УДК 531.36

© 1993 г. А.А. Буров, А.В. Карапетян

О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В ПОТОКЕ ЧАСТИЦ

Рассматривается задача о движении твердого тела в потоке частиц вокруг неподвижной точки. Хорошо известно, что эта задача носит существенно неконсервативный характер. Тем не менее, как оказалось, динамика тела в данной задаче при определенных предположениях может быть описана системой уравнений Гамильтона. Условия, при которых имеет место этот, достаточно неожиданный, факт, изучаются в данной работе.

Наличие гамильтоновой структуры существенно увеличивает интерес к вопросу о существовании дополнительных первых интегралов уравнений движения. Указываются некоторые случаи, когда такие интегралы существуют. Среди них – случай, когда уравнения движения допускают интеграл, аналогичный интегралу Гесса в задаче о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Также определяются стационарные движения рассматриваемой системы, исследуется их устойчивость.

Изучение сил и моментов сил взаимодействия твердого тела и среды восходит к Ньютону [1]. Его исследования были продолжены многочисленными авторами (см., например [2]). Современное состояние изучения взаимодействия тела и среды, а также исследование различных динамических эффектов, возникающих даже для простейших моделей взаимодействия, изложено в [3].

1. Рассмотрим задачу о движении твердого тела в потоке газа в следующей постановке. Пусть газ состоит из одинаковых, не взаимодействующих между собой частиц, летящих с постоянной скоростью в направлении, неизменном в неподвижном абсолютном пространстве. Пусть частицы взаимодействуют с телом абсолютно неупруго, т.е. после столкновения скорость частицы по отношению к телу равна нулю. Пусть поверхность тела выпукла. Тогда, если скорость набегающего потока существенно превосходит произведение характерного значения угловой скорости тела и характерного расстояния от тела до неподвижной точки, то уравнения движения тела можно представить в виде[1]

$$I\omega^{\cdot} = I\omega\times\omega + f\gamma\times c(\gamma)S(\gamma), \quad \gamma^{\cdot} = \gamma\times\omega \tag{1.1}$$

где $I = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции тела относительно неподвижной точки O, $Ox_1x_2x_3$ – система координат, оси которой направлены по главным осям инерции тензора инерции в точке O, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор, направленный вдоль набегающего потока, f – постоянная, величина которой пропорциональна плотности газа и квадрату скорости набегающего потока. Величина $S(\gamma)$ – это площадь тени $T(\gamma)$ тела на плоскости $\pi(\gamma)$, перпендикулярной набегающему потоку, т.е. проекции тела на плоскость π вдоль

[1] Ср. с результатом работы: *Сазонов В.В.* Об одном механизме потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника: Препринт № 107. М., Ин-т прикладной матем. АН СССР, 1988. 23 с.

направления γ, $c(\gamma) = (c_1(\gamma), c_2(\gamma), c_3(\gamma))$ – вектор, соединяющий неподвижную точку с любой точкой прямой $l(\gamma)$, параллельной γ и содержащей центроид тени – точку, совпадающую с центром масс однородной пластинки, занимающей область T.

Уравнения (1.1) обладают интегральным инвариантом плотности единица, а также первыми интегралами $J_1 = (I\omega, \gamma)$ и $J_2 = \gamma^2$. Уравнения (1.1) обратимы, т.е. выдерживают замену переменных и времени $(\omega, \gamma, t) \to (-\omega, \gamma, -t)$. Однако в общем случае эти уравнения не являются системой уравнений Гамильтона с какой-либо пуассоновой структурой. Справедливо

Утверждение 1. Если для любых $i, j, i \neq j$ выполнены соотношения

$$c_i \frac{\partial S}{\partial \gamma_j} + \frac{\partial c_i}{\partial \gamma_j} S(\gamma) = c_j \frac{\partial S}{\partial \gamma_i} + \frac{\partial c_j}{\partial \gamma_i} S(\gamma) \tag{1.2}$$

то уравнения движения гамильтоновы с пуассоновой структурой, определяемой алгеброй $E(3)$, и допускают дополнительный первый интеграл.

