УДК 531.36

 Л.Ю. Анапольский, С.В. Чайкин

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЙ УПРУГОГО СПУТНИКА

Рассматривается в ограниченной постановке [1] задача об устойчивости движения на круговой орбите в центральном ньютоновском поле сил упругого спутника, моделируемого твердым телом с присоединенным к нему произвольным изотропным упругим звеном. Предполагается, что вектор малой деформации спутника представим в виде бесконечного ряда по известным ортогональным собственным формам его свободных колебаний [2, 3]. На основании теоремы [4] об устойчивости по части переменных указываются достаточные условия устойчивости положений относительных равновесий спутника по скоростям и позиционным координатам, включающим произвольное, но конечное число обобщенных координат, определяющих деформированное состояние упругого спутника. Учитывается влияние отбрасываемых упругих координат (координат, определяющих упругую деформацию). Приводятся уравнения для нахождения деформаций спутника в положении относительного равновесия, всегда характеризуемого тем, что главные центральные оси, построенные для данного положения равновесия спутника, коллинеарны осям орбитальной системы координат. Указываются необходимые и достаточные условия недеформированности спутника в положении относительного равновесия.

1. Рассмотрим в ограниченной постановке [1] движение в центральном ньютоновском поле сил упругого спутника, моделируемого твердым телом с присоединенным к нему упругим звеном. Центр масс спутника движется по кеплеровой круговой орбите радиуса R_0 вокруг притягивающего центра с постоянной угловой скоростью.

Введем следующие правые прямоугольные декартовы системы координат: $Oy_1y_2y_3$ – орбитальная система координат (ОСК) с полюсом в центре масс спутника и ортами $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ осей Oy_2, Oy_3; ось Oy_3 направлена по радиус-вектору точки O относительно притягивающего центра; ось Oy_1 направлена по трансверсали к орбите в точке O в сторону движения спутника, $\boldsymbol{\omega} = |\omega|\,\boldsymbol{\beta}$ – угловая скорость орбитального движения, $\omega = \mathrm{const} > 0$; $O_1x_1x_2x_3$ – жестко связанная со спутником система координат (ССК) с ортами осей $\mathbf{i}^k$ ($k = 1, 2, 3$) соответственно, с полюсом в центре масс O_1 недеформированного спутника и осями, направленными по его главным центральным осям; $Ox_1x_2x_3$ – система координат с полюсом в центре масс спутника O и ортами осей $\mathbf{i}^k$ соответственно; $\boldsymbol{\Omega}$ – угловая скорость трехгранника $Ox_1x_2x_3$ относительно $Oy_1y_2y_3$.

Положения относительного равновесия упругого спутника – его состояния покоя относительно ОСК. Если в положении относительного равновесия упругое звено спутника находится в деформированном состоянии, то такое положение равновесия будем называть нетривиальным.

Пусть точки твердого тела спутника занимают ограниченную область υ_1, а точки его упругого звена в недеформированном состоянии – ограниченную область υ_2, Γ – общая граница областей υ_1, υ_2; $\upsilon \equiv \upsilon_1 + \upsilon_2$. Будем считать области заданными относительно ССК.

Радиус-вектор произвольной точки M спутника обозначим через $\mathbf{r}$ ($\mathbf{r} \in \upsilon$), при наличии деформации радиус-вектор M относительно точки O $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} + \mathbf{u}(t, r)$, где $t \in [0, \infty)$ – время, функция $\mathbf{u}$: $(t, \mathbf{r}) \to \mathbf{u}\,(t, \mathbf{r})$ обладает достаточной гладкостью по t и $\mathbf{r}$ и определяет перемещение точки M спутника в результате малой деформации его упругого звена.

Сформулируем используемые ниже предположения.

1°. Вектор перемещения $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ представляется в виде бесконечного ряда по собственным формам всего спутника:

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{r}) = \sum q_n(t)\Psi_n(\mathbf{r}) \tag{1.1}$$

где $\Psi_n(r) = (\Psi_n^1, \Psi_n^2, \Psi_n^3)$ – собственные формулы упругих колебаний спутника относительно недеформированного состояния с компонентами в осях $Ox_1x_2x_3$, $q_n(t)$ – обобщенная координата n-го тона упругих колебаний, полагаем систему $\{\Psi_n\}$ ортогональной $\int\limits_v \Psi_n^i \Psi_p^i dm = 0$, если $i \neq j$ или $n \neq p$ [2, 3]), а $\mathbf{q} = \{q_n\} \in l_2$ – гильбертово пространство последовательностей, ограниченных по норме $\|\mathbf{q}\| = (\sum q_n^2)^{1/2}$. Суммирование здесь и всюду далее, если не оговорено противное, ведется по n от 1 до ∞. Условия сходимости функциональных рядов полагаем такими, что корректны используемые в работе операции над ними.

