

УДК 531.36:534.1 + 62-50

© 1993 г. Л.Д. Акуленко

## ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ И ВРАЩЕНИЯМИ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА (КАЧЕЛИ)

Рассматривается задача параметрического управления плоскими колебаниями и вращениями твердого тела – плоского физического маятника. Управление осуществляется посредством регулируемого по скорости прямолинейного перемещения точечной массы, связанной с твердым телом. Построена математическая модель и поставлены задачи управления и оптимизации. Предложен и применен приближенный асимптотический подход, основанный на сочетании метода усреднения и принципа максимума. Построены рациональные законы управления и проведен анализ эволюции системы. Изучены предельные случаи малых колебаний и быстрых вращений маятника.

**1. Построение математической модели и постановка задачи управления.** Рассмотрим плоские движения двухмассовой системы, состоящей из физического маятника  $M$  и связанной с ним материальной точки  $m$ , см. фиг. 1. Предположим, что масса  $m$  может заданным образом перемещаться относительно тела вдоль оси  $OM$ , соединяющей ось вращения  $O$  и центр масс  $M$ . Пусть  $\Phi$  – угловое отклонение маятника, а  $l$  – относительная координата точки на оси  $OM$ . Тогда для кинетической  $K$  и потенциальной  $\Pi$  энергий маятника и точки получим соответствующие выражения

$$K_M = \frac{1}{2} J_0 \dot{\Phi}^2, \quad K_m = \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\Phi}^2 + \dot{l}^2) \quad (1.1)$$

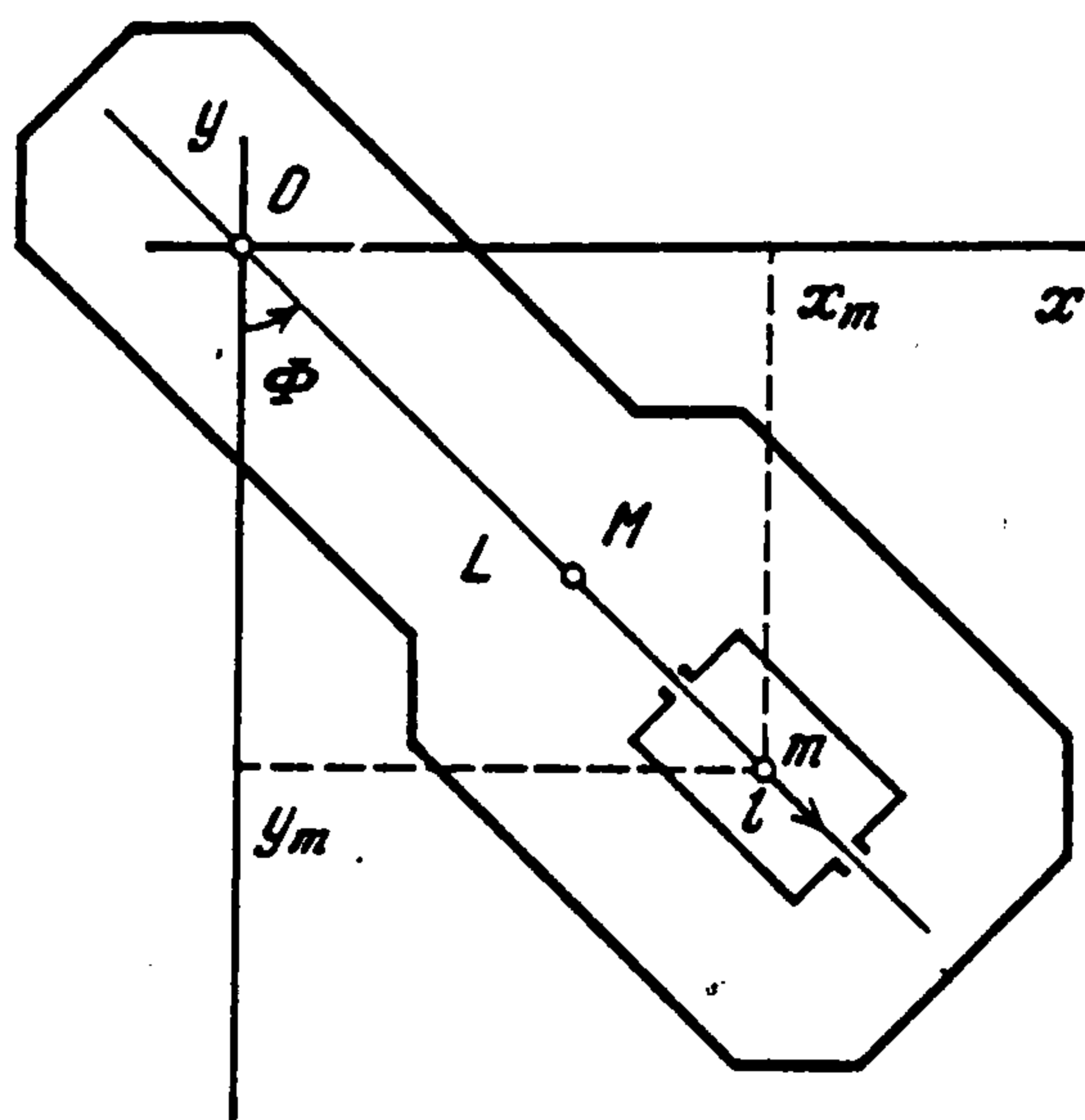
$$\Pi_M = Mgl(\Gamma - \cos \Phi), \quad \Pi_m = mgl(\gamma - \cos \Phi)$$

Здесь  $J_0 = J_M + ML^2$  – момент инерции маятника относительно оси  $O$ ,  $J_M$  – то же относительно центра масс  $M$ ,  $M$  – масса,  $L$  – плечо,  $g$  – ускорение сил тяготения. В (1.1) введены символы  $\Gamma, \gamma = 0, \pm 1$ ; обычно  $\Gamma = 1$ , т.е. при  $\Phi = 0$  потенциальная энергия  $\Pi_M = 0$ . Иногда полагают  $\Gamma = 0, -1$ , что также несущественно для вывода уравнений движения, а диктуется соображениями удобства. Следует положить символ  $\gamma = 0$ , если  $l$  – фазовая переменная; при заданной функции  $l(t)$  величина  $\gamma$ , как и  $\Gamma$ , может быть выбрана произвольной.

