

УДК 531.36:534.1

© 1993 г. А.П. Иванов

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ

Предлагается новый подход к исследованию виброударных систем, основанный на непрерывном представлении движений с ударами во вспомогательном фазовом пространстве. При описании движения в лагранжевых координатах фазовые траектории терпят в моменты ударов разрывы. Непосредственное исследование таких кривых затруднено вследствие разрушения привычных топологических понятий: окрестность, связность и т.п. Традиционный подход состоит в построении точечного отображения на уровне ограничителя [1]. Однако при таком выборе сечения отображение Пуанкаре не является всюду непрерывным, к тому же невозможность на практике получить явный вид отображения создает дополнительные трудности для исследования [2, 3].

Преодоление указанных недостатков позволяет применять известные качественные методы: теорию Пуанкаре–Бендиксона, второй метод Ляпунова и др. Получен ряд общих результатов о характере положений равновесия и периодических движений с ударами.

1. Метод непрерывного представления. Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы и односторонней связью

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}), \quad x \geq 0 \quad (1.1)$$

где функция f непрерывно дифференцируема и, либо не зависит от t , либо имеет по t период, равный T . При $x = 0$ движение доопределяется следующим образом:

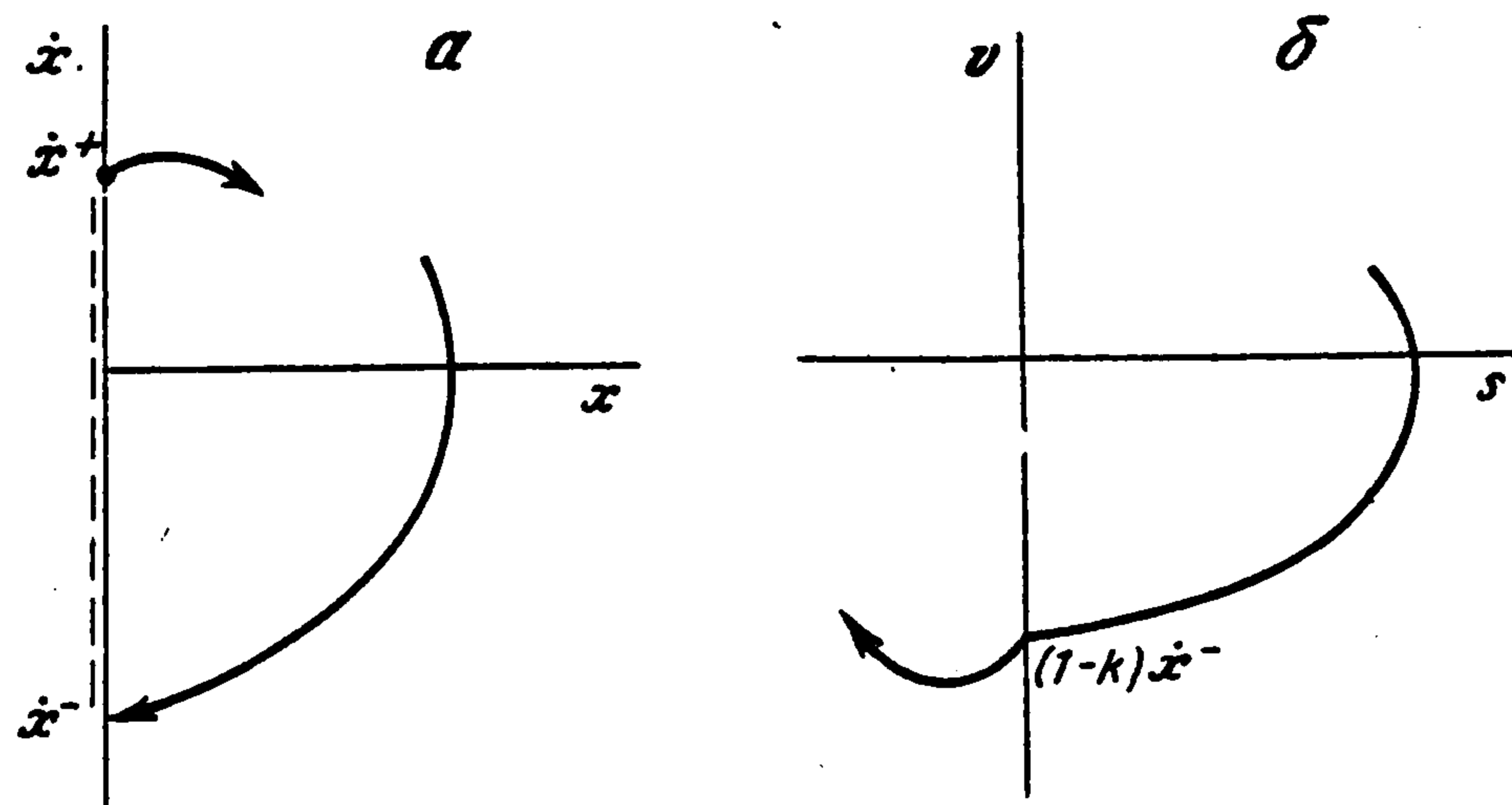
$$\ddot{x} = \max\{0, f\} \quad \text{при } \dot{x} = 0; \quad \dot{x}^+ = -k\dot{x}^- \quad \text{при } \dot{x} < 0 \quad (1.2)$$