2°. Центральный эллипсоид инерции спутника в недеформированном состоянии является трехосным.

3°. Потенциальная энергия сил гравитационного притяжения определяется приближенным выражением [1]

$$\Pi_g = -\mu m / R_0 + \omega^2 (3\boldsymbol{\gamma}\mathbf{J}\boldsymbol{\gamma} - \operatorname{tr}\mathbf{J})/2 \tag{1.2}$$

где m – масса спутника, μ – произведение универсальной гравитационной постоянной на массу притягивающего центра, $\mathbf{J}$ – тензор инерции спутника относительно центра масс O.

4°. Упругое звено спутника считается изотропным; его потенциальная энергия при малых деформациях представляется так (ср. [2]):

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum c_{nn} q_n^2 \tag{1.3}$$

где вещественные постоянные $c_{nn} > 0$.

5°. В дальнейшем рассматриваются только те $\mathbf{q} = \{q_n\}$, при которых кинетическая энергия спутника в движении относительно его центра масс определенно положительная форма величин $\boldsymbol{\Omega}$ и $q^{\cdot} = \{\dot{q}_n\}, (^{\cdot} = \partial / \partial t)$.

Греческими буквами β, γ, ω, Ω, ρ, Ψ обозначаются соответствующие векторы, их компоненты отмечаются индексами.

При учете (1.1) представим тензор инерции в виде [2, 3, 4]

$$\mathbf{J} = \int\limits_{\upsilon} (\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}E - \boldsymbol{\rho}:\boldsymbol{\rho})dm = \mathbf{J}_0 + \sum q_n \mathbf{J}_n + \sum q_n^2 \mathbf{J}_{nn} \tag{1.4}$$

Здесь и ниже $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} : \mathbf{b}$ – диадное произведение вектора $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$, E – единичная матрица, интегрирование ведется по объему υ.

Матрицы компонент тензоров $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}_0$, $\mathbf{J}_n$, $\mathbf{J}_{nn}$ в осях $Ox_1x_2x_3$ таковы:

$$I = \| I^{ij} \| = I_0 + \sum q_n I_n + \sum q_n^2 I_{nn}$$

$$I_0 = \mathrm{diag}(\mu^1, \mu^2, \mu^3), \quad I_n = \| I_n^{ij} \|$$

$$I_n^{ij} = -H_n^{ji} = -\int (x_i \Psi_n^j + x_j \Psi_n^i) dm, \; I_n^{ii} = -\sum_{j=1}^{3} H_n^{jj} + H_n^{ii}$$

$$I_{nn} = \| I_{nn}^{ij} \| = \mathrm{diag}(L_{nn}^{22} + L_{nn}^{33}, L_{nn}^{11} + L_{nn}^{33}, L_{nn}^{11} + L_{nn}^{22})$$

$$L_{nn}^{ii} = \int \Psi_n^i \Psi_n^i dm (i, j = 1,2,3; n = 1,2,\ldots)$$

где μ^k (k = 1, 2, 3) – главные центральные моменты инерции недеформированного спутника, x_j – j-я компонента вектора $\mathbf{r}$ в ССК [2].

Обсуждались [5, 6] различные подходы при составлении уравнений движения сложных механических систем. В рассматриваемом случае уравнения движения могут быть получены из известных ([5], с. 45) уравнений.

Вид уравнений движения здесь не используется и не приводится.

2. Известно [1–6], что уравнения движения упругого спутника относительно центра масс в рассматриваемом случае допускают наряду с частными интегралами направляющих косинусов

$$U_1 \equiv \boldsymbol{\gamma\gamma} - 1 = 0, U_2 \equiv \boldsymbol{\beta\beta} - 1 = 0, U_3 \equiv \boldsymbol{\gamma\beta} = 0 \tag{2.1}$$

интеграл типа Якоби

$$U \equiv T_0 + \Pi + \Pi_g - \boldsymbol{\omega} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} / 2 = \mathrm{const} \tag{2.2}$$

где $T_0 = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}/2 + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{G} + T$ – кинетическая энергия спутника в его движении относительно O; $\mathbf{G}$, T – вектор кинетического момента спутника относительно точки O и кинетическая энергия движения спутника, обусловленная лишь упругими деформациями.

