого момент времени, когда $K(\theta) = 0$. Эту формулировку задачи запишем так:

$$\max_{1 \leq u \leq U} [\varphi(\theta)], \quad K(\theta) = 0, \quad \theta > 0 \quad (2.2)$$

Задачу об оптимальном законе торможения качелей запишем в виде

$$\min_{1 \leq u \leq U} [\varphi(\theta)], \quad K(\theta) = 0, \quad \theta > 0 \quad (2.3)$$

При постановке задачи (2.2) (задачи (2.3)) начальное состояние (2.1) считается таким, что время θ , при котором достигается максимум (минимум) угла $\varphi(\theta)$ и $K(\theta) = 0$, существует.

Поставленные задачи (2.2), (2.3) являются по существу задачами Булгакова [3] о накоплении возмущений. Видоизмененная постановка задачи Булгакова, в которой время θ на правом конце не задается, а определяется условием вида $K(\theta) = 0$, содержится в работе [4].

При условии (2.1) на интервале времени $0 < \tau < \theta$ кинетический момент системы (1.3) $K > 0$. Именно поэтому в уравнениях (1.3) используется из соотношения (1.2) только верхнее выражение.

3. Способ решения задачи. При любом допустимом управлении $u(\tau)$ угол $\varphi(\tau)$ с ростом времени τ от 0 до θ растет строго монотонно. Рассматривая с учетом этого обстоятельства фазовые траектории системы (1.3) на плоскости (φ, K) , можно убедиться, что задачу (2.2) решает управление u , которое максимизирует производную $dK/d\varphi$ в каждой точке траектории. Управление u , которое минимизирует эту производную, решает задачу (2.3). Экстремум указанной производной достигается при том же значении $u \in [1, U]$, что и экстремум функции

$$-\chi K u^2 - [\delta + (u + \mu) \sin \varphi] (j + u^2) \quad (3.1)$$

Если $0 \leq \varphi \leq \pi$, то экстремум функции (3.1), отыскать легко: ее максимум достигается при $u = 1$, а минимум – при $u = U$. При $-\pi < \varphi < 0$ экстремум функции (3.1) могут доставить не только граничные значения $u = 1$ или $u = U$, но и промежуточное значение $1 < u < U$. Если $-\pi < \varphi < 0$, то максимум (минимум) функции (3.1) достигается при том же значении u , что и максимум (минимум) функции

$$F(u, A, j) = u(u^2 + Au + j) \quad \left(A = A(\varphi, K) = \frac{\delta + \chi K}{\sin \varphi} + \mu \right) \quad (3.2)$$

Ниже для отыскания экстремума функции (3.2) привлекается уравнение

$$\partial F / \partial u = 3u^2 + 2Au + j = 0 \quad (3.3)$$

Из рассмотрения функций (3.1), (3.2) следует, что коэффициент вязкости χ_1 в отличие от χ и δ никак не влияет на картину синтеза оптимального управления.

Отметим следующее свойство управления, максимизирующего функцию (3.1), и соответствующей ему траектории. Возьмем на этой траектории какую-либо точку (φ^*, K^*) . Тогда, если при другом управлении траектория пересекает прямую $\varphi = \varphi^*$, то в точке пересечения $K \leq K^*$.

4. Система без сопротивления воздуха и сухого трения. В отсутствие указанных сил сопротивления движению, т.е. когда $\chi = \delta = 0$, максимум функции (3.1) достигается при $u = U$, если $-\pi < \varphi < 0$, и при $u = 1$, если $0 \leq \varphi \leq \pi$. Рассматривая следующий полупериод колебаний качелей (при $\tau > \theta$), заключаем, что оптимальное управление имеет вид

$$u = U \text{ при } \varphi K < 0 \quad (\varphi \dot{\varphi} < 0), \quad u = 1 \text{ при } \varphi K \geq 0 \quad (\varphi \dot{\varphi} \geq 0) \quad (4.1)$$

В книге [1] рассматривалось движение безмассовых ($j = \mu = 0$) качелей с управлением (4.1) без исследования, однако, вопроса о его оптимальности.

Оптимальный закон торможения является "обратным" (4.1)

$$u = 1 \text{ при } \varphi K < 0 \quad (\varphi \dot{\varphi} < 0), \quad u = U \text{ при } \varphi K \geq 0 \quad (\varphi \dot{\varphi} \geq 0) \quad (4.2)$$

Управление (4.1) максимизирует отклонение качелей от вертикали за любое наперед заданное число полупериодов колебаний, а управление (4.2) минимизирует такое отклонение.