*Доказательство.*Пусть

$$c(\gamma)S(\gamma) = \partial U / \partial \gamma \tag{1.3}$$

для некоторой функции $U(\gamma)$. Тогда если функция U достаточно гладкая, то для выполнения соотношений (1.3) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (1.2). При этом уравнения движения могут быть представлены в виде

$$\begin{gathered} M^{\cdot} = \{M, H\}, \quad \gamma^{\cdot} = \{\gamma, H\} \\ \{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, \gamma_j\} = \varepsilon_{ijk}\gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0 \end{gathered} \tag{1.4}$$

где функция Гамильтона

$$H = \tfrac{1}{2}(I^{-1}M, M) + U(\gamma) \tag{1.5}$$

определяет $J_0 = H$ – дополнительный первый интеграл уравнений (1.1) – аналог интеграла энергии.

Укажем некоторые случаи, когда соотношения (1.2) выполнены и уравнения (1.1) обладают гамильтоновой структурой.

а) *Поверхность тела центрально-симметрична.* В этом случае вектор $c(\gamma) = c$ соединяет неподвижную точку и центр симметрии. Уравнения (1.2) при этом представимы в виде

$$c_i \partial S / \partial \gamma_j = c_j \partial S / \partial \gamma_i$$

и допускают общее решение

$$S = S((c, \gamma)) \tag{1.6}$$

Потенциал при этом может быть представлен в виде

$$U(\gamma) = f \int_0^{(c,\gamma)} S(u)\,du$$

Таким образом, если выражение для площади тени описывается соотношением типа (1.6), то уравнения движения тела оказываются гамильтоновыми.

Имеются случаи, когда соотношения (1.6) выполняются.

Поверхность тела – сфера. Тогда площадь тени постоянна и уравнения движения совпадают с уравнениями движения твердого тела в однородном силовом поле.

Поверхность тела, взаимодействующая с потоком частиц – центрально-симметричная пластинка. При этом $S = S_0 |c|^{-1}|(c, \gamma)|$, где S_0 – площадь пластинки, и потенциал взаимодействия имеет вид

$$U(\gamma) = \tfrac{1}{2} f S_0 \operatorname{sign}(c,\gamma)(c,\gamma)^2 |c|^{-1}$$

Однако соотношения (1 6) выполнены далеко не всегда. Если поверхность тела – эллипсоид, оси которого коллинеарны главным осям инерции тела, то

$$S = \pi b_1 b_2 b_3 (\gamma_1^2 / b_1^2 + \gamma_2^2 / b_2^2 + \gamma_3^2 / b_3^2)^{1/2}$$

где b_1, b_2, b_3 – полуоси эллипсоида. При этом соотношение (1.6) в общем случае не выполнено.

б) *Поверхность тела осесимметрична.* В этом случае прямая $l(\gamma)$ пересекает ось симметрии поверхности тела. Тогда если неподвижная точка находится на оси симметрии, то $c(\gamma) = \chi((\alpha, \gamma))(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $S = S((\alpha, \gamma))$ и потенциал U может быть представлен в виде

$$U(\gamma) = f \int_0^{(\alpha,\gamma)} S(u)\chi(u)du$$

Эллипсоид вращения. Пусть полуоси эллипсоида b_1 и b_2 равны b, $c = (0, 0, c_3)$. Тогда

$$S(\gamma) = \pi b^2 b_3 \left(\frac{1}{b^2} + \left(\frac{1}{b_3^2} - \frac{1}{b^2} \right) \gamma_3^2 \right)^{1/2}$$

и потенциал имеет вид

$$U(\gamma_3) = \pi b b_3 c_3 f \int_0^{\gamma_3} \left(1 + \frac{b^2 - b_3^2}{b_3^2} u^2 \right)^{1/2} du$$

2. Укажем некоторые случаи, когда уравнения движения обладают дополнительным интегралом.

Тривиальный случай. Пусть поверхность тела центрально-симметрична и центр симметрии совпадает с точкой подвеса. Тогда уравнения (1.1) допускают интеграл $J_3 = (I\omega)^2$. В этом случае задача вполне интегрируема и совпадает с задачей Эйлера–Пуансо.

Случай осевой симметрии. Пусть тело динамически симметрично, то есть выполнено, например, условие $I_1 = I_2$. Пусть также поверхность тела центрально-симметрична, центр симметрии лежит на оси Ox_3. Тогда уравнения движения допускают первый интеграл $J_3 = \omega_3$. Этот случай аналогичен случаю Лагранжа.

