ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. ТОМ 57, ВЫП. 2, 1993

УДК (531.36+629.19):534

© 1993 г. Е.В. Синицын

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРЕЦЕССИИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ВДОЛЬ ОСИ СИММЕТРИИ

Рассматривается относительное движение вязкоупругого тела, совершающего продольные колебания вдоль оси симметрии, в центральном ньютоновском гравитационном поле. Используется линейная теория вязкоупругости. Исследуется устойчивость частного решения уравнений движения, соответствующего равномерному вращению тела вокруг оси симметрии, ортогональной плоскости круговой орбиты. При помощи принципа сведения в теории счетных систем дифференциальных уравнений и критерия Каменкова исследуется устойчивость в нелинейной задаче во всей области изменения параметров. Доказывается корректность "квазистатического подхода" при исследовании устойчивости.

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Рассмотрим однородное, изотропное, динамически симметричное вязкоупругое тело, движущееся в центральном ньютоновском поле сил. Предположим, что центр масс движется по фиксированной круговой орбите ($\omega_0 = 2\pi T^{-1}$, T – период обращения центра масс по орбите).

С деформируемым телом свяжем среднюю систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре масс (см., например, [1–3]). Ось Ox_3 направлена вдоль оси симметрии.

Введем следующие обозначения: $\mathbf{r}$ – радиус-вектор частицы тела dm относительно средней системы осей, соответствующий недеформированному состоянию; $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – ее упругое смещение. Будем использовать разложение $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ по ортонормированной системе собственных форм упругих колебаний тела

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\mathbf{U}_n(\mathbf{r})$$

где $q_n(t)$ – обобщенные (нормальные) координаты. Предположим, что тело совершает только продольные колебания вдоль оси симметрии. Тогда смещение $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ направлено вдоль оси Ox_3 и $\mathbf{U}_n = (0,0,U_n(x_3))^T$.

В качестве примера можно привести случай, когда тело вытянуто вдоль оси симметрии и формы колебаний хорошо аппроксимируются собственными формами продольных упругих колебаний стержня [1, 4].

Будем полагать, что материал тела удовлетворяет модели Кельвина Фойгта линейной теории вязкоупругости при постоянном (не зависящем от времени) коэффициенте Пуассона. Потенциальная энергия упругих деформаций записывается в виде

$$\Pi_* = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_n^2 q_n^2$$

Здесь Ω_n – собственные частоты свободных упругих колебаний.

Диссипативный функционал представляется в виде функционала Релея

$$\Psi = \chi b \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^2 \dot{q}_n^2$$

где $b = \text{const}$, χ – безразмерный коэффициент. Точкой здесь и далее будем обозначать производные по времени от скалярных величин и векторных величин в средней системе координат.

Введем в рассмотрение орбитальную систему координат $OX_1X_2X_3$. Ось OX_3 направлена вдоль радиуса-вектора центра масс, оси OX_2 и OX_1 – по бионормали к орбите и по трансверсали в сторону движения центра масс соответственно.

Пусть $\boldsymbol{\omega}$ – абсолютная угловая скорость трехгранника $Ox_1x_2x_3$, $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор оси OX_3(ω_i, γ_i – проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ на оси Ox_i соответственно). Ориентацию трехгранника $Ox_1x_2x_3$ относительно орбитальной системы координат будем определять углами Эйлера φ, ψ, θ, вводимыми обычным образом.

Дифференциальные уравнения, описывающие движение трехгранника $Ox_1x_2x_3$ и деформации тела, могут быть записаны в форме [2]

$$(J\boldsymbol{\omega})^{\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = 3\omega_0^2 \boldsymbol{\gamma} \times J\boldsymbol{\gamma} \tag{1.1}$$

$$\ddot{q}_n + 2\chi b \Omega_n^2 \dot{q}_n + \Omega_n^2 q_n = Q_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

$$Q_n = (H_n + q_n)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_0^2(3\gamma_3^2 - 1))$$

В рассматриваемом случае, когда тело динамически симметрично и совершает продольные колебания вдоль оси симметрии, тензор инерции J для O можно представить в виде

$$J = J_0 + J_1 + J_2 = \text{diag}\{A, A, C\} \tag{1.3}$$

$$J_0 = \text{diag}\{A_0, A_0, C_0\}, \quad J_1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} q_n J_1^{(n)}, \quad J_2 = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^2 J_2^{(n)}$$

$$J_1^{(n)} = \text{diag}\{H_n, H_n, 0\}, \quad J_2^{(n)} = \text{diag}\{1, 1, 0\}$$

$$H_n = \int_{\Omega} x_3 U_n dm$$

где интегрирование ведется по области, занимаемой телом в недеформированном состоянии.