Используя представление (1.1), имеем

$$\mathbf{G} \equiv \int (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \mathbf{u}^{\cdot} dm = \sum_n \mathbf{G}_n q_n^{\cdot} + \sum_{n,m} \mathbf{G}_{mn} q_m q_n^{\cdot}$$

$$\mathbf{G}_n \equiv \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\Psi}_n dm, \mathbf{G}_{mn} \equiv \int \boldsymbol{\Psi}_m \times \boldsymbol{\Psi}_n dm \tag{2.3}$$

$$T \equiv \frac{1}{2} \int \mathbf{u}^{\cdot} \mathbf{u}^{\cdot} dm = \frac{1}{2} \sum a_{nn} q_n^{\cdot} q_n^{\cdot}, a_{nn} > 0 \tag{2.4}$$

Пусть значения переменных задачи

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^0, \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^0, \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^0, \mathbf{q} = \mathbf{q}^0, \mathbf{q}^{\cdot} = \mathbf{q}^{0\cdot} \tag{2.5}$$

определяют некоторое положение равновесия спутника (невозмущенное движение), величины

$$\boldsymbol{\Omega}^* = \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}^0, \boldsymbol{\beta}^* = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^0, \boldsymbol{\gamma}^* = \boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}^0, \tag{2.6}$$

$$\mathbf{q}^{*\cdot} = \mathbf{q}^{\cdot} - \mathbf{q}^{0\cdot}, \mathbf{q}^* = \mathbf{q} - \mathbf{q}^0$$

– отклонения от невозмущенного движения.

Введем функции

$$V(\boldsymbol{\Omega}^*, \boldsymbol{\gamma}^*, \boldsymbol{\beta}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{q}^{*\cdot}) = U + 3\omega^2 \lambda(\mathbf{q}^*) U_3 - 3\omega^2 \sigma(\mathbf{q}^*) U_1 / 2 + \omega^2 \nu(\mathbf{q}^*) U_2$$

$$V_1(\mathbf{q}^*,\boldsymbol{\gamma}^*,\boldsymbol{\beta}^*) = \Pi + \Pi_g - \boldsymbol{\omega}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}/2 + 3\omega^2\lambda(\mathbf{q}^*)U_3 - 3\omega^2\sigma(\mathbf{q}^*)U_1 + \omega^2\nu(\mathbf{q}^*)U_2$$
$$V(\boldsymbol{\Omega}^*,\boldsymbol{\gamma}^*,\boldsymbol{\beta}^*,\mathbf{q}^*,\mathbf{q}^{*\cdot}) = T_0 + V_1 \tag{2.7}$$

где неопределенные множители Лагранжа представляются в виде

$$\lambda(q^*) = \lambda_0 + \sum\lambda_n(q_n^* + q_n^0) + \sum\lambda_{nn}(q_n^* + q_n^0)^2$$
$$\sigma(q^*) = \sigma_0 + \sum\sigma_n q_n^* + \sum\sigma_{nn}(q_n^*)^2 \tag{2.8}$$
$$\nu(q^*) = \nu_0 + \sum\nu_n q_n^* + \sum\nu_{nn}(q_n^*)^2$$

В силу уравнений возмущенного движения и кинематических уравнений Пуассона

$$\boldsymbol{\beta}^\cdot = \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\Omega},\quad \boldsymbol{\gamma}^\cdot = \boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\Omega}$$

имеем $dV/dt = 0$.

Согласно теореме Рауса уравнения для нахождения значений (2.5) и неопределенных множителей Лагранжа (2.8), полученные из условия $\delta V = 0$ при $\boldsymbol{\Omega}^* = 0$ $,\ldots, q^{*\cdot} = 0$, можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{\gamma}^0\cdot\boldsymbol{\gamma}^0 - 1 = 0,\quad \boldsymbol{\beta}^0\cdot\boldsymbol{\beta}^0 - 1 = 0,\quad \boldsymbol{\gamma}^0\cdot\boldsymbol{\beta}^0 = 0 \tag{2.9}$$

$$3\omega^2((\mathbf{J}(q^0) - \sigma(0)E)\boldsymbol{\gamma}^0 + \lambda(0)\boldsymbol{\beta}^0) = 0$$
$$\omega^2((\nu(0)E - \mathbf{J}(q^0))\boldsymbol{\beta}^0 + 3\lambda(0)\boldsymbol{\gamma}^0) = 0 \tag{2.10}$$