5. Раскачивание качелей при наличии всех сил. Структура оптимального управления при учете всех диссипативных сил, описанных в системе (1.3), как оказывается, зависит от момента инерции j . Анализ функции (3.2) и ее производной по u показывает, что при построении оптимального управления возникают три случая:

$$1) j \leq 2U + 1, \quad 2) 2U + 1 < j < 3U^2, \quad 3) 3U^2 \leq j$$

В случае 1 функция (3.1) достигает максимума, если

$$u = \begin{cases} U, & \delta + \chi K + \Lambda \sin \varphi \leq 0 \\ 1, & \delta + \chi K + \Lambda \sin \varphi > 0 \end{cases} \quad \left(\Lambda = U + \mu + \frac{j+1}{U+1} \right) \quad (5.1)$$

Линия переключения управления (5.1) определяется уравнением

$$\delta + \chi K + \Lambda \sin \varphi = 0 \quad (F(1, A, j) = F(U, A, j)) \quad (5.2)$$

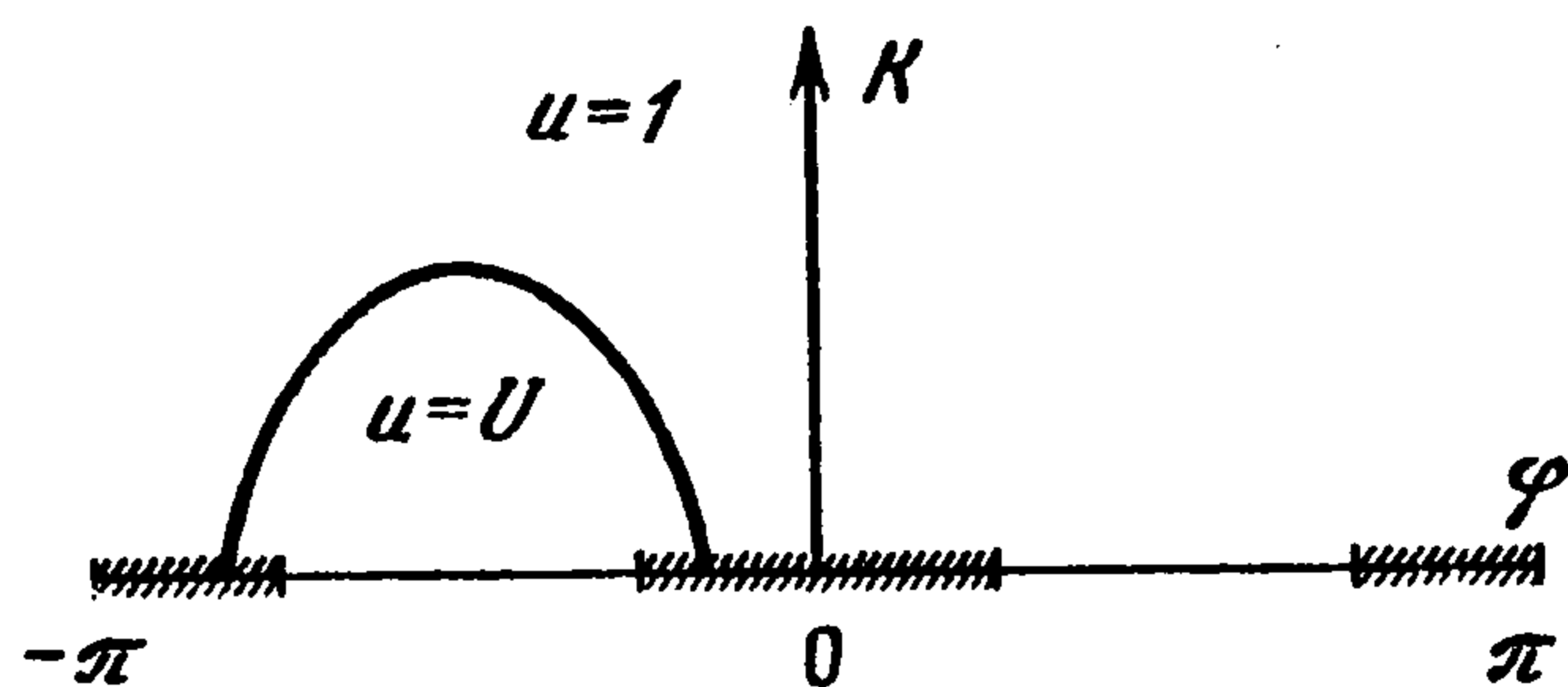
На фиг. 2 показана в полуплоскости $K > 0$ картина синтеза оптимального управления раскачиванием в случае 1 (заштрихованы зоны застоя). Кривая переключения (5.2) пересекает полуось $K = 0$, $\varphi < 0$ в двух точках:

$$\varphi = \varphi_0 = -\arcsin(\delta / \Lambda) \quad \text{и} \quad \varphi = -\pi - \varphi_0 \quad (5.3)$$

При $\chi = 0$ кривая (5.2) превращается в две прямые (5.3).

Построение картины синтеза оптимального управления позволяет решать задачу оптимизации не только для начальных состояний (2.1).

Управление (5.1), так же как и (4.1), является релейным. Однако переключение управления (5.1) со значения $u = U$ на значение $u = 1$ происходит не при $\varphi = 0$, как управления (4.1), а раньше. С ростом величин δ , χ и уменьшением величин μ , j точка



Фиг. 2

переключения управления на каждой оптимальной траектории удаляется от оси $\varphi = 0$. Значения (5.3) принадлежат отрезкам (1.5), (1.6), полученным при $u = 1$. Поэтому при любом начальном состоянии (2.1) в начале оптимального движения $u = U$. Если же $-\pi < \varphi(0) < -\pi - \varphi_0$, $K(0) > 0$, то в начале оптимального движения $u = 1$.