где индексы плюс и минус означают до- и послеударные значения скорости, k – ньютоновский коэффициент восстановления, $k \in (0, 1)$. Фазовые траектории системы (1.1) терпят в соответствии с (1.2) разрывы на полупрямой $x = 0$, $\dot{x} < 0$ (фиг. 1, а).

Поставим задачу об определении новых фазовых переменных s, v , непрерывно зависящих от времени. Положим

$$x = |s|, \quad \dot{x} = F(s, v)$$

а разрывную функцию F подберем так, чтобы при пересечении фазовой кривой в плоскости (s, v) с осью $s = 0$ граничные условия удара для переменной x выполнялись автоматически. Если ограничиться случаем, когда величины s и v имеют одинаковый знак, то указанное пересечение возможно при переходе траектории из четвертой четверти плоскости (s, v) в третью (фиг. 1, б) или из второй в первую; при этом произведение $s v$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, второе условие (1.2)



Фиг. 1

удовлетворится, если выполнены равенства

$$F(+0, v) = -\kappa F(-0, v) \quad \text{при } v > 0$$

$$F(-0, v) = -\kappa F(+0, v) \quad \text{при } v < 0$$

Простейшая замена, удовлетворяющая данным требованиям, такова

$$x = |s|, \quad \dot{x} = Rv \operatorname{sign} s, \quad R = 1 - \kappa \operatorname{sign}(sv), \quad \kappa = \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \quad (1.3)$$

Изменение новых переменных s, v в силу (1.3), (1.1) описывается уравнениями

$$\dot{s} = Rv, \quad \dot{v} = R^{-1} \operatorname{sign} s f(t, |s|, Rv \operatorname{sign} s) \quad (1.4)$$

правые части которых терпят разрыв при $s = 0$ или $v = 0$. В настоящее время теория систем с разрывной правой частью достаточно развита (см. [4]). Основное достоинство системы (1.4) по сравнению с исходной системой (1.1) состоит в непрерывности фазовых траекторий на плоскости (s, v) (см. фиг. 1, б). В случае абсолютно упругих ударов $\kappa = 1, \kappa = 0$ и формулы (1.3) принимают вид замены, предложенной в [5].

Уравнения (1.4) не изменятся, если одновременно изменить знак у переменных s и v . Движение изображающей точки на плоскости (s, v) однозначно определено, если $s^2 + v^2 \neq 0$, а в начале координат единственность нарушается, если:

