ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. ТОМ 57, ВЫП. 2, 1993

УДК 531.36 : 534.2

© 1993 г. А.В. Пироженко

К РАСЧЕТУ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ СИСТЕМ С СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫМИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ ЗВЕНЬЯМИ

Рассматривается механическая система с существенно нелинейными колебательными звеньями. Предполагается, что колебательное звено имеет одну степень свободы, а уравнения, описывающие его движение, близки к гамильтоновым. Разработана методика вывода уравнений возмущенного движения колебательного звена, позволяющая методом усреднения исследовать взаимовлияния существенно нелинейных колебаний звеньев и движения системы как целого. Рассмотрено применение методики к исследованию динамики связки двух материальных точек в режиме движения с существенно нелинейными продольными колебаниями.

Метод усреднения позволяет эффективно исследовать основные закономерности динамики систем со слабыми нелинейными взаимодействиями. Вместе с тем его применение предполагает специальную форму записи уравнений возмущенного движения, при которой переменные, описывающие движение, разделены на быстро и медленно меняющиеся. Задача вывода уравнений возмущенного движения, включающая в себя задачу выбора переменных, описывающих движение, является собственно задачей теоретической механики и ее решение в большой степени определяет успех или неуспех исследований.

Введение переменных "действие – угол" формально полностью решает задачу вывода уравнений возмущенного движения систем, уравнения движения которых близки к интегрируемым гамильтоновым системам. Однако практическое использование этих переменных не получило широкого применения, поскольку сопряжено с решением ряда достаточно сложных задач, а представление обобщенных координат и скоростей через переменные "действие – угол" фактически связано с использованием бесконечных рядов Фурье.

Для систем, близких к консервативным системам с одной степенью свободы, была изложена [1] методика построения первого и высших приближений, не требующая решения уравнений невозмущенного движения в явном виде. Отсутствие в этой методике явной формы уравнений возмущенного движения приводит для ряда задач к чрезмерно громоздким преобразованиям и вычислениям, а также затрудняет выбор удобных для конкретной задачи переменных, описывающих движение. Сложности, связанные с интегрированием неявно заданных функций, в этой методике преодолеваются при помощи осреднения вдоль порождающего решения. Однако во многих случаях эта операция не может быть выполнена в аналитическом виде и, следовательно, ее требуется проводить на каждом шаге интегрирования. Предлагаемая ниже методика позволяет во многих случаях упростить процесс построения уравнений первого приближения для названных систем, а также существенно расширит круг исследуемых систем.

1. Постановка задачи. Движение колебательного звена описывается уравнениями

$$\ddot{g} = -T(\mathbf{x}, g) + \varepsilon F(\mathbf{x}, \mathbf{y}, g, \dot{g}) \tag{1.1}$$

где g – обобщенная координата колебательного звена, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ – соответственно векторы медленных и быстрых переменных, описывающих движение других частей системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, g, \dot{g})$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \varepsilon\mathbf{Y}(\mathbf{x},\mathbf{y},g,\dot{g}) \tag{1.2}$$

ε – малый параметр.

В невозмущенном движении ($\varepsilon = 0$) движение колебательного звена имеет постоянные параметры и не зависит от движения системы. В возмущенном движении ($\varepsilon \neq 0$) между движениями колебательного звена и других частей системы имеется слабая нелинейная связь.

Движение колебательного звена близко к движению консервативной системы с одной степенью свободы. Поэтому в невозмущенном движении решение уравнений (1.1) сводится к квадратурам. В частных случаях, когда эти квадратуры разрешимы в явном виде и возможно построение общего решения движения колебательного звена, не содержащего неявно заданных функций, схема вывода уравнений возмущенного движения достаточно проста [2]. В статье рассматриваются случаи, когда построить общее решение движения колебательного звена, не содержащее неявно заданных функций, не представляется возможным.