С ростом коэффициента трения χ момент переключения управления (5.1) со значения U на 1 приближается к началу движения. Это происходит потому, что с ростом значения χ становится выгоднее раньше уменьшать мешающий раскачиванию момент силы трения $\chi u^2 K / (j + u^2)$, несмотря на уменьшение при этом и раскачивающего момента силы тяжести $-u \sin \varphi$.

В случае 2 максимум функции (3.1) достигается, если

$$u = \begin{cases} U, & \delta + \chi K + \lambda(U) \sin \varphi \leq 0 \\ u_1(\varphi, K), & -\lambda(U) \sin \varphi < \delta + \chi K \leq -\eta(1) \sin \varphi \\ 1, & \delta + \chi K + \eta(1) \sin \varphi \geq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

$$u_1(\varphi, K) = -\frac{1}{3}(A + \sqrt{A^2 - 3j}), \quad \lambda(v) = 2\sqrt{j + v^2} - v + \mu, \quad \eta(v) = \frac{1}{2v}(j + 3v^2) + \mu$$

Величина $u_1(\varphi, K)$ является меньшим из двух корней квадратного уравнения (3.3).

Функция (5.4) на кривой переключения

$$\delta + \chi K + \lambda(U) \sin \varphi = 0 \quad (F[u_1(\varphi, K), A, j] = F(U, A, j)) \quad (5.5)$$

терпит разрыв. Поэтому при оптимальном движении управление с "упора" U на значение $u_1(\varphi, K)$ "сходит" скачком. Затем в процессе движения u строго монотонно и непрерывно убывает до единицы. При $j = 2U + 1$ "релейно-непрерывное" управление (5.4) превращается в чисто релейное (5.1).

Если $\chi = 0$, то выражение (5.4) принимает вид

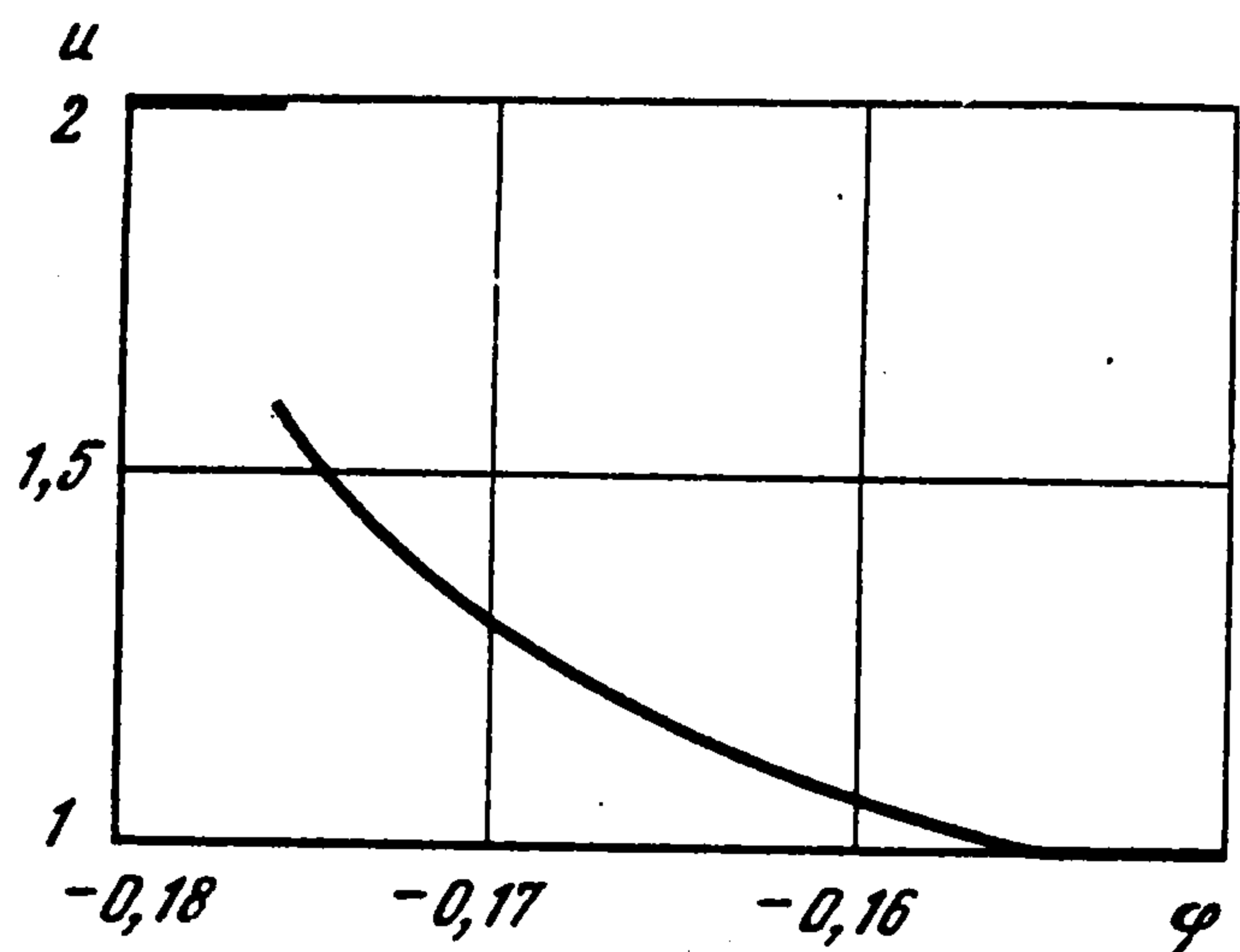
$$u = \begin{cases} U, & \varphi \leq \varphi_0 \\ u_1(\varphi, 0), & \varphi_0 < \varphi \leq \varphi_1 \\ 1, & \varphi_1 \leq \varphi \end{cases} \quad (5.6)$$