$$s = s_1(t), \quad v = v_1(t), \quad s_1(t_0) = v_1(t_0) = 0 \quad (1.5)$$

– некоторое решение системы (1.4), то функции

$$s = -s_1(t), \quad v = -v_1(t) \quad (1.6)$$

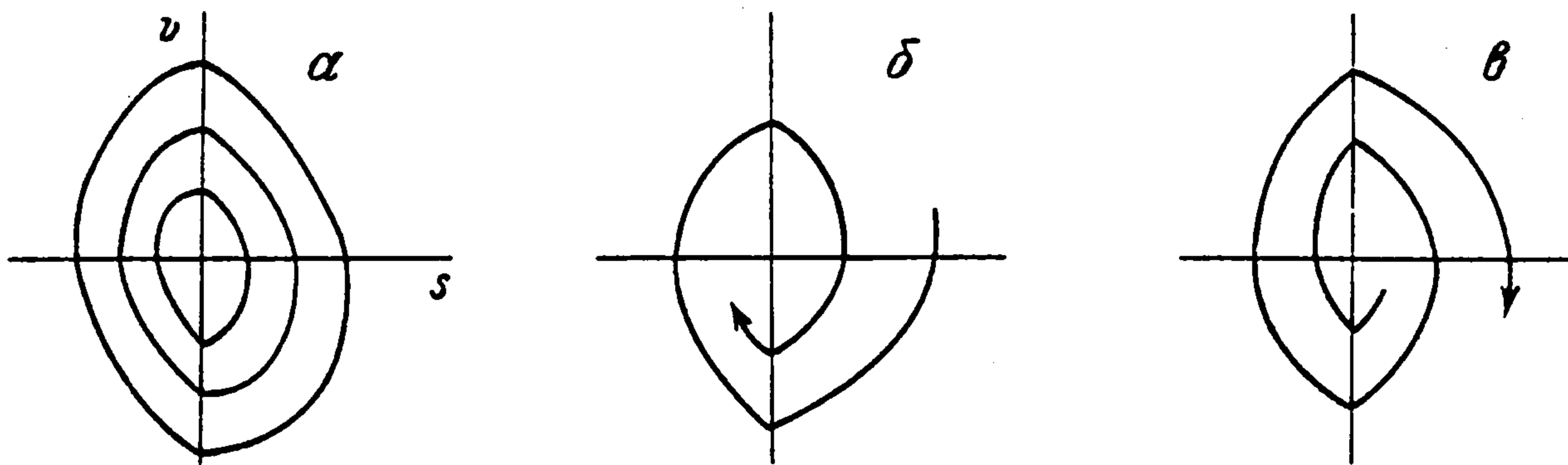
описывают другое ее решение. Обоим решениям (1.5) и (1.6) соответствует в силу замены (1.3) одна и та же траектория в плоскости (x, \dot{x}) .

Доопределение правых частей системы (1.4) на линиях разрыва вне начала координат не влияет на ее решения, а при $s = v = 0$ вследствие первого равенства (1.2) соответствие (1.3) сохранится, если положить

$$\dot{s} = 0, \quad \dot{v} = (1 - \kappa)^{-1} \max\{0, f(t, 0, 0)\} \quad (1.7)$$

Тогда в случае $f \leq 0$ изображающая точка остается в начале координат (так называемое скользящее движение), а при $f > 0$ покидает его по одной из кривых (1.5) или (1.6).

Заметим, что недифференцируемость решений системы (1.4) при $v = 0$ обусловлена выбором замены (1.3). За счет использования функции $F(s, v)$ более сложного вида



Фиг. 2

можно построить вспомогательную систему с разрывами правых частей лишь на прямой $s = 0$. Для этого можно положить

$$F(s, v) = \left(1 - \frac{2k}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{v}{s} \right) v \operatorname{sign} s \quad (1.8)$$

Пример. Рассмотрим линейный осциллятор с ударами об ограничитель

$$x'' + 2bx' + a^2(x - x_0) = 0, \quad x \geq 0 \quad (1.9)$$

где $a^2 > b^2$, величина x_0 описывает установку системы: ее положительные значения соответствуют зазору, отрицательные – натягу. Допустим, что $x_0 = 0$. В результате замены (1.3) получим систему

$$s' = Rv, \quad v' = -2bv - a^2 R^{-1}s$$

общее решение которой в каждой из четвертей плоскости (s, v) имеет вид

$$s = e^{-bt} (C_1^{(j)} \cos \delta t + C_2^{(j)} \sin \delta t), \quad v = R^{-1}s', \quad \delta^2 = a^2 - b^2$$

Постоянные $C_{1,2}^{(j)}$ изменяются при каждом пересечении фазовой траектории с осями координат так, что эта траектория остается непрерывной. Для начальных условий $s = 0$, $v = v_0 > 0$ при $t = 0$ имеем в I и IV четвертях $C_1^{(0)} = 0$, $C_2^{(0)} = (1 - k) \delta^{-1} v_0$. При $t = \pi/\delta$ траектория переходит в третью четверть, и для сохранения ее непрерывности надо положить

$$C_1^{(1)} = 0, \quad C_2^{(1)} = \sigma C_2^{(0)}, \quad \sigma = k \exp(-\pi b / \delta)$$

Далее при $t \in (2\pi/\delta, 3\pi/\delta)$ имеем $C_1^{(2)} = 0$, $C_2^{(2)} = \sigma^2 C_2^{(0)}$ и т.д.