$$\boldsymbol{\Omega}^0(\mathbf{J}_n + 2q_n\mathbf{J}_{nn})\boldsymbol{\Omega}^0/2 + \boldsymbol{\Omega}^0(\sum_m \mathbf{G}_{mn}q_m^{0\cdot}) + c_{nn}q_n^0 +$$
$$+3\omega^2\boldsymbol{\gamma}^0(\mathbf{J}_n + 2q_n^0\mathbf{J}_{nn})\boldsymbol{\gamma}^0/2 - \omega^2\,\mathrm{tr}(\mathbf{J}_n + 2q_n^0\mathbf{J}_{nn})/2 -$$
$$-\omega^2\boldsymbol{\beta}^0(\mathbf{J}_n + 2q_n^0\mathbf{J}_{nn})\boldsymbol{\beta}^0/2 = 0 \tag{2.11}$$

$$\mathbf{J}(q^0)\boldsymbol{\Omega}^0 + \sum_m(\mathbf{G}_m q_m^{0\cdot} + \sum_p \mathbf{G}_{pm}q_p^0)q_m^{0\cdot} = 0$$
$$(\sum_m \mathbf{G}_{mn}q_m^0 + \mathbf{G}_n)\boldsymbol{\Omega} + a_{nn}q_n^{0\cdot} = 0 \tag{2.12}$$

где $\mathbf{J}(q^0)$ – значение (1.4) при $q = q^0$.

Разрешая вторую группу уравнений (2.12) относительно $q_n^{0\cdot}$ ($a_{nn} > 0$) и подставляя найденные значения в первое (векторное) уравнений (2.12), приходим к заключению, что система (2.12) имеет единственное решение $\boldsymbol{\Omega}^0 = 0$, $\mathbf{q}^{0\cdot} = 0$ при условии

$$\det(I(q^0) + \sum G_n^0 G_n^{0T} a_{nn}^{-1}) \neq 0 \quad \mathbf{G}_n^0 = \mathbf{G}_n + \sum_m \mathbf{G}_{mn}q_m^0 \tag{2.13}$$

где G_n^0 – столбец компонентов $\mathbf{G}_n^0$ в системе $Ox_1x_2x_3$. Невыполнение условия (2.13) противоречит предположению 5°.

Для решения уравнений (2.9) – (2.11) и дальнейших исследований используем систему координат $Ox_1^0x_2^0x_3^0$ с полюсом в центре масс спутника, в осях которой матрица компонент тензора инерции $\mathbf{J}(\mathbf{q}^0)$ диагональна, $\mathbf{e}^k(\mathbf{q}^0)$ – орты ее соответствующих осей; $P(\mathbf{q}^0)$ – ортогональная матрица перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к системе $Ox_1^0x_2^0x_3^0$.

Для матриц компонент встречающихся в работе тензоров в осях $Ox_1^0x_2^0x_3^0$ используются те же обозначения.

Домножая первое уравнение (2.10) скалярно на β^0, а второе на γ^0, получаем при учете (2.9) $\lambda(0) = -\beta^{0T}J(q^0)\gamma^0$ и $3\lambda(0) = \gamma^{0T}J(q^0)\beta^0$, откуда следует, что независимо от значений $\overset{0}{q_n}$, определяющих невозмущенное движение, $\lambda(0) = 0$. Следовательно, $\lambda(\mathbf{q}^*) \equiv 0$, т.е. $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = 0$, $\lambda_{nn} = 0$, а γ^0 и β^0 – различные единичные собственные векторы $J(\mathbf{q}^0)$; σ_0, ν_0 – соответствующие собственные значения, $\beta^0 = (\beta_1^0, \beta_2^0, \beta_3^0)^T, \gamma^0 = (\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_3^0)^T$.

Определим собственные значения $\mu^k(\mathbf{q}^0)$ и соответствующие им собственные ортонормированные векторы $\mathbf{e}^k(\mathbf{q}^0)$ матрицы $I\,(\mathbf{q}^0)$ методом теории возмущений [7] в виде степенных рядов по $\overset{0}{q_n}$

$$\mu^k(q^0) = I_0^k + \sum q_n^0 \mu_n^k + \ldots,\quad \mu_n^k = I_n^{kk}$$

$$\mathbf{e}^k(q^0) = \mathbf{i}^k + \sum q_n^0 \mathbf{i}_n^k + \ldots,\quad \mathbf{i}_n^k = \sum_{j=1,\, j\neq k}^{3} (I_0^k - I_0^j)^{-1} I_n^{jk} \mathbf{i}^j \tag{2.14}$$

где $(I_0^k, \mathbf{i}^k)$ – собственная пара матрицы $I_0 = \mathrm{diag}(I_0^1, I_0^2, I_0^3)$.