2. Основные закономерности невозмущенного движения колебательного звена. В невозмущенном движении $\varepsilon = 0$, $\mathbf{x} = \text{const}$, и уравнение (1.1) имеет первый интеграл

$$h = \frac{1}{2}\dot{g}^2 + \Pi(\mathbf{x},g), \quad \Pi(\mathbf{x},g) = \int T(\mathbf{x},g)dg \tag{2.1}$$

где h – постоянная. Решение дается квадратурой

$$t - t_0 = \int \frac{dg}{\sqrt{f(\mathbf{x},g)}}, \quad f(\mathbf{x},g) = 2h - 2\Pi(\mathbf{x},g) \tag{2.2}$$

В большинстве случаев представить g как явную функцию от t не представляется возможным. Известно [3], что для систем с одной степенью свободы в силовом поле возможны два типа движений: либрационное и предельное. Как отвечающее физическим представлениям о поведении упругой системы рассматривается лишь либрационное движение, т.е. такое движение, в котором g изменяется периодическим образом между крайними значениями g_1, g_2 ($g_1 < g_2$), являющимися простыми корнями уравнения $f(\mathbf{x}, g) = 0$. Тогда изменение g может быть представлено в виде

$$g = a - b\Phi(w(t)), \quad a = (g_1 + g_2)/2, \quad b = (g_2 - g_1)/2$$

где a, b – соответственно среднее и амплитуда колебаний, $\Phi(w)$ – периодическая по w функция, изменяющаяся на отрезке $[-1, 1]$, w – фаза колебаний, монотонно возрастающая во времени функция. Функции Φ и w связаны уравнением

$$b^2(d\Phi/dw)^2(dw/dt)^2 = 2h - 2\Pi \tag{2.3}$$

Обычно [3, 4] используют два способа определения функций Φ и w. В первом способе определяют $\Phi_1(w_1) = \cos(w_1)$, тогда

$$\dot{w}_1 = \theta_1(g) = \left(\frac{f(\mathbf{x},g)}{(g-g_1)(g_2-g)}\right)^{1/2} = \left(\frac{2h-2\Pi}{b^2\sin^2 w_1}\right)^{1/2} \tag{2.4}$$
$$g = a - b\cos w_1$$

Во втором способе определяют $w_2 = (2\pi/\omega_{11})(t - t_0)$, где

$$\omega_{11} = 2\int_{g_1}^{g_2} \frac{dg}{\sqrt{f(x,g)}} = 2\int_0^{\pi} \frac{dw_1}{Q_1(g)} \tag{2.5}$$

– период колебаний. Тогда

$$\frac{d\Phi_2}{dw_2}=\pm\frac{\omega_{11}}{2\pi b}\sqrt{f(\mathbf{x},g)}, \quad g=a-b\Phi_2(w_2) \tag{2.6}$$

где знак плюс соответствует убыванию g, минус – возрастанию g, и функция $\Phi_2(w_2)$ представима в виде ряда Фурье

$$\Phi_2(w_2)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\cos nw_2, \quad \sum_{n=0}^{\infty}B_n=1$$

Поскольку амплитуда колебаний b, среднее значение a и постоянная энергии h связаны соотношением

$$h=\Pi(\mathbf{x},a+b)=\Pi(\mathbf{x},a-b) \tag{2.7}$$

то в общем виде колебания звена можно описать формулами

$$g=g(\mathbf{x},h,w), \quad g(\mathbf{x},h,w+\pi_0)=g(\mathbf{x},h,w) \tag{2.8}$$

$$\dot g=(\partial g/\partial w)\dot w, \quad \dot w=Q(\mathbf{x},h,g)=[f(\mathbf{x},g)(\partial g/\partial w)^{-2}]^{1/2}$$

где π_0 – период колебаний g по w.

3. Уравнения возмущенного движения. Вывод уравнений возмущенного движения основан на расширенном принципе метода вариации произвольных постоянных: фиксировании удобной для исследований формы представления движения и вариации параметров этой формы. Поскольку колебания звена характеризуются амплитудой колебаний и фазой и в общем случае описываются формулами (2.8), то рассмотрим в качестве новых переменных h и w, а соотношения (2.8) будем рассматривать как формулы замены переменных. Дифференцируя по времени (2.1) в силу (1.1), получим

$$\dot h=Q(\partial g/\partial w)\varepsilon F+(\partial\Pi/\partial\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} \tag{3.1}$$

Второе равенство в (2.8) даст

$$\dot w=Q-(\dot h\partial g/\partial h+\dot{\mathbf{x}}\partial g/\partial\mathbf{x})(\partial g/\partial w)^{-1} \tag{3.2}$$

Следовательно, в общем случае система уравнений возмущенного движения колебательного звена дается уравнениями (3.1), (3.2).