Аналоги случая Гесса. 1°. Пусть поверхность тела центрально-симметрична, центр симметрии и моменты инерции таковы, что

$$I_1 < I_2 < I_3, \ (I_1^{-1} - I_2^{-1})^{1/2} c_3 \mp (I_2^{-1} - I_3^{-1})^{1/2} c_1 = 0, \ c_2 = 0$$

Тогда уравнения движения допускают частный интеграл

$$F = (I_1^{-1} - I_2^{-1})^{1/2} I_1 \omega_1 \pm (I_2^{-1} - I_3^{-1})^{1/2} I_3 \omega_3 = 0$$

2°. Пусть поверхность тела осесимметрична, ось симметрии определяется вектором α и содержит точку подвеса. Тогда если выполнено соотношение, отличающееся от (2.1) заменой c_1, c_2, c_3 на $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, то уравнения движения допускают частный интеграл (2.1). Эти два случая аналогичны случаю Гесса.

3. Уравнения движения (1.1) допускают частные решения, при которых тело совершает вращение с постоянной угловой скоростью ω вокруг линии тока газа. При этом угловая скорость тела и компоненты вектора γ связаны соотношением

$$\omega^2 I\gamma \times \gamma + f\gamma \times c(\gamma)S(\gamma) = 0 \tag{3.1}$$

Множество осей вращения образует в пространстве $R^3(\gamma)$ коническую поверхность, состоящую из прямых, проходящих через начало координат и точки на сфере $\gamma^2 = 1$ такие, что

$$(I\gamma, \gamma \times c(\gamma)) = 0$$

Пусть $c(\gamma) = (0, 0, c_3(\gamma))$. Тогда уравнения (3.1) допускают решения $\gamma^{\pm} = (0, 0, \pm 1)$, $\omega = \Omega = \mathrm{const}$. Пусть $c(\gamma)$ и $S(\gamma)$ – достаточно гладкие функции. Тогда необходимые условия устойчивости этих решений имеют вид

$$I_1 I_2 \Omega^2 - I_1 c_3 fS\gamma_3 - I_2 c_3 fS\gamma_3 - (I_3 - I_2)(I_1 - I_3)\Omega^2 \geqslant$$
$$\geqslant 2(I_1 I_2((I_1 - I_3)(I_2 - I_3)\Omega^4 + (I_1 + I_2 - 2I_3)\Omega^2\gamma_3 c_3 fS + c_3^2 f^2 S^2))^{1/2} \tag{3.2}$$

$$(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)\Omega^4 + (I_1 + I_2 - 2I_3)\Omega^2\gamma_3 c_3 fS + c_3^2 f^2 S^2 \geqslant 0 \tag{3.3}$$

Если $I_1 = I_2$, то условие (3.3) выполнено всегда, а условие (3.2) можно представить в виде

$$I_3^2\omega^2 \geqslant 4I_1 fSc_3\gamma_3 \tag{3.4}$$

При этом условие (3.4) в случае строгого неравенства является не только необходимым, но и достаточным.

4. Пусть поверхность тела обладает плоскостью симметрии, совпадающей с одной из координатных плоскостей системы координат $Ox_1x_2x_3$, например с плоскостью Ox_1x_2. Тогда система уравнений (1.1) допускает частное решение, при котором

$$\gamma_3 \equiv 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0$$

В этом случае уравнения плоских колебаний могут быть представлены в виде гамильтоновой системы. Пусть φ – угол, такой, что $\gamma_1 = \cos\varphi$, $\gamma_2 = \sin\varphi$, $\omega_3 = \varphi^{\cdot}$. Тогда

$$I_3\varphi^{\cdot\cdot} = f(\cos\varphi c_2(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) - \sin\varphi c_1(\cos\varphi, \sin\varphi, 0))S(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad H = \tfrac{1}{2} I_3^{-1} p^2 + U(\varphi)$$

$$U(\varphi) = -\int_0^{\varphi} f(\cos\varphi c_2(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) - \sin\varphi c_1(\cos\varphi, \sin\varphi, 0))$$
$$S(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)d\varphi$$

причем функция Гамильтона H – их первый интеграл (ср. с. [4]).

Таким образом, даже в рассматриваемой простейшей механической модели удается обнаружить достаточно интересные динамические свойства. В то же время вопрос о влиянии отброшенных слагаемых в выражении для моментов заслуживает отдельного исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Newton Isaac*. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. De Motu Corporum. Liber Secundus. Londini: Typis Josephi Streater. P. 236–400. Математические начала натуральной философии. Кн. 2. О движении тел. Петроград: Тип. М.М. Стасюкевича, 1916.
2. *Белецкий В.В*. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
3. *Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А*. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1986. 86 с.
4. *Самсонов В.А., Шамолин М.В*. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. МГУ. Математика. Механика. 1989. No. 3. С. 51–54.

Москва

Поступила в редакцию
27.I.1992