Угол φ_0 получается при решении уравнения (5.5), а угол φ_1 — путем решения уравнения (3.3) при $u = 1$

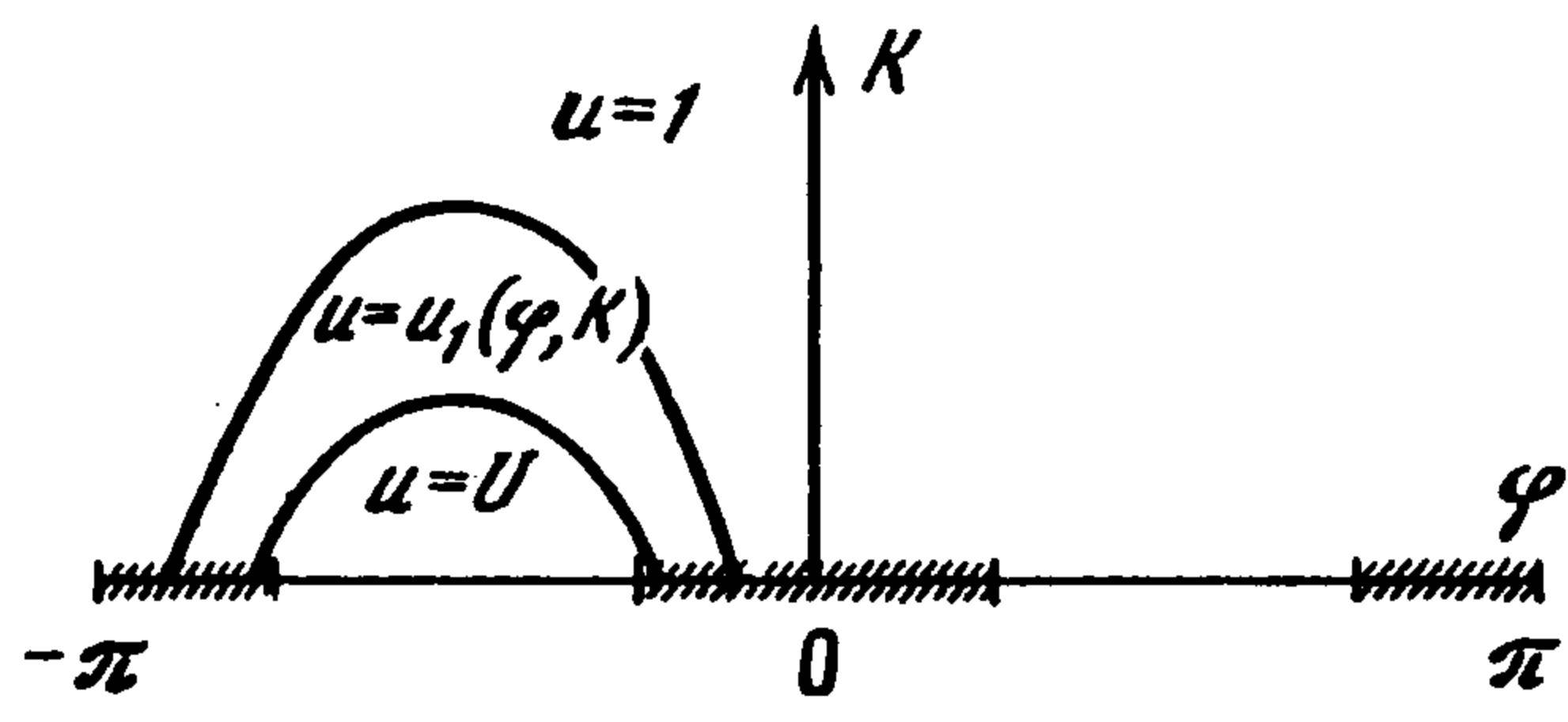
$$\varphi_0 = -\arcsin[\delta / \lambda(U)], \quad \varphi_1 = -\arcsin[\delta / \eta(1)] \quad (5.7)$$

Полученные в (5.7) значения φ_0 и φ_1 , а также значение φ_0 в (5.3) при $j = 2U + 1$ совпадают.

На фиг. 3 в качестве примера показан график функции (5.6), при $\delta = 1$, $\mu = 0,5$, $j = 9$, $U = 2$ на отрезке $[\varphi_0, \varphi_1]$ и в некоторой его окрестности.