Будем считать, что  $\Phi$  – фазовая переменная,  $l$  – изменяющийся заданным образом параметр (см. ниже). В результате для  $\Phi$  получаем уравнение Лагранжа

$$(J_0 + ml^2)\ddot{\Phi} + (ML + ml)g\sin\Phi = -2ml\dot{l}\dot{\Phi} \quad (1.2)$$

При  $l = \text{const}$  ( $\dot{l} \equiv 0$ ) соотношение (1.2) обращается в уравнение движения плоского физического маятника, интегрируемое в эллиптических функциях Якоби. Для приложений представляет интерес случай  $l = l(\varepsilon t)$ , т.е.  $l$  – медленно изменяющийся параметр (со скоростью  $\dot{l} \sim \varepsilon$ , где  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр). За единицу времени обычно берется некоторая характерная величина, связанная с движением маятника, например период малых колебаний. Эволюция колебаний и вращений может быть эффективно исследована при помощи асимптотических методов нелинейной механики (метода усреднения [1, 2] и др.).



Фиг. 1

Значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах может представить рациональная постановка и решение задачи управления колебаниями и вращениями маятника посредством перемещения массы  $m$ , т.е. изменения параметра  $l$  системы (1.2). Частный случай параметрического управления для одномассовой системы ( $M = 0$ ): точка  $m$  регулируемым по скорости образом перемещается вдоль невесомого стержня (т.е. имеет место математический маятник изменяемой длины) рассмотрен автором [3]. Перейдем к постановке задачи управления движениями системы более общего вида (1.2).

Предположим, что скорость  $v$  изменения параметра  $l$  есть управляющее воздействие из определенного класса, а именно она может принимать любые значения в заданных пределах  $v_{1,2}$ :

$$l' = v, \quad v = v(t), \quad v_1 \leq v(t) \leq v_2 \quad (1.3)$$

Здесь  $v(t)$  – интегрируемая функция, постоянные  $v_{1,2}$  удовлетворяют условиям  $v_1 < 0$ ,  $v_2 > 0$ , обычно и далее полагается  $-v_1 = v_2 = v_0$ . Проблема реализации такого кинематического управления движением массы  $m$  требует дополнительного обсуждения. Как показывает анализ [3], электромеханический привод должен иметь пренебрежимо малые постоянные времени по сравнению с характерным периодом колебаний или вращений маятника. Заметим также, что в реальных условиях пределы изменения  $l$  также ограничены:  $l_1 \leq l(t) \leq l_2$ , в частности,  $|l(t) - l^0| \leq \varepsilon l^0$ , т.е. постановка задачи управления должна содержать фазовые ограничения.

Отметим следующее основное свойство параметрически управляемой системы (1.2), (1.3). При  $\Phi'(t_0) = 0$ ,  $\Phi(t_0) = \pi n$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$  она неуправляема для всех  $t_0 \leq t < \infty$ . Это означает, что в нижнем или в верхнем положении равновесия маятник остается бесконечно долгое время при произвольном управлении  $v(t)$  и изменении  $l(t)$ . Линии  $(\pi n, 0, l)$  в трехмерном фазовом пространстве  $(\Phi, \Phi', l)$  являются инвариантными. Однако выбором  $v(t)$  можно добиться, чтобы эти состояния стали неустойчивыми по Ляпунову. Тогда внешние возмущения, действующие на систему в реальных условиях, выведут ее из положения равновесия в достаточной мере и начнется эффективный процесс управления ("раскачка"). Если положение равновесия устойчиво, а смещения малы, то процесс раскачки потребует значительного (асимптотически большого) времени и расхода ресурсов управления (см. далее). Поэтому в таких ситуациях предпочтительны ортогональные оси  $OM$  перемещения точки  $m$ , что часто применяется на практике.

Итак, ставится задача о приведении маятника (1.2) в требуемое состояние колебаний или вращений посредством управляемого согласно (1.3) изменения параметра  $l$

за конечное время. Финальное значение  $l$  может быть также фиксированным. При этом на управление в виде программы  $v(t)$  или синтеза  $v(t, \Phi, \Phi', l)$  могут налагаться дополнительные условия оптимальности по некоторому критерию (быстродействию, минимуму "работы" и др.). Построение управления и анализ движения в общем случае весьма затруднены и могут быть проведены численно, что потребует весьма трудоемких расчетов соответствующей краевой задачи принципа максимума [4]. Этот подход не представляется конструктивным.

Предлагается использовать эффективный подход [3], основанный на сочетании математического аппарата принципа максимума [4] и метода усреднения [1, 2]. Для этого предположим, что управляющее воздействие  $v$  является малым в некотором смысле, а процесс управления осуществляется на асимптотически большом интервале времени. При таком управлении происходит много (практически несколько) колебаний или вращений маятника и существенное изменение медленно изменяющихся характеристик движения [3]. Формализуем предположения асимптотического подхода введением малого числового параметра  $\varepsilon$  и безразмерных переменных и параметров системы:

$$\theta = vt, \quad v^2 = \frac{ML + ml_0}{J_0 + ml_0^2} g \equiv \frac{ML}{J_0} \frac{1 + \chi}{1 + \mu} g > 0 \quad (1.4)$$

$$\sigma = \omega_0^{-1}, \quad l_0 > 0; \quad \varepsilon = v_0 (vl_0)^{-1}, \quad \varepsilon u \equiv v(vl_0)^{-1}$$