Видно, что оси Ox_i (i = 1, 2, 3) в процессе движения остаются главными центральными осями инерции. Моменты инерции относительно этих осей зависят от времени через координаты q_n.

Компоненты вектора угловой скорости ω_i, а также направляющие косинусы радиуса-вектора центра масс γ_i выражаются через углы Эйлера известными соотношениями

$$\omega_1 = \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi + \omega_0 (\sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\theta) \tag{1.4}$$

$$\omega_2 = \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi - \omega_0 (\sin\psi \sin\varphi - \cos\psi \cos\varphi \cos\theta)$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} - \omega_0 \cos\psi \sin\theta$$

$$\gamma_1 = \sin\theta \sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta \cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta$$

Запишем уравнения (1.1) в скалярной форме и подставим в полученные уравнения выражения (1.4). Затем сложим первое уравнение, умноженное на $\sin\varphi$, со вторым, умноженным на $\cos\varphi$. Далее вычтем из первого уравнения, умноженного на $\cos\varphi$, второе, умноженное на $\sin\varphi$. Получаем уравнения движения в форме (см. также [1])

$$
\begin{gathered}
\psi''\sin\theta + 2\psi'\theta'\cos\theta - 2\theta'\sin\theta\cos\psi - \cos\psi\sin\psi\sin\theta - \\
-\frac{C}{A}\beta(\theta' + \sin\psi) + \frac{A'}{A}(\psi'\sin\theta + \cos\psi\cos\theta) = 0 \\
\theta'' - \psi'^2\sin\theta\cos\theta + 2\psi'\cos\psi\sin^2\theta + \cos^2\psi\sin\theta\cos\theta - \\
-3\left(\frac{C}{A} - 1\right)\sin\theta\cos\theta + \beta\frac{C}{A}(\psi'\sin\theta + \cos\psi\cos\theta) + \frac{A'}{A}(\theta' + \sin\psi) = 0 \\
C\dot{\omega}_3 = 0 \;\Rightarrow\; \omega_3 = r_0 = \mathrm{const} \\
(\beta = r_0/\omega_0,\; (\cdot)' = d(\cdot)/d\tau,\; \tau = \omega_0 t)
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

В уравнениях (1.2) также перейдем к безразмерному времени и запишем их в виде

$$
\begin{gathered}
q_n'' + 2\chi b\omega_0\omega_n^2 q_n' + \omega_n^2 q_n = (q_n + H_n)(\psi'^2\sin^2\theta + \\
\theta'^2 + \sin^2\psi + 4\cos^2\theta + 2\psi'\cos\psi\cos\theta\sin\theta + 2\theta'\sin\psi - 1) \\
\omega_n = \Omega_n/\omega_0,\quad n = 1,2,\ldots
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

Уравнения (1.5), (1.6) описывают движение трехгранника $Ox_1x_2x_3$ и деформации тела и представляют собой замкнутую счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Угловая координата φ носит характер циклической переменной.

Система уравнений (1.5), (1.6) допускает точное частное решение

$$
\psi = \pi,\quad \theta = \frac{\pi}{2},\quad q_n = -\frac{H_n}{\omega_n^2 + 1}\quad (n = 1,2,\ldots)
\tag{1.7}
$$

Это решение соответствует такому движению тела, когда ось динамической симметрии тела Ox_3 все время ортогональна плоскости орбиты, при этом тело вращается вокруг оси Ox_3 с постоянной угловой скоростью $\omega_3 = r_0$. В случае абсолютно твердого тела такое движение носит название цилиндрической прецессии [5], так как ось Ox_3 заметает в инерциальном пространстве цилиндрическую поверхность.

Ниже будет проведено строгое исследование устойчивости указанного частного решения нелинейной системы (1.5), (1.6) по отношению к переменным $\psi, \psi', \theta, \theta', \varphi'$, q_n, q_n'.

2. Метод исследования. Отличие постановки задачи от рассматриваемой ранее [1] сводится лишь к тому, что в [1] допускались изгибные колебания, когда вектор смещений $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ортогонален оси Ox_3. Однако эти колебания не дают вклада в линейную по часть тензора инерции и в рамках используемых в [1] приближений не повлияли на результат.