Фиг. 3



Фиг. 4

В случае 3 максимум функции (3.1) достигается при управлении

$$u = \begin{cases} U, & \delta + \chi K + \eta(U) \sin \varphi \leq 0 \\ u_1(\varphi, K), & -\eta(U) \sin \varphi \leq \delta + \chi K \leq -\eta(1) \sin \varphi \\ 1, & \delta + \chi K + \eta(1) \sin \varphi \geq 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

На фиг. 4 показана в полуплоскости $K > 0$ картина синтеза оптимального управления (5.8).

В отличие от 2, в случае 3 оптимальное управление непрерывно. После "схода" с упора U его уменьшение до единицы происходит на каждой траектории строго монотонно. При $j = 3U^2$ управление (5.8) совпадает с (5.4). Если $\chi = 0$, то оптимальное управление имеет вид (5.6). Значение φ_0 получается из уравнения (3.3) при $u = U$

$$\varphi_0 = -\arcsin [\delta/\eta(U)]$$

и совпадает с полученным в (5.7) при $j = 3U^2$.

Интервал (φ_0, φ_1) принадлежит отрезку (1.5), полученному при $u = 1$. С ростом величины δ и уменьшением величин μ и j этот интервал отодвигается от оси $\varphi = 0$, где происходит переключение управления (4.1).

Полученные здесь результаты показывают, что при наличии сухого трения в шарнире и (или) вязкого трения, возникающего из-за сопротивления воздуха движению массы M , в оптимальном движении центр тяжести системы перемещается вверх не при прохождении качелями нижней точки, как в случае управления (4.1), а раньше.

Картина синтеза оптимального управления раскачиванием симметрична относительно начала координат. Поэтому ее легко распространить на полуплоскость $K < 0$.

С помощью оптимального управления качели, конечно, не всегда можно раскачать. Если, например, точка $(\varphi(0), 0)$ достаточно близка к "нижней" зоне застоя (1.5), то после конечного числа колебаний система попадает в эту зону и качели останавливаются. Колебания качелей затухают также, если $\delta = 0$, а величины χ и (или) χ_1 достаточно велики. В то же время для любого начального угла $\varphi(0) \neq 0$ существуют такие достаточно малые величины χ , χ_1 и δ , что при оптимальном управлении качели совершают незатухающие колебания. Есть такие начальные условия (2.1) и параметры системы, при которых после одного или нескольких колебаний качели "застревают" в "верхней" зоне застоя (1.6).

При заданном начальном состоянии (2.1) обозначим через φ' максимальное значение угла $\varphi(\theta)$ в момент θ , когда $K(\theta) = 0$. Тогда отклонение φ' невозможно достичь быстрее, чем за время θ . Следовательно, управление (4.1), (5.1), (5.4), а также (5.8) является оптимальным в смысле быстрейшего достижения отклонения φ' .

Допустим, что параметры системы и начальное состояние $\varphi(0), K(0)$ таковы, что при управлении (4.1), (5.1), (5.4) или (5.8) в некоторый момент времени τ имеем $\varphi(\tau) = \pi, K(\tau) > 0$, т.е. качели "перелетают" через верхнее положение равновесия. Тогда соответствующее управление максимизирует момент количества движения $K(\tau)$ в момент времени τ , когда $\varphi(\tau) = \pi$. Тем самым, найденное управление, если картину его синтеза построить на фазовом цилиндре $-\pi \leq \varphi < \pi$, решает задачу не только оптимального раскачивания, но и оптимальной в определенном смысле "раскрутки" качелей. Видно, что если $\chi \neq 0$, то при достаточно больших значениях K оптимальным для раскрутки является управление $u = 1$. Если $\chi = 0$, то, например, в случае 1 линиями переключения для управления раскруткой являются прямые (5.3). В полосе фазового цилиндра, лежащей между этими прямыми, $u = U$, а вне полосы — $u = 1$.

6. Торможение качелей. При учете всех сил, описанных в системе (1.3), структура оптимального управления торможением качелей, как и раскачиванием, зависит от момента инерции j . Анализ функции (3.2) и ее производной по u показывает, что при построении этого управления возникают следующие три случая:

$$1) j \leq 3, \quad 2) 3 < j < U(U+2), \quad 3) U(U+2) \leq j$$

т.е. диапазоны изменения величины j , в которых сохраняется структура оптимального управления торможением качелей, отличаются от диапазонов, в которых сохраняется структура оптимального управления раскачиванием.

В случае 1 функция (3.1) достигает минимума, если

$$u = \begin{cases} 1, & \delta + \chi K + \eta(1) \sin \varphi \leq 0 \\ u_2(\varphi, K), & -\eta(1) \sin \varphi \leq \delta + \chi K \leq -\eta(U) \sin \varphi \\ U, & \delta + \chi K + \eta(U) \sin \varphi \geq 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

$$u_2(\varphi, K) = \frac{1}{3}(-A + \sqrt{A^2 - 3j})$$

Величина $u_2(\varphi, K)$ — больший из двух корней квадратного уравнения (3.3).

Управление (6.1) — непрерывная функция своих аргументов. На каждой траектории после "схода" управления с упора $u = 1$ его увеличение до значения U происходит строго монотонно.