Из вывода уравнений видно, что вместо h может быть выбрана любая другая постоянная невозмущенного движения, характеризующая амплитуду колебаний звена. В частности, это может быть некоторая функция от g_1, g_2. Связь между g_1, g_2, h и $\mathbf{x}$ дается соотношением (2.7). Следовательно,

$$\dot g_i=\left[\varepsilon F\theta\frac{\partial g}{\partial w}+\dot{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial\Pi(\mathbf{x},g)}{\partial\mathbf{x}}-\frac{\partial\Pi(\mathbf{x},g_i)}{\partial\mathbf{x}}\right)\right]\left(\frac{\partial\Pi(\mathbf{x},g_i)}{\partial g_i}\right)^{-1} \tag{3.3}$$

При представлении $g=a-b\cos w_1$, где w_1 в невозмущенном движении определяется уравнением (2.4), уравнения колебаний звена запишем в виде

$$\dot b=\left\{\varepsilon Q_1 bF\sin w_1+\dot{\mathbf{x}}\left[\frac{\partial\Pi(\mathbf{x},g)}{\partial\mathbf{x}}-\frac{\partial\Pi(\mathbf{x},g_2)}{\partial\mathbf{x}}-\frac{\partial a}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial\Pi(\mathbf{x},g_2)}{\partial g_2}\right]\right\}\left\{\frac{\partial\Pi(\mathbf{x},g_2)}{\partial g_2}\left(1+\frac{\partial a}{\partial b}\right)\right\}^{-1} \tag{3.4}$$

$$\dot w_1=Q_1+\left(\dot b\cos w_1-\frac{\partial a}{\partial\mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}-\frac{\partial a}{\partial b}\dot b\right)(b\sin w_1)^{-1}$$

Эта форма уравнений колебательного звена удобна тем, что колебания звена описываются тригонометрическими функциями. Вместе с тем зависимость в общем случае Q_1 от w_1 ограничивает эффективное применение операторов усреднения фактически случаем одной быстрой переменной в движении системы – w_1.

При представлении $r = a - b\Phi_2(w_2)$, где $w_2 = (2\pi/\omega_{11})(t-t_0)$, w_{11} – период колебаний звена в невозмущенном движении), уравнения колебаний звена отличаются от (3.4) тем, что первое слагаемое в фигурных скобках заменяется на $2\pi\omega_{11}^{-1}\varepsilon bF\partial\Phi_2/\partial w_2$, а второе уравнение заменяется на

$$\dot{w}_2 = \frac{2\pi}{\omega_{11}}(t-t_0) - \left(\dot{b}\Phi_2(w_2) - \frac{\partial a}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial a}{\partial b}\dot{b}\right)\left(b\frac{\partial\Phi_2(w_2)}{\partial w_2}\right)^{-1}$$

где Φ_2 и ω_{11} не изменяются в возмущенном движении, Φ_2, ω_{11} и $\partial\Phi_2/\partial w_2$ определяются согласно (2.5), (2.6) для начальных значений параметров $\mathbf{x}$, h.

Эта форма уравнений удобна тем, что фаза колебаний в нулевом приближении – линейная функция времени, что позволяет применять наиболее полно разработанные и наиболее простые алгоритмы усреднения для автономных вращательных систем [5], т.е. применять осреднение по угловым переменным. Фиксированные функции $\Phi_2(w_2)$ и $\partial\Phi_2(w_2)/\partial w_2$ – периодичны и могут численно рассчитываться практически с произвольной точностью.