Опишем методику работы [1]. Вводятся предположения

$$
\omega_n^{-1} \sim \varepsilon \ll 1,\quad \chi \sim \varepsilon^{1+\delta}\quad (0 < \delta < 1)
$$

Система уравнений движения приводится к виду сингулярно-возмущенных уравнений, построение асимптотического решения который проводится методом пограничных функций [6, 7]. Решения для q_n, соответствующие квазистатическому режиму колебаний, подставляются в уравнения относительно ψ и θ, которые становятся замкнутой системой, и исследование устойчивости проводится при помощи критерия Каменкова. Ниже будет дано строгое обоснование этой методики.

Необходимость обоснования обусловлена, во-первых, тем, что используемые методы теории сингулярно-возмущенных уравнений развиты для систем с конечным числом степеней свободы; вопрос об обосновании методики для систем в бесконечномерных пространствах остается пока открытым (здесь следует отметить работу [8], где исследовались системы, подобные рассматриваемым, но более частного вида); во-вторых, исследование устойчивости проводится в силу уравнений, которым удовлетворяет приближенное решение. Это приближенное решение отличается от точного на некоторую величину ($\sim \varepsilon^4$) на большом ($\sim \varepsilon^{-1}$), но конечном интервале времени. Обоснование "квазистатического" подхода из [1] будет проведено ниже без использования асимптотических методов решения дифференциальных уравнений.

Пусть A^* – моменты инерции тела относительно осей Ox_1, Ox_2, получающиеся из (1.3) при $q_n = -H_n(\omega_n^2+1)^{-1}$.

Введем возмущения x_1, x_2, ξ_n по формулам

$$\psi = \pi + x_1, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + x_2, \quad q_n = -\frac{H_n}{\omega_n^2+1} + \xi_n$$

и запишем уравнения в отклонениях

$$x_1'' + (2-\alpha\beta)x_2' + (\alpha\beta-1)x_1 = G_1$$

$$x_2'' - (2-\alpha\beta)x_1' + (\alpha\beta+3\alpha-4)x_2 = G_2 \qquad (2.1)$$

$$\xi_n'' + 2\chi b\omega_0\omega_n^2\xi_n' + (\omega_n^2+1)\xi_n = Z_n + O_n^3 \qquad (2.2)$$

$$Z_n = \frac{\omega_n^2 H_n}{\omega_n^2+1}(x_1^2 + 4x_2^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + 2(x_1'x_2 - x_2'x_1))$$

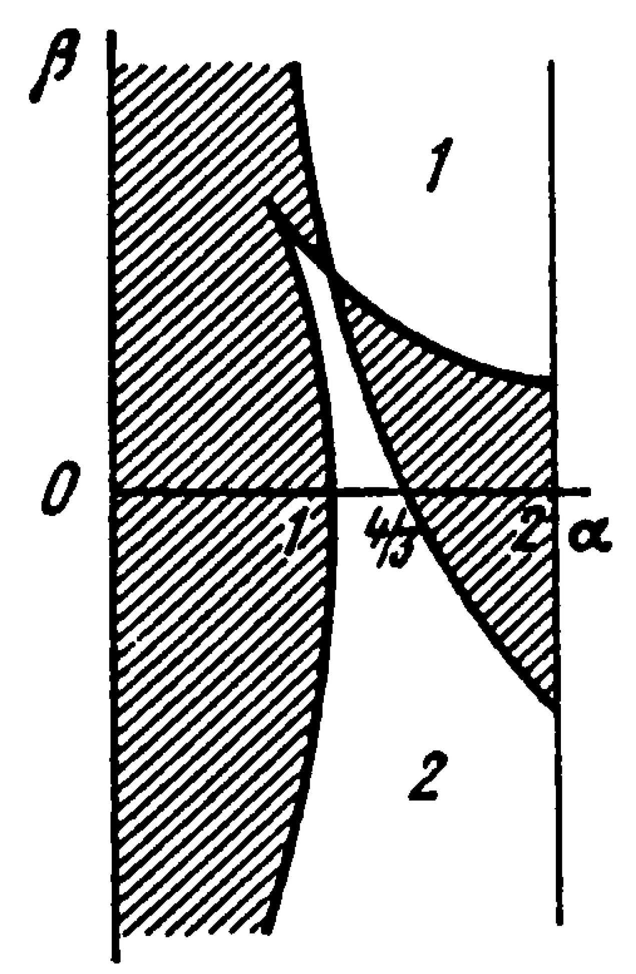
где $\alpha = C_0 A^{*-1}$; G_1, G_2 – совокупность членов не ниже второго порядка относительно переменных $x_1, x_1', x_2, x_2', \xi_i, \xi_i', O_n^3$ – не ниже третьего порядка. Уравнения (2.1), (2.2) получаются разложением правых частей системы (1.5), (1.6) в ряд Тейлора в окрестности решения (1.7).