Неравенства, определяющие области, где управление не равно своим граничным значениям, в формулах (5.8) и (6.1), противоположны.

В случае 2 минимум функции (3.1) достигается, если

$$u = \begin{cases} 1, & \delta + \chi K + \lambda(1) \sin \varphi \leq 0 \\ u_2(\varphi, K), & -\lambda(1) \sin \varphi < \delta + \chi K \leq -\eta(U) \sin \varphi \\ U, & \delta + \chi K + \eta(U) \sin \varphi \geq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

Функция (6.2) на кривой переключения

$$\delta + \chi K + \lambda(1) \sin \varphi = 0 \quad (F(1, A, j) = F[u_2(\varphi, K), A, j])$$

терпит разрыв. Поэтому при оптимальном движении управление u меняется со

значения 1 на значение $u_2(\varphi, K)$ скачком. Затем оно строго монотонно и непрерывно возрастает до значения U .

В случае 3 минимум функции (3.1) достигается, если

$$u = \begin{cases} 1, & \delta + \chi K + \Lambda \sin \varphi \leq 0 \\ U, & \delta + \chi K + \Lambda \sin \varphi > 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

Линия переключения управления (6.3) описывается уравнением (5.2).

Структура релейного управления (6.3), тормозящего качели, "противоположна" структуре релейного управления (5.1), раскачивающего качели. Однако условие 1 разд. 5, при котором получено управление (5.1), несовместимо с условием 3 разд. 6, при котором получено управление (6.3). При условии 1 разд. 5 оптимальное управление, тормозящее качели, может иметь вид (6.1) либо (6.2). При условии 1 разд. 6 оптимальное управление торможением (6.1) является непрерывным, а оптимальное управление раскачиванием (5.1) – релейным. При условии 3 разд. 5 управление раскачиванием (5.8) является непрерывным, а управление торможением (6.3) – релейным.

Во всех законах управления торможением (6.1)–(6.3) центр тяжести системы опускается вниз не при прохождении качелями нижней точки, как в случае управления (4.2), а раньше.

Поставленные в разд. 2 задачи раскачивания и торможения качелей решаются также, если считать, что допустимы не все значения u из отрезка (1.4), а только крайние $u = 1$ и $u = U$. При этом оптимальное управление будет всегда релейным, а его переключение происходит на кривой (5.2). Если $\chi \neq 0$ и (или) $\delta \neq 0$, то это переключение происходит при $\varphi < 0$.

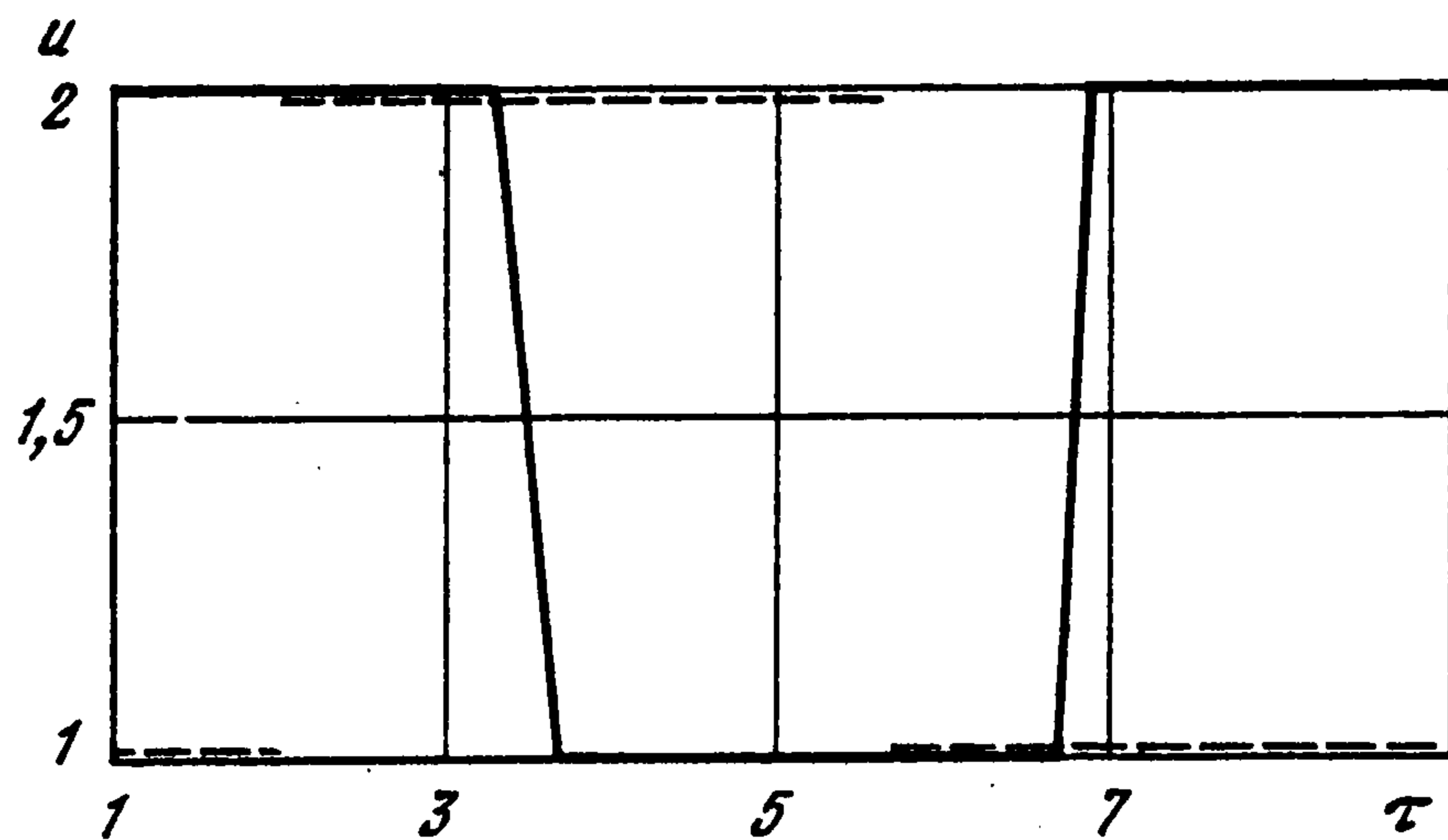
7. Раскачивание и торможение качелей за заданное время. Рассмотрим задачи (2.2) и (2.3), но при заданном наперед времени θ . Эти задачи уже не могут быть решены путем нахождения экстремума функции (3.1). Их решение строится с помощью принципа максимума Понтрягина [5]. При этом уравнения (1.3) надо дополнить следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \psi_2(u + \mu) \cos \varphi, & \dot{\psi}_2 &= [\psi_2(\chi u^2 + \chi_1) - \psi_1 \mp 1] / (j + u^2) \\ H(u) &= (\psi_1 \pm 1)K / (j + u^2) - \psi_2[(u + \mu) \sin \varphi + \delta + (\chi u^2 + \chi_1)K / (j + u^2)] \\ \max_{1 \leq u \leq U} H(u) &= C, & u &= \arg \left[\max_{1 \leq u \leq U} H(u) \right] \\ \psi_1(\theta) &= 0, & K(0) &= K(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