Общий вид фазового портрета зависит от величины σ . Если $\sigma = 1$, то все фазовые траектории на плоскости (s, v) замкнуты (фиг. 2, а), в случае $\sigma < 1$ они асимптотически приближаются к началу при $t \rightarrow +\infty$ (фиг. 2, б), а при $\sigma > 1$ – асимптотически приближаются к началу при $t \rightarrow -\infty$ (фиг. 2, в).

2. Классификация особых точек. Изучим особые точки системы (1.1) в автономном случае, т.е. при отсутствии явной зависимости правой части от времени. Такими точками являются корни уравнения $f(x^*, 0) = 0$, если $x^* > 0$, а также начало координат. В первом случае наличие одностороннего ограничителя не влияет на движение в малой окрестности особой точки, так что ее характер можно исследовать обычными методами.

Для анализа окрестности точки $(0, 0)$ воспользуемся представлением (1.4). Здесь можно использовать общую классификацию, приведенную в [4]. Однако специальный вид системы (1.4) позволяет получить более полные результаты.

Будем считать, следуя [4], особую точку системы (1.1) грубой, если для любой достаточно близкой к f в метрике C_1 функции $g(x, x')$ система

$$\ddot{x} = g(x, x'), \quad x \geq 0 \quad (2.1)$$

имеет особую точку того же топологического типа.

Теорема 1. Существует ровно два типа грубых особых точек в начале координат системы (1.1):

1) если $f_0 = f(0, 0) > 0$, то за конечное время все фазовые траектории из некоторой окрестности начала координат покидают эту окрестность (так называемое квазиседло [6]);

2) если $f_0 < 0$, то за конечное время все траектории из некоторой окрестности начала координат попадают в особую точку ("квазифокус", или "сшитый фокус" [6]).

Особые точки, соответствующие значению $f_0 = 0$, не сохраняют свой топологический тип при сколь угодно малых в метрике $C_r, r \geq 1$, изменениях функции f .

Доказательство. 1°. Так как $f_0 > 0$, то в некоторой окрестности начала координат U_0 выполнено неравенство

$$f(x, x') \geq m > 0$$

Если расстояние между функциями f и g в метрике $C_1(U_0)$ не превосходит $m/2$, то при $(x, x') \in U_0$ будем иметь

$$g(x, x') \geq m/2 > 0$$

Пусть при $t = t_0$ точка (x_0, x'_0) принадлежит U_0 . Тогда для каждой из систем (1.1) и (2.1) в точках U_0 выполнены неравенства

$$\ddot{x} \geq m/2, \quad \dot{x}' \geq x'_0 + m(t - t_0)/2$$

и, следовательно, за время

$$\Delta t \leq \max_{U_0} |x'_0| \frac{4}{m}$$

траектории обеих систем покидают окрестность U_0 .

2°. Если $f_0 < 0$, то в некоторой окрестности U_0

$$0 < m \leq -f(x, x') \leq M^2(1 - k^2)/2 \quad (2.2)$$

где m, M – некоторые постоянные. Рассмотрим функцию

$$G(s, v) = \rho^3 + \alpha s v, \quad \rho^2 = \frac{(k^2 - 1)}{2f_0} v^2 + |s| \quad (2.3)$$

$$\alpha = M^{-1} \min\{\frac{1}{2}, 3k/(3+k)\}$$

В области U_0 в силу (2.2) получаем

$$|s| \leq \rho^2, \quad |v| \leq M\rho$$

Функция G положительно определена, $\frac{1}{2}\rho^3 \leq G \leq \frac{3}{2}\rho^3$, а ее производная по времени в силу уравнений (1.4) имеет вид

$$dG/dt = \frac{3}{2}\rho(\rho^2)' + \alpha v^2 R + \alpha R^{-1}[\rho^2 + (1 - k^2)v^2/(2f_0)]f$$

$$(\rho^2)' = -2k|\nu| + |\nu|[k + \text{sign}(s\nu)](1 - f/f_0)$$

При сделанных предположениях

$$\begin{aligned} -dG/dt &= 3k\rho|\nu| - \frac{1}{2}\alpha\nu^2[3 - k\text{sign}(s\nu)] - \alpha R^{-1}\rho^2 f + \\ &+ \frac{1}{2}(1 - f/f_0)[3\rho|\nu|(k + \text{sign}(s\nu)) + \alpha(k^2 - 1)\nu^2 R^{-1}] \geq \\ &\geq \alpha m\rho^2 / (1 + k) + o(\rho^2) = O(G^{2/3}) \end{aligned}$$

поскольку для дифференцируемой функции $f - f_0 = O(\rho)$.