Очевидно, что ортогональная матрица перехода $P(q^0)$ может быть представлена с использованием (2.14) так:

$$P(\mathbf{q}^0) \equiv (e^1(\mathbf{q}^0), e^2(\mathbf{q}^0), e^3(\mathbf{q}^0)) = E + \sum q_n^0 P_n + \ldots \tag{2.15}$$

где $e^k\,(\mathbf{q}^0)$ – столбец компонент вектора $\mathbf{e}^k\,(\mathbf{q}^0)$ в системе $Ox_1x_2x_3$.

По теореме о преобразовании компонент тензоров при переходе в новую систему координат, имеем:

$$J_n \equiv \left\| J_n^{ij} \right\| = P(\mathbf{q}^0) I_n P^t(\mathbf{q}^0),\quad J_{nn} \equiv \left\| J_{nn}^{ij} \right\| = P(\mathbf{q}^0) I_{nn} P^T(\mathbf{q}^0) \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{q}^*) &= P(\mathbf{q}^0)(I_0 + \sum q_n^0 I_n + \sum q_n^{02} I_{nn} + \\ &+ \sum q_n^*(I_n + 2q_n^0 I_{nn}) + \sum q_n^{*2} I_{nn}) P^t(\mathbf{q}^0) = J_0 + \\ &+ \sum q_n^*(J_n + 2q_n^0 J_{nn}) + \sum q_n^{*2} J_{nn} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_0 &= P(\mathbf{q}^0)(I_0 + \sum q_n^0 I_n + \sum q_n^{02} I_{nn}) P^t(\mathbf{q}^0) = \\ &= \mathrm{diag}(J_0^1(\mathbf{q}^0), J_0^2(\mathbf{q}^0), J_0^3(\mathbf{q}^0)),\quad J_0^k = \mu^k(\mathbf{q}^0) \end{aligned}$$

Решение уравнений (2.9), (2.10) в проекциях на оси $Ox_1^0x_2^0x_3^0$ можно записать следующим образом:

$$\forall k, l, m \in \{1,2,3\},\ k \neq l \neq m$$

$$\Omega_i^0 = 0,\ \mathbf{q}^{0\cdot} = 0,\ \lambda_0 = 0,\ \lambda_n = 0,\ \lambda_{nn} = 0\ (n = 1,2,\ldots)$$

$$\nu_0 = \mu^k(\mathbf{q}^0),\ \beta_i^0 = \pm\delta_{ik}$$

$$\sigma_0 = \mu^m(\mathbf{q}^0),\ \gamma_i^0 = \pm\delta_{im} (i = 1,2,3) \tag{2.17}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, значения $\overset{0}{q_n}$ определяются из уравнений, полученных из (2.11), при учете (2.17):

$$c_{nn}q_n^0+3\omega^2(J_n^{mm}+2q_n^0J_{nn}^{mm})/2-\omega^2\operatorname{tr}(J_n+2q_n^0J_{nn})/2-$$
$$-\omega^2(J_n^{kk}+2q_n^0J_{nn}^{kk})/2=0\ \ (n=1.2,\dots) \qquad (2.18)$$

Значения $\sigma_n, \nu_n, \sigma_{nn}, \nu_{nn}$ из (2.8) будут определены при исследовании условий устойчивости решений (2.17), (2.18).

Если не существует вещественных решений системы (2.18), то положений относительно равновесий спутник не имеет. Из (2.17) следует

Утверждение 1. Каждое решение уравнений (2.18) при фиксированном наборе целых $k, l, m \in \{1, 2, 3\}$ определяет четыре различных положения равновесия спутника:

$$\Omega_i^0=0,\ \mathbf{q}^{0\cdot}=0$$

$$\beta_i^0(\mathbf{q}^0)=\pm\delta_{ik},\ \gamma_i^0(\mathbf{q}^0)=\pm\delta_{im},\ i=1,2,3 \qquad (2.19)$$

Если существует положение относительного равновесия спутника, то его главные центральные оси, построенные для данного равновесия, коллинеарны осям орбитальной системы координат. При учете формул (2.15) и (2.16) следует

Утверждение 2. Чтобы существовало тривиальное положение относительного равновесия, определяемое значениями $q_n^0=0$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $n = 1, 2, \dots$

$$I_n^{kk}-I_n^{mm}+I_n^{ll}/2=0 \qquad (2.20)$$

Уравнения (2.20) накладывают определенные ограничения на расположение и характеристики упругого звена.

3. Пусть уравнения (2.18) имеют изолированное решение, а (2.19) – соответствующие ему положения равновесия спутника (невозмущенные движения). Для исследования их устойчивости по части переменных воспользуемся теоремой 1 ([4], с. 131).