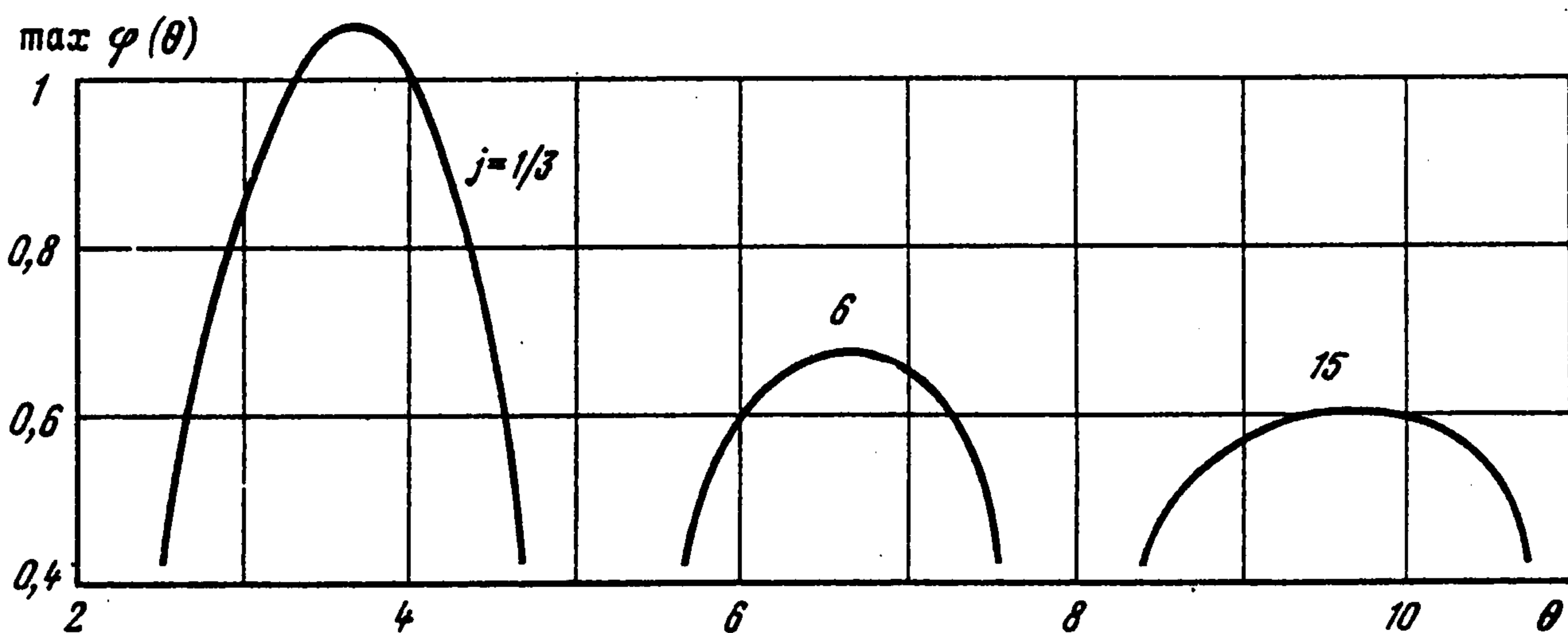
где $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$ – сопряженные переменные, C – неизвестная постоянная. Знак плюс в выражении $H(u)$ относится к задаче раскачивания, знак минус – к задаче торможения качелей. Поскольку движение рассматривается в полуплоскости $K > 0$, то полагаем, что $\operatorname{sgn} K = 1$.