Здесь  $\theta$  – безразмерное время,  $v$  – частота малых колебаний при  $l = l_0$ ,  $l_0$  – характерная величина отклонения массы  $m$  от оси  $O$  ( $|l_0| > 0$ );  $\mu, \chi$  – инерционно-геометрические безразмерные параметры ( $\mu > 0$ ; предполагается для определенности, что  $1 + \chi\sigma > 0$ ). Малый параметр  $\varepsilon$  в (1.4) связан с отношением продольной и поперечной скоростей точки  $m$ . Представляются возможными другие способы безразмеривания. В результате система (1.2), (1.3) может быть представлена в виде

$$\frac{1 + \mu\sigma^2}{1 + \mu} \Phi'' + \frac{1 + \chi\sigma}{1 + \chi} \sin \Phi = -2\varepsilon \frac{\mu\sigma}{1 + \mu} u\Phi' \quad (1.5)$$

$$\sigma' = \varepsilon u, \quad |u| \leq 1; \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_*, \quad \theta_* = \Theta\varepsilon^{-1}, \quad \Theta \sim 1$$

Здесь принято для упрощения выкладок условие симметричности ограничений (1.3) на  $v$  ( $-v_1 = v_2 = v_0$ ). Заметим, что безразмерные уравнения для математического маятника переменной длины [3] получаются из (1.5) предельным переходом  $\mu, \chi \rightarrow \infty$  ( $J_0, M \rightarrow 0$ ).

**2. Приведение к стандартному виду слабоуправляемых систем с вращающейся фазой.** При  $\varepsilon = 0$  согласно (1.5) параметр  $\sigma = \text{const}$  (точка заморожена), а физический маятник с закрепленной точкой  $m$  совершает колебания или вращения с постоянной "энергией"  $E$ , определяемой значениями  $\Phi, \Phi', \sigma$  в некоторый момент времени  $\theta$

$$E = D\Phi'^2 + B(1 - \cos \Phi) = \text{const}, \quad \sigma = \text{const} \quad (2.1)$$

$$D = \frac{1}{2}(1 + \mu\sigma^2)(1 + \mu)^{-1} > 0, \quad B = (1 + \chi\sigma)(1 + \chi)^{-1} > 0$$

Здесь  $E$  – безразмерная, отнесенная к величине  $(J_0 + ml_0^2)v^2 = (ML + ml_0)g$  "энергия" колебаний или вращений; в соответствии с разд. 1, см. (1.1), символы  $\Gamma, \gamma = 1$ , что приводит к  $E = 0$  при  $\Phi = \Phi' = 0$ . Фазовый интеграл задает связь между  $\Phi, E$  и  $\theta$  при помощи эллиптических функций Якоби. Он не выписывается, поскольку его явное выражение не потребуется для дальнейших построений.

Согласно [1–3] продифференцируем по  $\theta$  интегралы (2.1) в силу возмущенной системы (1.5). Для медленных переменных  $E, \sigma$  получим уравнения

$$E' = \varepsilon u[-d\Phi'^2 + b(1 - \cos \Phi)] \equiv \varepsilon uG(\Phi, E, \sigma) \quad (2.2)$$

$$\sigma' = \varepsilon u, \quad |u| \leq 1 \quad (d = \mu\sigma(1 + \mu)^{-1}, \quad b = \chi(1 + \chi)^{-1})$$

Выражение для функции  $G$  получается после подстановки  $\Phi^2 = D^{-1}[E - B(1 - \cos \Phi)]$  согласно (2.1). Чтобы замкнуть систему (2.2), нужно выписать уравнение возмущенной фазы и указанный выше фазовый интеграл. Однако для приближенного решения задачи управления медленными переменными  $E, \sigma$  можно воспользоваться процедурой усреднения по фазовым траекториям невозмущенной системы без использования явной зависимости от фазы [2, 3].

Ставится задача существенного изменения переменных  $E, \sigma$  на асимптотически большом интервале времени  $\theta \in [\theta_0, \theta_*]$ :

$$E(\theta_{0,*}) = E^{0,*}, \quad \sigma(\theta_{0,*}) = \sigma^{0,*}, \quad I[u] \rightarrow \min \quad (2.3)$$

Момент  $\theta_*$  окончания процесса может быть фиксированным или определяться в результате решения задачи управления. Критерий оптимальности  $I[u]$  (2.3) может иметь смысл времени быстрогодействия ( $I[u] = \theta_*$ ) или интегрального квадратического функционала, характеризующего расход "энергии" на управление; при фиксированном  $\theta_*$  можно положить  $I[u] = \pm E^*$  и т.п. Заметим, что значения  $\sigma(\theta_*)$  (а также  $\sigma(\theta)$ ,  $\theta \in [\theta_0, \theta_*]$ ) могут быть существенными (как в случае  $J_0, M = 0$  [3]) или не быть таковыми в некоторых других случаях (см. далее).

Обсудим теперь уравнения управляемого движения в случае малой амплитуды колебаний [3], которая может иметь различные порядки малости по отношению к  $\varepsilon$ . Так, полагая в (1.5)  $\Phi = \sqrt{\varepsilon} \varphi$ ,  $\varphi \sim 1$ , получим для  $\varphi$ :

$$2D\varphi'' + B\varphi = \frac{\varepsilon}{6} B\varphi^3 - 2\varepsilon \frac{\mu\sigma}{1+\mu} u\varphi' + O(\varepsilon^2) \quad (2.4)$$

Если  $\Phi = \varepsilon^\lambda \varphi$ , где  $\lambda \geq 1$ , то в уравнении (2.4) остаются линейные по  $\varphi$  члены, поскольку нелинейные имеют порядок  $\varepsilon^2$  и выше. Для уравнения (2.4) совершается замена к переменным "амплитуда–фаза" по формулам

$$\varphi = A \sin \Psi, \quad \varphi' = A\Omega \cos \Psi, \quad \Omega^2 = \frac{1}{2} BD^{-1} = \Omega^2(\sigma) > 0 \quad (2.5)$$