Рассмотрим систему, получающуюся из системы (2.1), (2.2) отбрасыванием нелинейных членов.

При выполнении условий

$$\begin{gathered}(\alpha\beta-1)(\alpha\beta+3\alpha-4)>0, \quad \alpha^2\beta^2-2\alpha\beta+3\alpha-1>0\\ (\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta+3\alpha-1)^2-4(\alpha\beta-1)(\alpha\beta+3\alpha-4)>0\end{gathered} \qquad (2.3)$$

аналогичных известным из теории движения твердого тела в гравитационном поле [5], система линейного приближения (2.1) имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\delta_1$, $\pm i\delta_2$ ($\delta_1 > \delta_2$). Если хотя бы одно из условий (2.3) нарушено, то характеристическое уравнение имеет корень с положительной вещественной частью. Области выполнения условий (2.3) на плоскости параметров α и β показаны на фигуре (области *1* и *2*). Напомним, что моменты инерции, участвующие в определении параметра α, соответствуют состоянию тела, отличному от недеформированного ($q_n = -H_n(\omega_n^2+1)^{-1}$). Систему (2.1) будем в дальнейшем называть критической.



Решение системы, полученной из системы (2.2) отбрасыванием нелинейных членов, удовлетворяет при $t \geqslant t_0 > 0$ неравенству

$$\|z\| \leqslant \|z(t_0)\| B e^{-\tilde{\alpha}(t-t_0)} \tag{2.4}$$

где $B \geqslant 1$, $\tilde{\alpha} > 0$ – некоторые постоянные, не зависящие от выбора $t_0 \geqslant 0$. Введение нормы $\| z \|$ в пространстве последовательностей $z = (\xi_1, \xi_1', \xi_2, \xi_2', \ldots)$ будет обсуждаться ниже.

При исследовании устойчивости нулевого решения системы (2.1), (2.2) будем использовать принцип сведения в теории устойчивости [9].

Обобщение этого принципа для некоторых случаев счетных систем имеется в [10]. Для общего случая счетных систем принцип сведения сформулирован в [11], где доказательство не обсуждается и при формулировке не учтена поправка ([9], сноска на с. 383).

Введем понятие "укороченной" системы [9], получаемой из системы (2.1) при $\xi_n = 0$, $\xi_n' = 0$ (n = 1,2,...).

Принцип сведения в терминах рассматриваемой задачи сформулируем в форме теоремы.

Теорема. Допустим, что невозмущенное движение $x_1 = x_1' = x_2 = x_2' = 0$ для "укороченной" системы устойчиво, или асимптотически устойчиво, или неустойчиво вне зависимости от членов порядка выше, чем N. Тогда, если разложения функций $Z_n + O_n^3(x_1, x_1', x_2, x_2', 0, 0)$ начинаются членами порядка не ниже, чем $N + 1$, то и невозмущенное движение $x_1 = x_1' = x_2 = x_2' = \xi_n = \xi_n' = 0$ для полной системы (2.1), (2.2) соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво.

Доказательство этого утверждения не приводится в силу его громоздкости и тривиальности. При доказательстве используются преобразования системы уравнений, рассмотренные в [10, 11], доказательство принципа сведения для случая конечного числа степеней свободы [12], теоремы второго метода Ляпунова для счетных систем уравнений [10].

Заметим, что из сформулированной теоремы сразу следует неустойчивость невозмущенного движения в тех областях, где не выполнено хотя бы одно из условий (2.3) (заштрихованные области на фигуре).

Для исследования устойчивости в областях *1* и *2* теорема неприменима, так как в разложениях функций Z_n содержатся члены второго порядка. Вывод об устойчивости "укороченной" системы, отвечающей критическому случаю двух пар чисто мнимых корней, можно сделать при помощи критерия Каменкова (N = 3). В случае системы конечного порядка этот вопрос решается с использованием близкой к тождественной замены переменных вида

$$\xi_n = z_n + \sum_{m_1+m_2+n_1+n_2=2} a^n_{m_1m_2n_1n_2} x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_1'^{n_1} x_2'^{n_2} \tag{2.5}$$

Постоянные $a^n_{m_1m_2n_1n_2}$ в (2.5) выбираются таким образом, чтобы уничтожились квадратичные члены Z_n. Разложения функций $O_n^3(x_1, x_1', x_2, x_2', 0, 0)$ начинаются членами порядка не ниже 4.