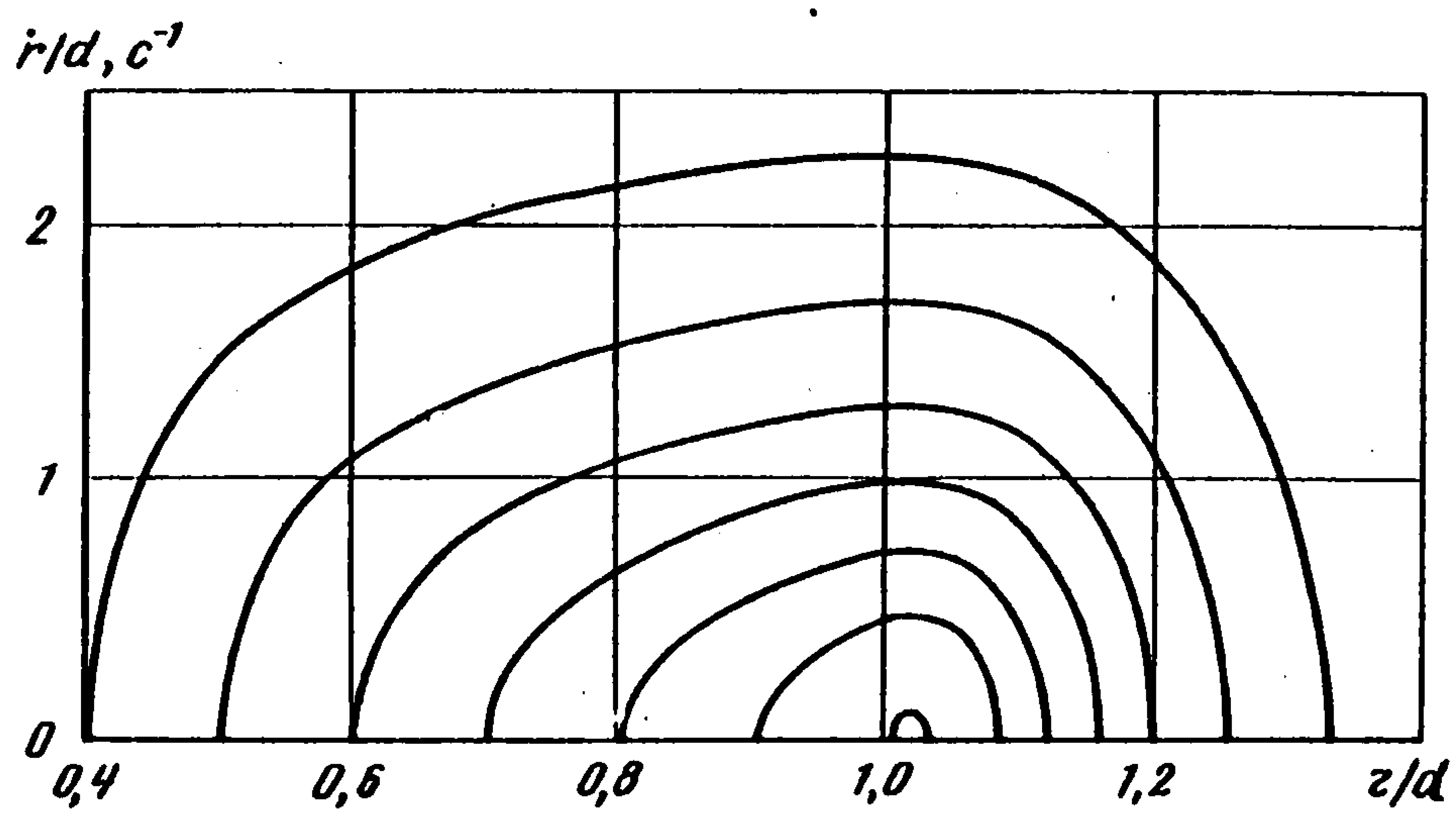
Использование предложенной методики позволило провести краткий вывод уравнений возмущенного кеплерова движения [6].

4. Пример. Рассмотрим движение в ньютоновском поле сил системы двух материальных точек, соединенных невесомой нитью, упругие свойства которой описываются законом Гука. Предполагается, что траектория центра масс является невозмущенной кеплеровой орбитой. Уравнения движения системы (связки) относительно центра масс могут быть приведены к виду [7]:

$$\begin{aligned}
&\dot{\psi} = \frac{rF_3\sin\varphi}{L\sin\theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{rF_3\cos\varphi}{L}, \quad \dot{L} = rF_2, \quad \dot{\varphi} = \frac{L}{r^2} - \dot{\psi}\cos\theta \\
&\ddot{r} - \frac{L^2}{r^3} + \delta c_m(r-d) = F_1, \quad \delta = \begin{cases} 0, & r < d \\ 1, & r \geqslant d \end{cases} \\
&F_1 = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad F_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}, \quad F_3 = \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial U}{\partial\theta} \qquad (4.1) \\
&U = \frac{1}{2}\frac{\mu}{R^2}r^2(3\cos^2\gamma - 1), \quad c_m = c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \\
&L = |\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}|, \quad \mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1
\end{aligned}$$