В результате получаем для  $A, \Psi, \sigma$  явные уравнения первого приближения по  $\varepsilon$

$$A' = -\varepsilon u f(\sigma) A \cos^2 \Psi + \frac{\varepsilon}{6} \frac{A^3}{\Omega} \sin^3 \Psi \cos \Psi, \quad A(\theta_0) = A^0 > 0$$

$$\Psi' = \Omega + \varepsilon u f(\sigma) \cos \Psi \sin \Psi - \frac{\varepsilon}{6} \frac{A^2}{\Omega} \sin^4 \Psi, \quad \Psi(\theta_0) = \Psi^0 \quad (2.6)$$

$$\sigma' = \varepsilon u, \quad \sigma(\theta_0) = \sigma^0, \quad |u| \leq 1, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_* = \Theta \varepsilon^{-1}$$

$$\Omega = \Omega(\sigma), \quad f(\sigma) = \mu\sigma(1 + \mu\sigma^2)^{-1} + \frac{1}{2}\chi(1 + \chi\sigma)^{-1}$$

Зависимость  $f$  от  $\mu, \chi$  для сокращения записи не указывается; заметим, что  $f \rightarrow 3(2\sigma)^{-1}$  при  $\mu, \chi \rightarrow \infty$  [3]. Система (2.6) относится к существенно нелинейным, поскольку частота  $\Omega$  зависит от неизвестной медленной переменной [2, 3]. Из (2.6)

следует, что  $A(\theta) \equiv 0$ , если  $A^0 = 0$ , и, кроме того, можно добиться неограниченного возрастания или убывания амплитуды при  $A^0 > 0$ ,  $\theta \rightarrow \infty$ . Заметим, что кубическая добавка в уравнении для  $A$  (2.6) не оказывает влияния на амплитуду в первом приближении по  $\varepsilon$ , поскольку среднее от нее по  $\Psi$  равно нулю. Важно также отметить, что в случае малых колебаний их амплитуда может быть изменена на величину того же порядка малости по  $\varepsilon$  для  $\theta_* = \Theta\varepsilon^{-1}$ , поскольку эффективность управления, вообще говоря, падает при  $A \rightarrow 0$ .

**3. Приближенное решение задач оптимального и квазиоптимального управления движениями маятника. 3.1. Управление малыми колебаниями.** Во избежание особенностей замены (2.5) предположим, что  $1 + \chi\sigma > 0$ ; случай малых частот  $\Omega$  и прохождение через нуль требуют отдельного рассмотрения [5, 6]. Рассмотрим сперва задачу с фиксированным достаточно большим моментом окончания процесса и интегральным квадратическим функционалом без ограничений на управление  $u$  [3]

$$A(\theta_*) = A^*, \quad \sigma(\theta_*) = \sigma^*, \quad I[u] = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_*} u^2 d\theta \quad (3.1)$$

При помощи подхода [3] получим усредненную краевую задачу принципа максимума для гамильтоновой системы второго порядка. С погрешностью  $O(\varepsilon)$  построим оптимальное управление  $u^*$  и искомые медленные переменные  $p, \sigma$  и сопряженные им  $p, q$ :

$$u^* = -pf \cos^2 \Psi + q, \quad p = \text{const}, \quad \tau = \varepsilon\theta \in [\tau_0, \Theta] \quad (3.2)$$

$$p - p^0 = \int_{\sigma^0}^{\sigma} F(p, h, f(\xi)) d\xi, \quad \tau - \tau_0 = \pm \int_{\sigma^0}^{\sigma} \frac{d\xi}{[2h + (\frac{1}{8})p^2 f^2(\xi)]^{1/2}}$$

$$q = \frac{1}{2} pf \pm [2h + (\frac{1}{8})p^2 f^2]^{1/2}, \quad F = (\partial h / \partial p)(\partial h / \partial q)^{-1}$$

$$h = \frac{1}{2}[(\frac{3}{8})p^2 f^2 - pfq + q^2] = \text{const}, \quad p \equiv \ln(A / A^*)$$

Здесь при заданных  $A^*$  ( $p^* = 0$ ),  $\sigma^*$ ,  $\Theta$  неизвестными являются параметры  $h$  – усредненный гамильтониан (в медленном времени  $\tau$ ) и  $p$  – сопряженная  $p$  переменная ( $p = \text{const}$ , поскольку  $p$  – циклическая). Они определяются из двух уравнений для  $p$  и  $\sigma$  при  $\tau = \Theta$ . В результате неявные соотношения (3.2) будут задавать управление  $u^*$  в форме "частичной" программы по медленным переменным (фаза  $\Psi$  должна измеряться) или синтеза, если удастся построить решение краевой задачи (3.2) для произвольных начальных условий  $p^0, \sigma^0$  [3]. Выражение для  $\cos\Psi$  в  $u^*$  (3.2) может быть заменено согласно (2.5):  $\cos\Psi = \varphi'(A\Omega)^{-1}$ , где  $A = [\varphi^2 + (\varphi'/\Omega)^2]^{1/2}$ .

Если величина  $\sigma(\theta_*) = \sigma^*$  не фиксирована в (3.1) и неизвестна, то  $q(\Theta) = 0$  и из выражения для  $h$  при  $\tau = \Theta$  получаем связь параметра  $h$  и других неизвестных  $p, \sigma^*$ :  $h = (\frac{3}{16})p^2 f^2(\sigma^*)$ . Подставляя  $h$  в указанные уравнения (3.2) для  $p$  и  $\sigma$  при  $\tau = \Theta$ , получаем два трансцендентных уравнения относительно неизвестных  $p, \sigma^*$ . Решение этих уравнений, как и в предыдущем случае, можно осуществить численно, поскольку эти выражения сводятся к ультраэллиптическим интегралам (под знаком интеграла в знаменателе стоит квадратный корень от полинома шестой степени по  $\sigma$ ) и более сложным функциям.