Если время θ свободно, т.е. рассматривается задача, поставленная в разд. 2, то оптимальное решение описывается соотношениями (1.3), (7.1) при $C = 0$, откуда имеем $\psi_2(\theta) = 0$. Решение задачи в этом случае, однако, проще строить путем отыскания экстремума функции (3.1), как это делается выше.

Если время θ задано, то $C \neq 0$. Задавая значения угла $\varphi(\theta)$ и переменной $\psi_2(\theta)$ в конечный момент времени θ и интегрируя на ЭВМ соотношения (1.3), (7.1) справа налево, можно построить двухпараметрическое семейство экстремалей вариационной задачи. Для нахождения решения поставленной задачи оптимальности эти параметры



Фиг. 5



Фиг. 6

$\varphi(\epsilon)$ и $\psi_2(\theta)$ необходимо подобрать так, чтобы начальное значение угла φ равнялось заданному $\varphi(0)$, а время – заданному θ .

Из рассмотрения соотношений (7.1) вытекает, что оптимальные режимы управления могут содержать участки промежуточного управления. Участки же особого управления, где $\psi_1 \pm 1 \equiv 0$, $\psi_2 \equiv 0$, отсутствуют, так как в противном случае не выполняется краевое условие $\psi_1(\theta) = 0$.

На фиг. 5, 6 даны для примера некоторые результаты численного исследования задачи раскачивания качелей при $\delta = \chi = \chi_1 = 0$ (в отсутствие диссипации), $\mu = 0,5$, $U = 2$, $\varphi(0) = -0,4248$. Эти исследования показывают, что при отрицательных значениях $\psi_2(\theta)$ получаются решения с меньшим, чем при $\psi_2(\theta) = 0$, временем θ , а при положительных значениях $\psi_2(\theta)$ – с большим. Для $j = 15$ ($j > 3U^2$) оптимальное управление с меньшим временем $\theta = 8,58$, которое получается при $\psi_2(\theta) = -0,2$, показано на фиг. 5 сплошной линией, а с большим временем $\theta = 10,38$, полученным при $\psi_2(\theta) = 0,2$, – штрихами. Это управления с двумя переключениями – плавными (сплошная линия) и релейными (штрихи). Управление, изображенное штрихами, качественно подобно изображенному сплошной линией, с точностью до перемены местами участков с $u = 1$ и $u = U$.

Для той же задачи раскачивания качелей при наличии диссипации в случае 3 разд. 5 при свободном времени θ оптимальное управление (5.8) имеет одно плавное переключение. Если задано меньшее время θ и $\psi_2(\theta) \rightarrow -0$, то длительность последнего интервала времени, где $u > 1$ (сплошная линия), стремится к нулю, первый интервал, где $u = 1$,

увеличивается, и управление стремится к чисто релейному (4.1) со свободным временем θ , которое в указанном варианте оказывается равным 9,63. Если время θ больше и $\psi_2(\theta) \rightarrow +0$, то управление стремится к тому же релейному управлению (4.1), но при этом длительность первого интервала, где $u < U$ (штриховая линия), стремится к нулю, а длительность последнего интервала, где $u = 1$, увеличивается.

Численное и аналитическое исследование задачи раскачивания показывает, что здесь в отсутствие диссипации, так же как в разд. 5, при наличии ее, возникают случаи 1, 2 и 3, в которых оптимальное управление является при меньшем времени, как и в разд. 5, чисто релейным, релейно-непрерывным и непрерывным соответственно, а при большем времени, наоборот, непрерывным, релейно-непрерывным и чисто релейным. В отличие от разд. 5, все режимы управления здесь имеют два переключения.

На фиг. 6 для ряда значений j показана зависимость максимума амплитуды раскачивания $\varphi(\theta)$ от заданного времени θ . Как и следовало ожидать, максимальное значение $\varphi(\theta)$ получается при свободном времени θ , причем оно тем больше, чем меньше значение момента инерции j . Видно, что при заданном значении $\varphi(0)$ первый положительный момент θ , когда $K(\theta) = 0$, не может быть задан произвольно. Он лежит в некоторых пределах. Численные результаты, приведенные на фиг. 6, иллюстрируют это.

ЛИТЕРАТУРА

1. Магнус К. Колебания. М.: Мир, 1982. 303 с.
2. Чечурин С.Л. Параметрические колебания и устойчивость периодического движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 219 с.
3. Булгаков Б.В. Колебания. М: Гостехиздат, 1954. 892 с.
4. Александров В.В., Жермоленко В.Н. Об абсолютной устойчивости систем второго порядка // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика и механика. 1972. № 5. С. 102–109.
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.I.1992