Здесь φ, ψ, θ – эйлеровы углы, описывающие ориентацию связки в невращающейся "перигейной" системе координат, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_1$ – радиус-векторы материальных точек относительно ньютоновского притягивающего центра, c – жесткость нити, m_1, m_2 – массы материальных точек, F_1, F_2, F_3 – проекции ускорения ньютоновского поля сил на оси подвижной системы координат, R – расстояние от центра масс связки до притягивающего центра, μ – гравитационная постоянная, γ – угол между вектором $\mathbf{r}$ и местной вертикалью.

Рассмотренная методика использовалась [7] для исследования быстрых вращений связки в случаях продольных колебаний с малой амплитудой и в режиме движения без схода со связи, т.е. в случае квазилинейных колебаний. Здесь рассмотрим быстрые вращения связки в режимах движения с большой амплитудой продольных колебаний и с возможным сходом со связи. Фазовый портрет невозмущенных продольных колебаний приведен на фигуре при $c_m = 50$ с$^{-2}$, $L/d^2 = 1$ с$^{-1}$ (нижняя часть фазового портрета симметрична верхней). Видно, что



линейный характер колебаний имеет место лишь при малой амплитуде, а при больших амплитудах характер колебаний существенно нелинеен, т.е. период колебаний и сам вид колебаний зависит от амплитуды.

В качестве независимой переменной рассмотрим угловую величину φ^0, изменение которой во времени соответствует изменению угла чистого вращения $\dot\varphi^0 = L/r^2$. Тогда продольные колебания в невозмущенном движении описываются уравнениями Бине [3]

$$L^2u^2(d^2u/d\varphi^{02} + u) = \delta c_m(1/u - d) \quad (u = 1/r)$$

а интеграл энергии примет вид

$$h = \frac{L^2}{2}\left(\left(\frac{du}{d\varphi^0}\right)^2 + u^2\right) + \Pi_1\left(\frac{1}{u}\right), \quad \Pi_1 = \int \delta c_m(r-d)dr$$

Используя представление (ω_{12} – период продольных колебаний во "времени" φ^0)

$$u = a_u - b_u\Phi_3(w_3), \quad w_3 = 2\pi/\omega_{12}\cdot(\varphi^0 - \varphi_0^0)$$

$$\omega_{12} = 2L\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2\sqrt{f(L,r)}}$$

получим уравнения возмущенного движения связки в виде:

$$\frac{d\psi}{d\varphi^0} = \frac{F_3\sin\varphi}{u^3L^2\sin\theta}, \quad \frac{d\theta}{d\varphi^0} = \frac{F_3\cos\varphi}{u^3L^2}$$

$$\frac{dL}{d\varphi^0} = \frac{F_2}{u^3L}, \quad \frac{d\alpha}{d\varphi^0} = -\frac{d\psi}{d\varphi^0}\cos\theta$$

$$\frac{db_u}{d\varphi^0} = \left\{\frac{1}{u^2}\frac{2\pi}{\omega_{12}}F_1b_u\frac{\partial\Phi_3}{\partial w_3} - \frac{dL}{d\varphi^0}\left[L(u_2^2 - u^2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial a_u}{\partial L}\frac{\partial V(u_2)}{\partial u_2}\right]\right\}\left\{\frac{\partial V(u_2)}{\partial u_2}\left(1 + \frac{\partial a_u}{\partial b_u}\right)\right\}^{-1} \tag{4.2}$$

$$\frac{dw_3}{d\varphi^0} = \frac{2\pi}{\omega_{12}} - \left[\frac{\partial b_u}{\partial\varphi^0}\left(\Phi_3(w_3) - \frac{\partial a_u}{\partial b_u}\right) - \frac{\partial a_u}{\partial L}\frac{dL}{d\varphi^0}\right]\left(b_u\frac{\partial\Phi_3}{\partial w_3}\right)^{-1}$$

$$\left(\varphi = \varphi^0 + \alpha, \quad V(u) = \Pi_1 + \frac{1}{2}L^2u^2\right)$$