Рассмотрим теперь задачу оптимального быстрогодействия для системы (2.6). С помощью предложенного ранее подхода [3] получим выражения для приближенного

оптимального управления  $u^*$  и усредненного гамильтониана  $h$ :

$$u^* = \text{sign}(q - pf \cos^2 \Psi) \equiv \text{sign}(r - s \cos 2\Psi)$$

$$h = \begin{cases} |r|, & |k| > 1, \quad k = r/s \\ (2/\pi)|s|[(1-k^2)^{1/2} + k \arcsin k], & |k| \leq 1 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$h, p = \text{const}, \quad r = q - s, \quad s = \frac{1}{2} pf(\sigma)$$

Отметим, что  $k$  – медленно изменяющийся параметр. Краевая задача принципа максимума в медленном времени  $\tau$  получается на основе гамильтониана  $h = h(\sigma, p, q)$ , см. (3.3):

$$\rho' = \partial h / \partial p, \quad p = \text{const}, \quad \sigma' = \partial h / \partial q, \quad q' = -\partial h / \partial \sigma \quad (3.4)$$

$$\rho(\tau_0) = \rho^0, \quad \rho(\Theta) = 0, \quad \sigma(\tau_0) = \sigma^0 \quad (\sigma(\Theta) = \sigma^* \vee q(\Theta) = 0)$$

Интегрированию подлежат два последних уравнения (3.4) для  $\sigma, q$ , поскольку  $h$  не зависит от  $p$  и  $p = \text{const}$ . Таким образом, к ней могут быть применены методы фазовой плоскости; более того, автономная система для  $\sigma, q$  гамильтонова, т.е.  $h = \text{const}$ . Использование этого интеграла позволяет полностью проинтегрировать систему уравнений. Если переменная  $\sigma$  изменяется монотонно, то ее удобно взять в качестве аргумента и проинтегрировать уравнения для  $dq/d\sigma$  и  $dp/d\sigma$ . В режиме  $|k| > 1$  интегрирование элементарно и приводит к выражениям

$$\rho = \rho^0 - \frac{1}{2} \int_{\sigma^0}^{\sigma} f(\xi) d\xi, \quad q = \frac{1}{2} f(\sigma) + c, \quad c = q^* - \frac{1}{2} pf(\sigma^*) \quad (3.5)$$

$$u^* = u_{\sigma} = \text{sign } c, \quad \sigma' = \text{sign } c = \text{sign}(\sigma^* - \sigma^0), \quad c = \text{const}$$

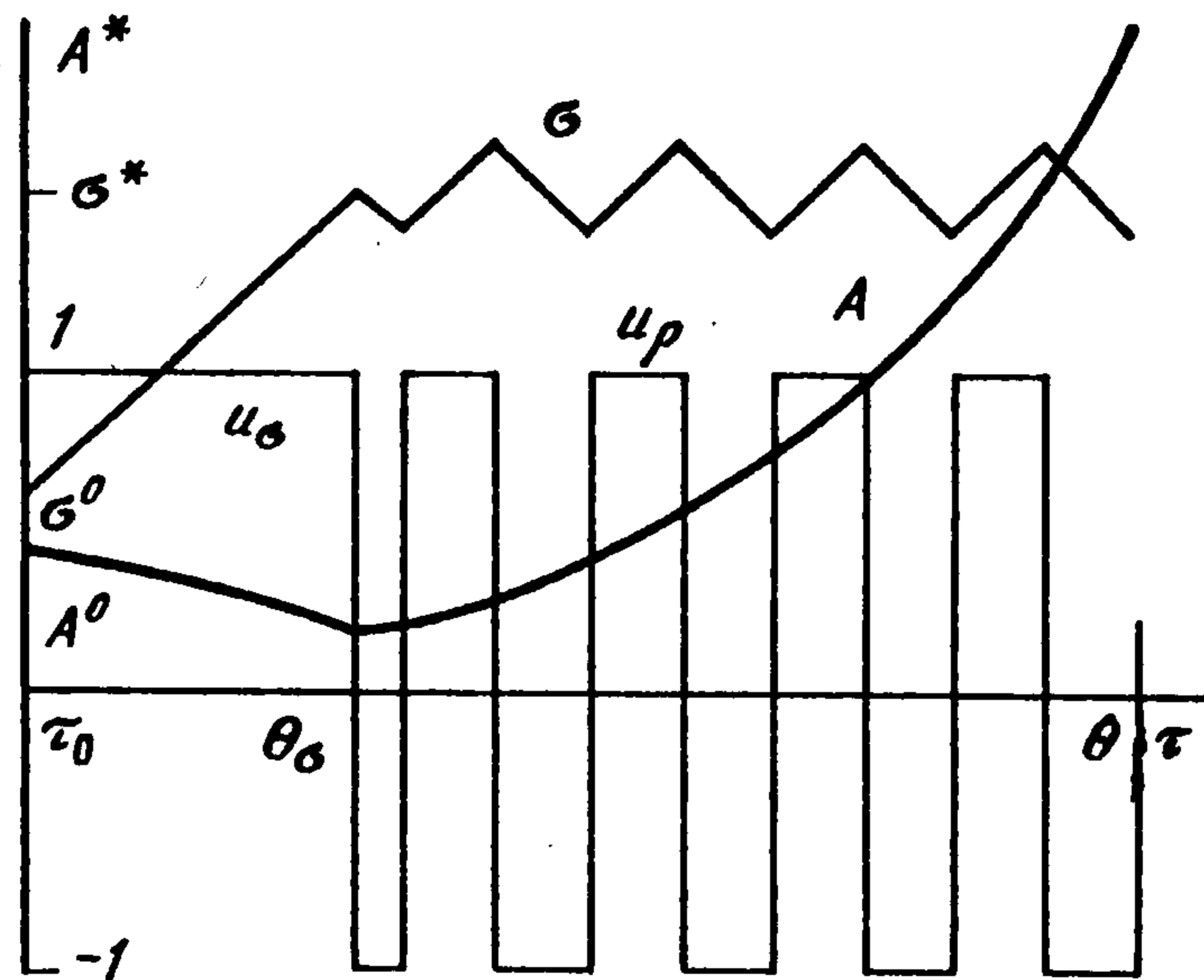
Этот случай отвечает перемещению массы  $m$  в заданное положение  $\sigma^*$  с максимальной скоростью  $u^* = \pm 1$ , причем  $\rho = 0$  при  $\sigma = \sigma^*$ , т.е.  $\tau = \Theta = \tau_0 + |\sigma^* - \sigma^0|$ , что соответствует специальному начальному условию  $\rho^0$ . Если же  $\sigma^*$  не фиксировано, то  $q^* = 0$  в (3.5) и знак  $p$  выбирается таковым, чтобы при некотором  $\sigma^*$  выполнялось условие  $\rho(\sigma^*) = 0$ . Этот режим управления направлен на изменение  $\sigma$ . В более общей ситуации  $|k| \leq 1$  управление имеет осциллирующий релейный характер