В качестве функции Ляпунова возьмем

$$W(\Omega^*,\gamma^*,\beta^*,q^*,q^{*\cdot})\equiv V(\Omega^*,\gamma^*,\beta^*,\mathbf{q}^*,\mathbf{q}^{*\cdot},\sigma_0,\nu_0)-V(0)$$

где $V(0)$ – значение V на невозмущенном движении (см. (2.7)), $dW/dt = 0$ в силу уравнений возмущенного движения.

В малой окрестности невозмущенного движения

$$W=T_0+V_1-V_1(0)=T_0+\delta V_1(0)+\delta^2V_1(0)+\dots \qquad (3.1)$$

и при учете предположения 5° и того, что $\delta V_1(0) = 0$, условия положительной определенности $\delta^2V_1(0)$ по части переменных

$$\delta w_1=\delta\gamma_1^*,\quad \delta w_2=\delta\beta_1^*,\quad \delta w_3=\delta\gamma_2^*,\quad \delta w_4=\delta\beta_2^*$$

$$\delta w_5=\delta\gamma_3^*,\quad \delta w_6=\delta\beta_3^*,\quad \delta w_{6+i}=\delta q_i^*\,(i=1,\dots,N)$$

на линейных многообразиях, задаваемых равенствами $\delta U_j = 0$ (j = 1, 2, 3) будут достаточными для устойчивости положений равновесия упругого спутника по переменным $\Omega_j,\beta_j,\gamma_j,q_1,\dots,q_N,\dot q_1,\dot q_2,\dots$

Представим $\delta^2V_1(0)$ в виде счетномерной квадратичной формы с вещественной матрицей H_1:

$$\delta^2 V_1(0) = \delta w^T H_1 \delta \mathbf{w},\ H_1 = \begin{Vmatrix} A_1 & B \\ B & C \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{w} \equiv (w_1, w_2, \dots)^T,\ B^T = (b_1, \dots, b_6),\ b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \dots)^T \tag{3.2}$$

$$\begin{Vmatrix} b_{1n} \\ b_{3n} \\ b_{5n} \end{Vmatrix} = 3((J_n - \sigma_n E) + 2q_n^0 (J_{nn} - \sigma_{nn} E))\gamma_0$$

$$\begin{Vmatrix} b_{2n} \\ b_{4n} \\ b_{6n} \end{Vmatrix} = ((\nu_n E - J_n) + 2q_n^0 (\nu_{nn} E - J_{nn}))\beta^0 \tag{3.3}$$

$$i = 1,2,\dots,6;\quad n = 1,2,\dots$$

Диагональная матрица

$$C = \left\| \omega^{-2} c_{nn} + 2(J_{nn}^{mm} - J_{nn}^{kk} - J_{nn}^{11}/2) \right\|,\ n = 1,2,\dots$$

$$A_1 = \mathrm{diag}(3(J_0^1 - \sigma_0), (\nu_0 - J_0^1), 3(J_0^2 - \sigma_0), (\nu_0 - J_0^2), 3(J_0^3 - \sigma_0), (\nu_0 - J_0^3)) \tag{3.4}$$

Замечание. На любом решении (2.17), (2.18) какие-либо два диагональных элемента матрицы A_1 обращаются в нуль и значения $\sigma_n, \sigma_{nn}, \nu_n, \nu_{nn}$ в (3.3) и (3.4) выбираются таким образом, чтобы элементы матрицы $B(B^T)$, стоящие в строках (столбцах), проходящих через эти нулевые диагональные элементы, также обращались в нуль:

$$\sigma_n = J_n^{mm}, \nu_n = J_n^{kk}, \sigma_{nn} = J_{nn}^{mm}, \nu_{nn} = J_{nn}^{kk} (n = 1,2,\dots)$$

Тем самым полностью определены множители Лагранжа (2.8).

Зафиксируем целое N и обозначим

$$\mathbf{w}_6 = (w_1, \dots, w_6)^t, \mathbf{w}_N = (w_1, \dots, w_{6+N})^T$$

$$\mathbf{w}_* = (w_{6+N+1}, w_{6+N+2}, \dots)^T$$

B_N – $(6 \times N)$-матрица, состоящая из N первых столбцов матрицы B, B_* – матрица, получающаяся из матрицы B вычеркиванием первых N столбцов, C_N, C_* – части матрицы C, также диагональные матрицы

$$C_N = \left\| \omega^{-2} c_{nn} + 2(J_{nn}^{mm} - J_{nn}^{kk} - J_{nn}^{ll}/2) \right\|, n = 1,\dots,N$$

$$C_* = \left\| \omega^{-2} c_{nn} + 2(J_{nn}^{mm} - J_{nn}^{kk} - J_{nn}^{ll}/2) \right\|, n = N+1, N+2, \dots$$

Из представления матрицы H_1 в блочном виде

$$H_1 = \begin{Vmatrix} A_1 & B_N & B_* \\ B_N^t & C_N & \Theta \\ B_*^t & \Theta & C_* \end{Vmatrix}$$

где Θ – нулевая $(N \times \infty)$-матрица.