В общем случае счетных систем вопрос о построении такой замены переменных сводится к решению счетной системы алгебраических уравнений относительно системы постоянных $a^n_{m_1m_2n_1n_2}$.

В случае системы (2.2) уравнение для каждого n отделяется, что позволяет построить общую формулу замены (2.5) и найти $a^n_{m_1m_2n_1n_2}$. После подстановки (2.5) в систему (2.1) надо положить $z_n = z_n' = 0$ (z_n' – находится из (2.5) дифференцированием в силу уравнений линейного приближения).

Тогда вывод об устойчивости новой "укороченной" системы, правые части которой будут отличаться от правых частей "укороченной" системы (2.1) в старых переменных, будет отвечать на вопрос об устойчивости исходной системы (2.1), (2.2).

Таким образом, дано обобщение принципа сведения теории устойчивости на случай счетных систем дифференциальных уравнений. Задача об устойчивости цилиндрической прецессии вязкоупругого тела, совершающего продольные колебания вдоль оси симметрии (разд. 1) может служить примером приложения сформулированной теоремы.

3. Исследование устойчивости. Будем исследовать устойчивость невозмущенного движения в областях изменения параметров α и β, где выполнены условия (2.3) (области *1* и *2* на фигуре). Сделаем замену (2.5) в уравнениях (2.2). Приравнивая коэффициенты при квадратичных по x_i, x_i' членах получаем систему уравнений для определения коэффициентов $a^n_{m_1m_2n_1n_2}$. В матричной форме эта система имеет вид

$$\left(B^2 + 2\chi b\omega_0\omega_n^2 B + \left(\omega_n^2+1\right)E\right)\mathbf{a} = \frac{\omega_n^2 H_n}{\omega_n^2+1}\mathbf{c}$$
$$\mathbf{a} = (a^n_{2000}, a^n_{1010}, a^n_{0020}, a^n_{1100}, a^n_{0110}, a^n_{0200}, a^n_{1001}, a^n_{0011}, a^n_{0101}, a^n_{0002})^T \tag{3.1}$$
$$\mathbf{c} = (1,0,1,0,2,4,-2,0,0,1)^T$$

где B – матрица 10×10, получающаяся дифференцированием по времени выражения $\sum_{m_1+m_2+n_1+n_2=2} a^n_{m_1m_2n_1n_2} x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_1'^{n_1} x_2'^{n_2}$ в силу уравнений линейного приближения системы (2.1) и собиранием подобных членов, E – единичная матрица. Явный вид матрицы B в дальнейшем не потребуется.

Система (3.1) представляет собой неоднородную систему десяти линейных алгебраических уравнений относительно десяти неизвестных. Решение системы в общем виде довольно громоздко. Введем следующие предположения: пусть период свободных упругих колебаний тела на низшей гармонике много меньше характерного времени затухания этих колебаний и пусть обе эти величины много меньше периода обращения центра масс по орбите. Положим

$$\omega_n = \varepsilon^{-1}\tilde{\omega}_n, \quad \chi \sim \varepsilon^{1+\delta}(0<\delta<1), \quad 0<\varepsilon\ll 1 \tag{3.2}$$

Заметим, что такие же допущения принимались ранее [1, 2, 4, 7] и на их основе строилось асимптотическое решение уравнений движения. Здесь асимптотические разложения (3.2) используются для решения системы алгебраических уравнений.

Предположения (3.2) хорошо согласуются с предположением о справедливости теории малых деформаций и представлением потенциальной энергии упругих деформаций в виде квадратичного функционала (разд. 1).