$$u^* = u_{\rho} = \text{sign}(pf) \text{sign}(k - \cos 2\Psi) \quad (3.6)$$

и приводит к целенаправленному совместному изменению амплитуды колебаний, т.е. переменных  $\rho$  и  $\sigma$ . Из (3.6) при  $|k| \ll 1$  следует, что дрейфа точки  $m$  практически не происходит:  $\sigma(\theta) \approx \sigma^0$ , а выбором знака  $p$  можно добиться требуемого изменения  $\rho$ :  $\rho' = -(1/\pi)|f(\sigma^0)| \text{sign } \rho^0$ . Управление движением в общей ситуации будет содержать участки обоих режимов:  $|k| > 1, |k| \leq 1$ . Построить исчерпывающий алгоритм управления крайне затруднительно. Однако проведенный анализ позволяет выяснить механизм управления колебаниями и перемещением и предложить следующий рациональный закон управления, состоящий из двух этапов. На первом этапе осуществляется режим  $|k| > 1$ , отвечающий наискорейшему перемещению точки  $m$ :

$$u^* = u_{\sigma} = \text{sign}(\sigma^* - \sigma^0), \quad \Theta_{\sigma} = \tau_0 + |\sigma^* - \sigma^0|, \quad \tau \in [\tau_0, \Theta_{\sigma}] \quad (3.7)$$

$$\sigma(\tau) = \sigma^0 + \frac{\sigma^* - \sigma^0}{\Theta_{\sigma} - \tau_0} (\tau - \tau_0), \quad \rho(\tau) = -\frac{u_{\sigma}}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} f(\sigma(\eta)) d\eta + \rho^0$$



Фиг. 2

С момента времени  $\tau = \Theta_\sigma$  применяется режим  $k = 0$ , согласно которому (см. (3.6))

$$u^* = u_p = -\text{sign}(p f \cos 2\Psi), \quad \text{sign } p = -\text{sign } p(\Theta_\sigma) \quad (3.8)$$

$$\rho(\tau) = \rho_\sigma - \frac{\rho_\sigma}{\Theta - \Theta_\sigma} (\tau - \Theta_\sigma), \quad \Theta = \Theta_\sigma + \frac{\pi |\rho(\Theta_\sigma)|}{|f(\sigma^*)|}, \quad \sigma(\tau) \approx \sigma^*$$

Величину  $\cos 2\Psi$  можно выразить через  $\Phi, \Phi', \Omega$ .

В результате суммарное время  $\Theta - \tau_0$ , требуемое для полного изменения медленных переменных  $\rho, \sigma$  с погрешностью  $O(\varepsilon)$ , будет равно

$$\Theta - \tau_0 = |\sigma^* - \sigma^0| + \pi |\rho(\Theta_\sigma)| |f(\sigma^*)|^{-1} \quad (3.9)$$

Если значение  $\sigma(\Theta)$  не задано, то величину  $\sigma^*$  можно выбрать в (3.7), (3.8) таким образом, чтобы суммарная величина  $\Theta$  (3.9) была минимальной. В случае, если на  $u$  наложено дополнительное требование  $\sigma(\tau) \equiv \sigma^0 \equiv \sigma^*$ , часто имеющее место на практике (качели), то оптимальным режимом управления будет (3.8), см. [3]. Таким образом, в случае малых колебаний при помощи управления  $u_p$  можно добиться экспоненциального во времени  $\tau$  изменения амплитуды:  $A = A^* \exp(\tau)$ ,  $\rho(\Theta) = 0$ , где  $\rho(\tau)$  согласно (3.8) есть линейная функция  $\tau = \varepsilon\theta$ , меньшая нуля для задачи увеличения амплитуды колебаний ( $A < A^*$ ) и большая нуля при их гашении ( $A > A^*$ ). Как следует из выражения  $u_p$ , управление четырежды изменяет знак для значений  $\Psi_i = (2i + 1)(\pi/4)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  в моменты, отвечающие серединам фаз между нулевым и максимальным отклонениями. В эти моменты времени смещения массы  $m$  экстремальны; между соседними точками происходит ее равномерное перемещение, см. фиг. 2.