При условии положительности и отделимости от нуля диагональных элементов матрицы C_*, выделяя полный квадрат, можно записать

$$\delta^2 V_1(0) = \delta \mathrm{w}_N^t \begin{Vmatrix} (A_1 - B_* C_*^{-1} B_*^t) & B_N \\ B_N^t & C_N \end{Vmatrix} \delta \mathrm{w}_N + \tag{3.5}$$

$$+(\delta \mathrm{w}_*^t + \delta \mathrm{w}_6^t B_* C_*^{-1}) C_* (\delta \mathrm{w}_* + C_*^{-1} B_*^t \delta \mathrm{w}_6)$$

Условия теоремы [4] будут выполнены, если на линейных многообразиях $\delta U_i = 0$ ($i =$ $= 1, 2, 3$) квадратичная форма конечного числа переменных $\delta \mathrm{w}_N$ в (3.5) будет определенно положительной.

Используя известный прием (см., например, [8]), приходим к эквивалентной задаче исследования условий положительной определенности квадратичной формы с вещественной $[(3 + N) \times (3 + N)]$-матрицей:

$$H = \begin{Vmatrix} C_N & x_0^t y_0^t & z_0^t \\ x_0 & & \\ y_0 & A & \\ z_0 & & \end{Vmatrix} \tag{3.6}$$

$$x_0 = 2(J_1^{km} + 2q_1^0 J_{11}^{km}, \ldots, J_N^{km} + 2q_N^0 J_{NN}^{km})$$

$$y_0 = \sqrt{3}(J_1^{lm} + 2q_1^0 J_{11}^{lm}, \ldots, J_N^{lm} + 2q_N^0 J_{NN}^{lm})$$

$$z_0 = (J_1^{kl} + 2q_1^0 J_{11}^{kl}, \ldots, J_N^{kl} + 2q_N^0 J_{NN}^{kl})$$

Если обозначить строки бесконечной длины

$$x_* = 2(J_p^{km} + 2q_p^0 J_{pp}^{km}, J_{p+1}^{km} + 2q_{p+1}^0 J_{(p+1)(p+1)}^{km}, \ldots)$$

$$y_* = \sqrt{3}(J_p^{lm} + 2q_p^0 J_{pp}^{lm}, J_{p+1}^{lm} + 2q_{p+1}^0 J_{(p+1)(p+1)}^{lm}, \ldots)$$

$$z_* = (J_p^{kl} + 2q_p^0 J_{pp}^{kl}, J_{p+1}^{kl} + 2q_{p+1}^0 J_{(p+1)(p+1)}^{kl}, \ldots), p = N + 1$$

и ввести их энергетическое скалярное произведение по формулам

$$(x_*, x_*) \equiv x_* C_*^{-1} x_*^t, (x_*, y_*) \equiv x_* C_*^{-1} y_*^T \tag{3.7}$$

то

$$A = \begin{Vmatrix} J_0^{kk} - J_0^{mm} - (x_*, x_*) & -(x_*, y_*) & -(x_*, z_*) \\ -(x_*, y_*) & J_0^{ll} - J_0^{mm} - (y_*, y_*) & -(y_*, z_*) \\ -(x_*, z_*) & -(y_*, z_*) & J_0^{kk} - J_0^{ll} - (z_*, z_*) \end{Vmatrix}$$

Для положительной определенности матрицы H необходима строгая положительность ее диагональных элементов, в том числе диагональных элементов матрицы A.

Далее выберем $\alpha \in (0, 1)$ так, что

$$J_0^{kk} - J_0^{ll} = \alpha(J_0^{kk} - J_0^{mm}), J_0^{ll} - J_0^{mm} = (1 - \alpha)(J_0^{kk} - J_0^{mm})$$

и введем векторы-строки бесконечной длины, составленные из строк $x_0, x_*; y_0, y_*; z_0, z_*$:

$$x \equiv (x_0 | x_*), y \equiv (1 - \alpha)^{-\frac{1}{2}} (y_0 | y_*), z \equiv \alpha^{-\frac{1}{2}} (z_0 | z_*) .$$