Систему (3.1) при учете (3.2) запишем в виде

$$\left(\varepsilon^2 B^2 + 2\chi b\omega_0\tilde{\omega}_n^2 B + \left(\tilde{\omega}_n^2 + \varepsilon^2\right)E\right)\mathbf{a} = \frac{\varepsilon^2\tilde{\omega}_n^2 H_n}{\tilde{\omega}_n^2 + \varepsilon^2}\mathbf{c} \tag{3.3}$$

Решение уравнения (3.3) представим сходящимся рядом, в котором ограничимся двумя первыми членами

$$\mathbf{a} = \varepsilon^2 H_n \tilde{\omega}_n^{-2}(\mathbf{c} - 2\chi b\omega_0 B\mathbf{c}) + O(\varepsilon^4) \tag{3.4}$$

Замену переменных (2.5) с учетом (3.4) можно переписать в виде

$$\xi_n = z_n + \varepsilon^2\tilde{\omega}_n^{-2}(Z_n - 2\chi b\omega_0 Z_n') + O(\varepsilon^4) \tag{3.5}$$

Далее замену переменных (3.5) используем в системе (2.1) и, положив $z_n = 0$, $z_n' = 0$, будем исследовать устойчивость невозмущенного движения критической системы. При этом исследуемая система в точности совпадает с системой уравнений "квазистатического приближения" [1].

Таким образом, применение "квазистатического подхода" [1] при исследовании устойчивости получило математическое обоснование.

Использование приближенного решения (3.4) вместо точного решения системы (3.1) означает, что границы областей устойчивости будут найдены с погрешностью порядка ε^2, и для их уточнения необходимо учитывать высшие члены в разложении (3.4).

Выполнив описанные выше преобразования, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &x_1'' + (2-\alpha\beta)x_2' + (\alpha\beta - 1)x_1 = g^1 + O_5^1 \\ &x_2'' - (2-\alpha\beta)x_1' + (\alpha\beta + 3\alpha - 4)x_2 = g^2 + O_5^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$g^i = \sum_{m_1+m_2+n_1+n_2=3} g^i_{m_1m_2n_1n_2} x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_1'^{n_1} x_2'^{n_2}$$

Коэффициенты $g^i_{m_1m_2n_1n_2}$ приведены в таблицах [1]. В одном из них допущена неточность – изменен знак в выражении для g^1_{2100}. Это привело к искажению картины областей устойчивости в областях *1* и *2*. Ниже приведено уточнение этих областей.

Устойчивость нулевого решения системы (3.6) будем исследовать при помощи критерия Каменкова [12, 13].

Сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{i}{2\sqrt{\delta_1}}w_1 + \frac{i}{2\sqrt{\delta_1}}w_1^* - \frac{i}{2\sqrt{\delta_2}}w_2 + \frac{i}{2\sqrt{\delta_2}}w_2^* \\ x_2 &= \frac{\sqrt{\delta_1}}{2}w_1 + \frac{\sqrt{\delta_1}}{2}w_1^* + \frac{\sqrt{\delta_2}}{2}w_2 + \frac{\sqrt{\delta_2}}{2}w_2^* \\ x_1' &= -\frac{k_1}{2\sqrt{\delta_1}}w_1 - \frac{k_1}{2\sqrt{\delta_1}}w_1^* - \frac{k_2}{2\sqrt{\delta_2}}w_2 - \frac{k_2}{2\sqrt{\delta_2}}w_2^* \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$x_2' = -\frac{ik_1\sqrt{\delta_1}}{2}w_1 + \frac{ik_1\sqrt{\delta_1}}{2}w_1^* - \frac{ik_2\sqrt{\delta_2}}{2}w_2 + \frac{ik_2\sqrt{\delta_2}}{2}w_2^*$$

$$k_j = \frac{(\alpha\beta-1)-\delta_j^2}{\delta_j(\alpha\beta-2)} = \frac{\delta_j(\alpha\beta-2)}{(\alpha\beta+3\alpha-4)-\delta_j^2}$$

Здесь w_i^* – сопряженная к w_i комплексная величина. Новые переменные удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} w_1' &= i\delta_1 w_1 + \sum_{m_1+m_2+n_1+n_2=3} A^1_{m_1m_2n_1n_2} w_1^{m_1} w_2^{m_2} w_1^{*n_1} w_2^{*n_2} \\ w_2' &= i\delta_2 w_2 + \sum_{m_1+m_2+n_1+n_2=3} A^2_{m_1m_2n_1n_2} w_1^{m_1} w_2^{m_2} w_1^{*n_1} w_2^{*n_2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

где коэффициенты $A^i_{m_1m_2n_1n_2}$ сложным образом выражаются через $g^i_{m_1m_2n_1n_2}$. Согласно критерию Каменкова, нулевое положение равновесия асимптотически устойчиво при одновременном выполнении трех условий [12, 13]:

$$\begin{aligned} &1)\ A^1_{2010} < 0,\ \ 2)\ A^2_{0201} < 0,\ \ 3)\ \text{если}\ A^1_{1101} > 0\ \ \text{и}\ A^2_{1110} > 0, \\ &\text{то}\ \Delta = A^1_{2010}A^2_{0201} - A^1_{1101}A^2_{1110} > 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Положение равновесия неустойчиво при (строгом) нарушении знака по крайней мере в одном из условий *1–3* (для условия *3* – изменение знака Δ).