**3.2. Управление большими колебаниями.** Используем изложенный выше подход последовательного управления медленными переменными  $E, \sigma$ , описываемыми соотношениями (2.2), (2.3). На начальном этапе  $\tau \in [\tau_0, \Theta_\sigma]$  имеем для  $\sigma$  по аналогии с (3.7):  $\sigma = \sigma(\tau)$ ,  $u^* = u_\sigma$ ,  $\Theta_\sigma = \tau_0 + |\sigma^* - \sigma^0|$ . При этом энергия  $E$  изменяется согласно усредненному уравнению (2.2)

$$E' = u_\sigma G_0(E, \sigma(\tau)) \equiv u_\sigma G_0^*(E, \tau), \quad E(\tau_0) = E^0 \quad (3.10)$$

$$G_0 \equiv \langle G \rangle = b - bD^{-1}(E - B) - (b + dD^{-1}B)\Lambda$$

$$\Lambda \equiv \langle \cos \Phi \rangle = \frac{4}{T_0} \left( \frac{D}{B} \right)^{1/2} \int_0^{\Phi^*} \frac{\cos \Phi d\Phi}{(\cos \Phi - \cos \Phi^*)^{1/2}}$$

$$T_0 = T_0(E, \sigma) = 4 \left( \frac{D}{B} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\Phi^*} \frac{d\Phi}{(\cos \Phi - \cos \Phi^*)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Phi^* = \Phi^*(E, \sigma) = \arccos(1 - EB^{-1}), \quad \sigma = \sigma(\tau)$$

Здесь  $\Phi^*$  – максимальный размах колебаний,  $T_0$  – период;  $T_0$  и  $\Lambda$  выражаются через полные эллиптические интегралы. Коэффициенты  $D, B$  и  $d, b$  введены в (2.1) и (2.2) соответственно; они зависят от  $\sigma$  и других параметров. Задача Коши для (3.10) интегрируется для  $\tau \in [\tau_0, \Theta_\sigma]$ :  $E = E(\tau)$ ,  $E_\sigma = E(\Theta_\sigma)$ .

На заключительном этапе  $\tau \in (\Theta_\sigma, \Theta]$  управляющую функцию  $u^* = u_E$  выбираем аналогично  $u^* = u_p$  (3.8) таким образом, чтобы дрейф точки  $m$  не происходил, т.е.  $\sigma' \approx \langle u_E \rangle \equiv 0$ , но осуществлялось требуемое изменение энергии колебаний ( $0 < E < 2B$ ). Для этого представим функцию  $G$  (2.2) в виде

$$G(\Phi, E, \sigma) = \Delta(\Phi, E, \sigma) + G_*(E, \sigma), \quad \Delta \equiv G - G_* \quad (3.11)$$

Функция  $\Delta$  имеет вид  $\Delta = a - b \cos \Phi$ , где  $a, b$  – функции  $E, \sigma$ , причем  $a$ , т.е.  $G_*$ , выбрана таковой, что временные интервалы положительных и отрицательных значений  $\Delta$  равны  $T_0/2$  на периоде  $T_0$ . Используя свойства периодичности и симметрии функции  $G$  по  $\Phi$ , функцию  $G_*$  определим в виде

$$G_*(E, \sigma) = G(\Phi_*, E, \sigma), \quad \Phi_* = \Phi_*(E, \sigma) < \Phi^*(E, \sigma) \quad (3.12)$$

$$\int_0^{\Phi_*} \frac{d\Phi}{(\cos \Phi - \cos \Phi^*)^{\frac{1}{2}}} = \frac{T_0}{8} \left( \frac{B}{D} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \cos \Phi^*(E, \sigma) = 1 - \frac{E}{B}$$

Корень  $\Phi_*$  уравнения (3.12) обеспечивает равенство указанных выше временных интервалов для  $\Delta$ . Положим теперь управление  $u^* = u_E$ :

$$u^* = u_E = \text{sign}(E^* - E_\sigma) \text{sign} \Delta(\Phi, E, \sigma^*) \quad (3.13)$$

Получим в первом приближении по  $\epsilon$  решение задачи для  $E$ :

$$\tau - \Theta_\sigma = \text{sign}(E^* - E_\sigma) \int_{E_\sigma}^E \frac{d\xi}{\Delta_0(\xi, \sigma^*)}, \quad \Theta = \tau \Big|_{E=E^*}$$

$$\Delta_0(E, \sigma) = \langle |\Delta(\Phi, E, \sigma)| \rangle \quad (3.14)$$

где усреднение по  $\theta$  заменяется усреднением по  $\Phi$  аналогично (3.10). Суммарное время  $\Theta$  в (3.14) может быть минимизировано по  $\sigma^*$ , если  $\sigma(\Theta)$  не задано. Режим управления (3.13), (3.14) будет квазиоптимальным, если потребовать дополнительно, чтобы  $\sigma(\tau) \approx \sigma^0 \approx \sigma^*$ . Режимы управления (3.10), (3.13), (3.14) неявно содержат допущение, что маятник совершает только колебательные движения для  $\tau \in [\tau_0, \Theta]$ , т.е.  $E < 2B$ . Требуется их дополнить анализом вращательных движений.

**3.3. Управление вращениями маятника.** При  $E > 2B$  (см. (2.1)) маятник будет совершать безостановочные вращательные движения, поскольку  $\Phi' \neq 0$ . Априори не следует, что на первом этапе управления большими колебаниями согласно (3.10) величина  $E < 2B$  для всех  $\tau$ ,  $\tau \in [\tau_0, \Theta_\sigma]$ , т.е. маятник совершает только колебания. Возможен выход в область вращений, в которой угловая переменная  $\Phi$  получает приращения  $\pm 2\pi$  за период  $T_0$ :

$$T_0(E, \sigma) = \left( \frac{D}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} [1 - \beta(1 - \cos \Phi)]^{-\frac{1}{2}} d\Phi = 2\pi (D/B)^{\frac{1}{2}} \beta^{\frac{1}{2}} [1 + \gamma_1 \beta + \gamma_2 \beta^2 + \dots] \quad (3.15)$$

$$\beta = B/E < \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = 9/16, \dots$$