Для нерезонансных режимов движения (ω_{12} и 2π рационально несоизмеримы) уравнения первого приближения, полученные осреднением уравнений (4.2) по φ^0 и w_3, имеют вид

$$\frac{d\theta}{d\varphi^0}=N_1\sin\theta\cos(\nu-\psi)\sin(\nu-\psi),\quad \frac{d\psi}{d\varphi^0}=N_1\cos\theta\sin^2(\nu-\psi)$$

$$\frac{d\alpha}{d\varphi^0}=-N_1\cos^2\theta\sin^2(\nu-\psi),\quad \frac{dL}{d\varphi^0}=0,\quad \frac{db_u}{d\varphi^0}=0 \tag{4.3}$$

$$\left(N_1=-\frac{3}{2}\frac{\mu}{p^3}\frac{r_*^4}{L^2}(1+e\cos\nu)^3,\quad r_*^4=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dw_3}{(a_u-b_u\Phi_3(w_3))^4}\right)$$

Здесь ν – истинная аномалия, e – эксцентриситет, p – фокальный параметр орибты центра масс и принято, что в начальный момент времени $\varphi=\varphi^0$, т.е. $\alpha_0=0$. Изменение ν не зависит от относительного движения и определяется уравнением

$$d\nu/dt=(\mu/p^3)^{1/2}(1+e\cos\nu)^2 \tag{4.4}$$

а связь между t и φ^0 (ν и φ^0,) такая же, что и в невозмущенном движении

$$d\varphi^0/dt=Lu^2 \tag{4.5}$$

Сохраняя порядок приближения по малой величине $\varepsilon=\frac{\mu}{p^3}\frac{r_*^4}{L^2}\ll 1$, из уравнений (4.3)–(4.5) получим:

$$\frac{d\theta}{d\nu}=N_0(1+e\cos\nu)\sin\theta\cos(\nu-\psi)\sin(\nu-\psi)$$

$$\frac{d\psi}{d\nu}=N_0(1+e\cos\nu)\sin^2(\nu-\psi)\cos\theta \tag{4.6}$$

$$\frac{d\alpha}{d\nu}=-N_0(1+e\cos\nu)\cos^2\theta\sin^2(\nu-\psi)$$

$$N_0=-\frac{3}{2}\left(\frac{\mu}{p^3}\right)^{1/2}\frac{r_*^4}{r^{*2}}\frac{1}{L},\quad r^{*2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dw_3}{(a_u-b_u\Phi_3(w_3))^2}$$

Из уравнений (4.6) следует, что эволюцию ориентации кинетического момента связки в первом приближении можно рассчитывать как эволюцию кинетического момента гантели с длиной штанги, равной $(r_*^4/r^{*2})^{1/2}$.

Уравнения, описывающие основные эволюционные эффекты движения связки определим, осредняя (4.6) по ν

$$\frac{d\theta}{d\nu}=0,\quad \frac{d\psi}{d\nu}=\frac{1}{2}N_0\cos\theta,\quad \alpha=(\psi-\psi_0)\cos\theta \tag{4.7}$$

Из уравнений (4.6), (4.7) можно сделать вывод, что величина амплитуды продольных колебаний как при движении без схода со связи, так и со сходом со связи, не меняет качественного характера эволюции параметров движения связки, а определяет лишь скорость прецессии кинетического момента в вековом движении и амплитуды отклонений в его движении от равномерной прецессии.

Отметим, что использование формы (3.4) уравнений возмущенного движения и осреднение по переменным w_1 и φ в случае существенно нелинейных колебаний приводит к неверным результатам.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
2. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
3. *Парс Л.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 635 с.
4. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
5. *Гребеников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986. 255 с.
6. *Пироженко А.В.* Уравнения возмущенного движения материальной точки на упругой связи. // Прикл. механика. 1990. Т. 26. № 5. С. 126–129.
7. *Алпатов А.П., Белоножко П.А., Пироженко А.В., Шабохин В.А.* Об эволюции ротационного движения связки двух тел на орбите. // Космич. исследования. 1990. Т. 28. Вып. 5. С. 692–701.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
20.III.1992