Для рассматриваемого случая после громоздких выкладок получаем

$$\begin{aligned} A^1_{2010} &= \frac{P_1^1 k_2}{k_2\delta_1 - k_1\delta_2} + \frac{P_2^1}{k_2\delta_2 - k_1\delta_1}, \quad A^2_{0201} = -\frac{P_1^2 k_1}{k_2\delta_1 - k_1\delta_2} - \frac{P_2^2}{k_2\delta_2 - k_1\delta_1} \\ A^1_{1101} &= \frac{G_1^{12} k_2}{k_2\delta_1 - k_1\delta_2} + \frac{G_2^{12}}{k_2\delta_2 - k_1\delta_1}, \quad A^2_{1110} = -\frac{G_1^{21} k_1}{k_2\delta_1 - k_1\delta_2} - \frac{G_2^{21}}{k_2\delta_2 - k_1\delta_1} \end{aligned} \tag{3.10}$$

где с точностью до положительной постоянной:

$$\begin{aligned} P_1^i &= g^1_{0300}\left(-3k_i^3\delta_i^{-1}\right) + g^1_{0210}\left(3k_i^2\right) + g^1_{0120}\left(-3k_i\delta_i\right) + \\ &g^1_{1011}\left(k_i\delta_i\right) + g^1_{0102}\left(-3k_i^3\delta_i\right) + g^1_{0012}\left(k_i^2\delta_i^2\right) + \\ &+ g^1_{2100}\left(-k_i\delta_i^{-1}\right) + g^1_{1101}\left(-k_i^2\right) \\ P_2^i &= g^2_{2001}\left(-3k_i\right) + g^2_{1110}\left(k_i\right) + g^2_{1200}\left(-k_i^2\delta_i^{-1}\right) + \\ &+ g^2_{0201}\left(-k_i^3\right) + g^2_{0111}\left(k_i^2\delta_i\right) + g^2_{0003}\left(-3k_i^3\delta_i^2\right) + g^2_{1002}\left(-3k_i^2\delta_i\right) \\ G_1^{ij} &= g^1_{2100}\left(-2k_i\delta_j^{-1}\right) + g^1_{1101}\left(-2k_ik_j\right) + g^1_{0300}\left(-6k_ik_j^2\delta_j^{-1}\right) + \\ &+ g^1_{0210}\left(2k_j^2\delta_i\delta_j^{-1} + 4k_ik_j\right) + g^1_{0120}\left(-2k_i\delta_j - 4k_j\delta_i\right) + \\ &+ g^1_{1011}\left(2k_i\delta_i\right) + g^1_{0102}\left(-2k_ik_j^2\delta_j\right) + g^1_{0012}\left(2k_j^2\delta_i\delta_j\right) \\ G_2^{ij} &= g^2_{2001}\left(-2k_i\delta_i\delta_j^{-1} - 4k_j\right) + g^2_{1110}\left(2k_j\right) + g^2_{1200}\left(-2k_j^2\delta_1^{-1}\right) + \\ &+ g^2_{0201}\left(-2k_ik_j^2\delta_i\delta_j^{-1}\right) + g^2_{0111}\left(k_ik_j\delta_i\right) + g^2_{0003}\left(-6k_ik_j^2\delta_i\delta_j\right) + g^2_{1002}\left(-2k_j^2\delta_j - 4k_ik_j\delta_i\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Проверка условий (3.9)–(3.11) проведена на ЭВМ: в области *1* имеет место асимптотическая устойчивость, а в области *2* – неустойчивость.

Заметим, что условия устойчивости (3.9)–(3.11) не проверялись в точках (α, β), принадлежащих кривой $\alpha\beta = 2$, где не имеет смысла замена переменных (3.7), и на кривой резонанса четвертого порядка $\delta_1 = 3\delta_2$, где неприменим критерий Каменкова.

На основании теоремы из разд. 2 можно сделать следующие выводы: невозмущенное движение (1.8), соответствующее равномерному вращению тела вокруг оси симметрии, ортогональной плоскости орбиты, асимптотически устойчиво по отношению к переменным ψ, $\psi^{\cdot}$, θ, $\theta^{\cdot}$, q_n, $q_n^{\cdot}$ для значений параметров (α, β), принадлежащих области *1* (за исключением указанных выше) и неустойчиво для всех остальных значений (α, β).