Определим энергетическое скалярное произведение векторов

$$(x,x) \equiv xC^{-1}x^T, (x,y) \equiv xC^{-1}y^T, \ldots \qquad (3.8)$$

Корни квадратного уравнения

$$(s-(y,y))(s-(x,x))-(x,y)^2 = 0 \qquad (3.9)$$

возникающего при исследовании знака главного диагонального минора порядка $N + 2$ матрицы H, обозначим

$$f_1 = \frac{1}{2}((x,x)+(y,y)) - ((\frac{1}{2}((x,x)-(y,y)))^2 + (x,y)^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f_2 = \frac{1}{2}((x,x)+(y,y)) + ((\frac{1}{2}((x,x)-(y,y)))^2 + (x,y)^2)^{\frac{1}{2}}$$

Видно, что $0 < f_1 < f_2$. Пусть a_1, a_2, a_3 – корни кубического уравнения

$$s^3 - s^2 p + sg - R = 0 \qquad (3.10)$$

которое возникает при раскрытии определителя матрицы H

$$p = (x,x)+(y,y)+(z,z), g = (y,y)(z,z)-(y,z)^2 +$$
$$+(x,x)(y,y)-(x,y)^2+(x,x)(z,z)-(x,z)^2,$$

$$R = \det\begin{Vmatrix} (x,x) & (x,y) & (x,z) \\ (x,y) & (y,y) & (y,z) \\ (x,z) & (y,z) & (z,z) \end{Vmatrix}$$

Если уравнение (3.10) имеет один действительный или один простой действительный корень, или, наконец, один действительный корень 3, то этот корень обозначается через a_3. В случае трех различных действительных корней полагаем $a_1 < a_2 < a_3$ [9].

Необходимые и достаточные условия положительной определенности матрицы H, являющиеся одновременно достаточными для устойчивости положений равновесия (2.19), (2.18) по части переменных в соответствии с теоремой В.В. Румянцева, сведены в

Утверждение 3. Для того чтобы положения относительного равновесия (2.18), (2.19) при сделанных предположениях 1°–5° были устойчивы по части переменных $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \mathbf{q}^{\cdot}, \gamma_i, \beta_i, q_1, \ldots q_N$, где N – произвольное целое положительное число, достаточно, чтобы выполнялись условия для некоторого $\varepsilon > 0$

$$J_0^k > J_0^l > J_0^m \qquad (3.11)$$

$$\omega^{-2}c_{nn} + 2(J_{nn}^{mm} - J_{nn}^{kk} - J_{nn}^{ll}/2) > \varepsilon, n = 1,2,\ldots \qquad (3.12)$$

$$J_0^k - J_0^m > f_2 \qquad (3.13)$$

Если уравнение (3.10) имеет три различных действительных корня, то к условиям (3.13) следует добавить условия

$$a_1 < J_0^k - J_0^m < a_2 \vee J_0^k - J_0^m > a_3 \qquad (3.14)$$

иначе добавляется условие

$$J_0^k - J^m > a_3, J_0^k - J_0^m \neq a_1, a_2 \qquad (3.15)$$

Верно также менее громоздкое, но более грубое достаточно, чтобы H была матрицей со строгим диагональным преобладанием (i = 1, 2, 3) [10].

Условие (3.11) можно трактовать как условие устойчивости отвердевшего в положении относительного равновесия упругого спутника (ср. [1]). Условие (3.12) аналогично соответствующим условиям [2, 3]. На необходимость в общем случае гарантированной разности главных моментов инерции, определяемой условиями (3.13), (3.14) указывалось и в работах других авторов [2, 4].

При нахождении положений относительных равновесий спутника основная трудность заключается в решении уравнений (2.18). Путем линеаризации этих уравнений по q_n^0 с применением метода редукции [11] можно получать их приближенные решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. *Павлов Ю.Н., Петрук В.П.* Пространственные колебания гравитационно-ориентированного спутника. Ч. I // Космич. исследования. 1976. Т. 14. Вып. 5. С. 944–950.
3. *Легостаев В.П.* Устойчивость деформируемого спутника // Космич. исследования. 1970. Т. 8. Вып. 4. С. 494–500.
4. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
5. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987. 231 с.
6. *Рубановский В.Н.* Устойчивость установившихся движений сложных механических систем // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ, 1982. N. 5. С. 62–134.
7. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 252 с.
8. *Кузьмин П.А.* Малые колебания и устойчивость движения. М.: Наука, 1973. 206 с.
9. *Курош А.Т.* Курс высшей алгебры. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 335 с.
10. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
11. *Вулих Б.З.* Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 415 с.

Иркутск

Поступила в редакцию
27.I.1992