В случае "быстрых вращений"  $T_0 \approx 2\pi(D/E)^{1/2} \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow 0$ . Приближенное решение невозмущенного уравнения (1.5) по степеням  $\beta < 1/2$  строится согласно [7]. Квазиоптимальное управление вращениями маятника можно осуществить по аналогии с разд. 3.1, 3.2. На начальном этапе  $\tau \in [\tau_0, \Theta_\sigma]$  для точки  $m$  имеем  $u^* = u_\sigma$ ,  $\sigma = \sigma(\tau)$  (3.7). Энергия вращений  $E$  изменяется согласно (3.10), где

$$\Lambda \equiv \langle \cos \Phi \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \Phi d\Phi}{\Phi'(\Phi, E, \sigma)} \quad (3.16)$$

Скорость  $\Phi'$  определяется из (2.1); переменная  $E = E(\tau)$  считается далее известной как решение задачи Коши (3.10) для  $\tau \in [\tau_0, \Theta_\sigma]$ . На заключительном этапе  $\tau \in (\Theta_\sigma, \Theta]$  используем режим  $u^* = u_E$  (3.13), в котором функция  $G_* = G(\Phi_*, E, \sigma)$ , где  $\Phi_* = \Phi_*(E, \sigma)$  – корень уравнения

$$\frac{T_0}{4} \left( \frac{E}{D} \right)^{1/2} = \int_0^{\Phi_*} [1 - \beta(1 - \cos \Phi)]^{-1/2} d\Phi \quad (3.17)$$

В случае быстрых вращений имеем асимптотику  $\Phi_* = \pi/2 + \beta/2 + O(\beta^3)$ ; рассмотрим их. Уравнение движения (2.2) имеет вид:

$$E' = \epsilon u \left[ b - \frac{d}{D}(E - B) - \left( b + \frac{d}{D}B \right) \cos \Phi(\psi, \beta) \right]$$

$$\Phi = \Phi(\psi, \beta) = \psi + \delta \sin \psi + \frac{1}{8} \delta^2 \sin 2\psi + O(\delta^3)$$

$$\delta = \delta(\beta) = \frac{1}{2} \beta (1 + \gamma_1 \beta + \gamma_2 \beta^2 + O(\beta^3))^2$$

$$\Phi_* = \Phi(\pi/2, \beta) = \pi/2 + \delta(\beta) + O(\delta^3)$$

где  $\psi$  – фаза вращательного движения. На первом этапе  $u^* = u_\sigma$ ,  $\tau \in [\tau_0, \Theta_\sigma]$  с погрешностью  $O(\epsilon + \beta^2)$  переменная  $E$  описывается укороченным усредненным уравнением

$$E' = u_\sigma \left[ b - \frac{d}{D}(E - B) + \frac{\beta}{4} \left( b + \frac{d}{D}B \right) \right], \quad E(\tau_0) = E^0 \quad (3.18)$$

которое может быть проинтегрировано методами возмущений с погрешностью  $O(\beta^2)$ :  $E = E(\tau)$ . С момента  $\tau = \Theta_\sigma$  проводится завершающий этап управления энергией из состояния  $E_\sigma = E(\Theta_\sigma)$  до  $E^* = E(\Theta)$  без дрейфа точки  $m$ . Имеем следующие выражения ( $\sigma \approx \sigma^*$ ):

$$u^* = u_E = -\text{sign}(E^* - E_\sigma) \text{sign}(b + dD^{-1}B) \times \text{sign}[\cos \Phi(\psi, \beta) - \cos \Phi(\pi/2, \beta)]$$

$$\cos \Phi(\psi, \beta) - \cos \Phi(\pi/2, \beta) = \cos \psi - \frac{1}{2} \beta \cos^2 \psi + O(\beta^2) \quad (3.19)$$

$$E(\tau) = E_\sigma + \frac{E^* - E_\sigma}{\Theta - \Theta_\sigma} (\tau - \Theta_\sigma), \quad \Theta = \Theta_\sigma + \frac{\pi |E^* - E_\sigma|}{2 |b + dD^{-1}B|}$$

Из (3.19) следует, что в случае быстрых вращений можно добиться лишь степенного по  $\tau$  (в частности, линейного) изменения энергии и угловой скорости маятника [3].

В общем случае предложенный рациональный подход к управлению движениями маятника может включать колебания и вращения на обоих этапах. Это потребует

применения режимов, описанных выше в разд. 3.1.–3.3. Как установлено, эффективность параметрического управления весьма низка при малых отклонениях от положения равновесия – это известно из практики. Представляется интересным изучить механизмы и построить рациональные режимы управления колебаниями и вращениями маятника при более широких возможностях управления перемещениями точки  $m$  относительно маятника. Например, можно рассмотреть плоские движения (продольные и поперечные) в некоторой области, колебательные и вращательные (двойной маятник), относительные вращения ротора и др., в том числе с учетом динамики приводов, перемещающих внутренние массы. Заметим, что полученные результаты переносятся на случай, когда внутренняя масса  $m$  обладает также значительными геометрическими размерами, т.е. ее центральный момент инерции  $J_m$  сравним с  $J_0$ . Если относительные вращения отсутствуют, а центр масс может перемещаться только вдоль прямой  $OM$ , см. фиг. 1, то учет величины  $J_m$  сводится к добавке  $\frac{1}{2}J_m\Phi^2$  в выражении для  $K_m$  (1.1), а величина  $J_0$  всюду далее равна  $J_0^* = J_M + ML^2 + J_m$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
2. Волосов В.М., Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 508 с.
3. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
5. Нейштадт А.И. Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно изменяющимся параметром // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 4. С. 621–632.
6. Акуленко Л.Д. Усреднение в квазилинейной системе с сильно изменяющейся частотой // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 244–252.
7. Акуленко Л.Д. Построение вращательных решений для невозмущенных консервативных систем с одной степенью свободы по обратным степеням энергии // Вестн. МГУ. Сер. физика, астрономия. 1967. № 3. С. 103–106.

Москва

Поступила в редакцию  
17.XII.1991