Из интеграла $\omega_3 = \text{const}$ следует асимптотическая устойчивость по отношению к $\varphi^{\cdot}$ в области *1*.

Замечания 1°. При определении устойчивости в системах с бесконечным числом степеней свободы необходимо ввести меру отклонения возмущенного состояния от невозмущенного. В качестве такой меры была использована [10, 11] норма в пространстве последовательностей $z = (z_1, \ldots, z_2, \ldots)$

$$\|z\| = \sup_n(|z_1|, |z_2|, \ldots) \tag{3.12}$$

Асимптотическую устойчивость и неустойчивость, полученные выше, надо понимать соответственно как асимптотическую устойчивость и неустойчивость в пространстве последовательностей $z = (x_1, x_2, x_1', x_2', \tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_1', \tilde{\xi}_2, \tilde{\xi}_2', \ldots)(\tilde{\xi}_n = A^{*-1/2}\xi_n)$ по мере (3.12) (соответствующие определения приведены в [14]).

Можно показать, что аналогичные выводы справедливы и в пространстве последовательностей с нормой

$$\|z\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\xi}_n'^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2\tilde{\xi}_n^2$$

которая является естественной нормой конфигурационного пространства задачи.

2°. В отсутствие внутренней вязкости ($b = 0$) рассматриваемая система имеет обобщенный интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot J\,\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} q_n^{\cdot 2} + \Pi_* + \frac{\omega_0^2}{2}(3\boldsymbol{\gamma} \cdot J\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\beta} \cdot J\boldsymbol{\beta} \cdot 2A - C)$$

где $\boldsymbol{\beta}$ – единичный вектор бинормали к орбите.

Вторая вариация H в окрестности стационарного движения (1.8) представляется в виде (в безразмерной форме)

$$\delta^2 H = \frac{1}{2}\left(x_1'^2 + x_2'^2 + (\alpha\beta - 1)x_1^2 + (\alpha\beta + 3\alpha - 4)x_2^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\xi}_n'^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\omega_n^2 + 1\right)\tilde{\xi}_n^2\right)$$

В случае вязкоупругого тела

$$H^{\cdot} = -2\Psi \leqslant 0$$

На основании второго метода Ляпунова можно получить [15], что невозмущенное движение будет устойчивым по отношению к x_1, x_1', x_2, x_2', ξ_n и асимптотически устойчивым по отношению к ξ_n' в области *1*:

$$(\alpha\beta - 1) > 0, \quad (\alpha\beta + 3\alpha - 4) > 0$$

Вывода об асимптотической устойчивости по всем переменным и о неустойчивости при помощи такого подхода получить не удается.

Данное рассмотрение демонстрирует преимущества предлагаемого подхода к исследованию устойчивости в рассматриваемой задаче.

Автор благодарит А.П. Маркеева за интерес к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А.П.* Об одном частном случае движения динамически симметричного упруговязкого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле // Космич. исслед. 1990. Т. 28. № 5. С. 643–654.
2. *Маркеев А.П.* К динамике упругого тела в гравитационном поле // Космич. исслед. 1989. Т. 27. № 2. С. 163–175.
3. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. М.: Машиностроение, 1987.231 с.
4. *Маркеев А.П.* Влияние продольных упругих колебаний тела на его быстрые вращения в гравитационном поле // Изз. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 38–45.
5. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
6. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
7. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 34–42.
8. *Шатина А.В.* Об асимптотических свойствах решений одного класса механических систем с бесконечным числом степеней свободы // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1990. № 4. С. 85–89.
9. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
10. *Персидский К.П.* Избранные труды. Т. 2. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения в нелинейных пространствах. Алма-Ата: Наука, 1976. 247 с.
11. *Шафиева Д.Р.* К исследованию критических случаев счетных систем дифференциальных уравнений // Тр. Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы. 1988. Т. 27. № 5. С. 107–118.
12. *Каменков Г.В.* Ибранные труды. Т. 2. Устойчивость и колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1972. 214 с.
13. *Хазин Л.Г., Шноль Э.Э.* Устойчивость критических положений равновесия. Пущино: Науч. центр биологич. исслед. АН СССР, 1985. 215 с.
14. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 231 с.
15. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.IV.1992