Так как несобственный интеграл

$$J_0 = \int_0^{G_0} G^{-2/3} dG = 3G_0^{1/3}$$

сходится, приходим к выводу об обращении функции G в нуль за время порядка ρ . При этом изображающая точка попадает в начало координат и система уравнивается вследствие условия (1.7). Данный случай для системы (1.1) соответствует квази-пластическому удару [7]. Фазовый портрет имеет такой же вид, как на фиг. 2, б, но в отличие от примера разд. 1, сходимость к началу происходит за конечное время.

3°. Если $f_0 = 0$, то тип особой точки определяется значениями частных производных функции f в начале координат. Система (1.4) принимает вид

$$s' = R\nu, \quad \nu' = R^{-1}f_1^\circ s + f_2^\circ \nu + \Phi(|s|, R\nu \text{sign} s) R^{-1} \cdot \text{sign} s \quad (2.4)$$

$$f_1^\circ = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad f_2^\circ = \frac{\partial f}{\partial x'}(0,0)$$

$$\Phi \in C_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x'} = 0 \quad \text{при} \quad x = x' = 0$$

Линейная система, получающаяся из (2.4) при $\Phi = 0$, имеет в начале координат особенность одного из известных типов: седло, узел, фокус или центр (два последних типа обсуждены в примере разд. 1).

Для близкой к f в метрике C_r функции g величина g° необязательно равна нулю. Допустим, что $g^\circ > 0$. Тогда для системы (2.1) начало координат является "квази-седлом"; кроме того, она может иметь и другие особые точки вблизи данной: для таких точек

$$\nu = 0, \quad g_1^\circ s + g^\circ \text{sign} s + o(s) = 0, \quad g_1^\circ = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) \quad (2.5)$$

Если $g_1^\circ > 0$, то второе из уравнений (2.5) не имеет корней, а в случае $g_1^\circ < 0$

имеется два корня

$$s_{1,2} = \pm g^\circ / g_1^\circ + o(g^\circ)$$

Аналогично рассматривается возможность $g^\circ < 0$.

Таким образом, при сколь угодно малых изменениях правой части системы (2.1) в обсуждаемом случае может измениться как число особых точек, так и их тип.

Пример. Для осциллятора (1.9) начало координат соответствует соприкосновению ударника с ограничителем. В случае $x_0 < 0$ эта точка будет квазифокусом, а при $x_0 > 0$ — квазиседлом. При выполнении условий $b < 0$, $\sigma < 1$ точка является устойчивым фокусом, если $x_0 = 0$, а при изменении величины x_0 имеет место бифуркация, в результате которой

рождается квазиседло, пара неустойчивых фокусов и устойчивый предельный цикл (фиг. 3, см. также [8]). Пересечения замкнутой траектории с осью v соответствуют периодическим соударениям виброударника.

3. Устойчивость положений равновесия. Был получен [9] ряд результатов по устойчивости положения равновесия системы двух уравнений с разрывными правыми частями. Изучим вопрос об устойчивости нулевого положения равновесия системы (1.1) в зависимости от значения функции f и ее производных в этой точке.

В случае $f_0 > 0$ начало координат не является положением равновесия, а в случае $f_0 < 0$ по теореме (1) оно будет асимптотически устойчиво. Если $f_0 = 0$, то вопрос об устойчивости сводится к рассмотрению системы (2.4).

Теорема 2. В каждом из следующих случаев:

- 1) $f_1^\circ > 0$
- 2) $f_1^\circ < 0$, $D = (f_2^\circ)^2 + 4f_1^\circ > 0$, $f_2^\circ > 0$
- 3) $f_1^\circ < 0$, $D < 0$, $\sigma = \text{кехр}(\pi f_2^\circ / \sqrt{-D}) > 1$;

нулевое положение равновесия системы (2.4) неустойчиво для любой нелинейной части Φ , а в случаях

- 4) $f_1^\circ < 0$, $D > 0$, $f_2^\circ < 0$
- 5) $f_1^\circ < 0$, $D < 0$, $\sigma < 1$

асимптотически устойчиво для любой нелинейной части Φ .

В остальных случаях решение вопроса об устойчивости зависит от Φ .

Доказательство. Для анализа случаев 1, 2 и 4 (седло, узел) заметим, что при $\Phi \equiv 0$ линейная система (2.4) имеет инвариантные прямые, угловые коэффициенты которых определяются как корни квадратного уравнения

$$z^2 - f_2^\circ z - f_1^\circ = 0, \quad z = Rv/s$$

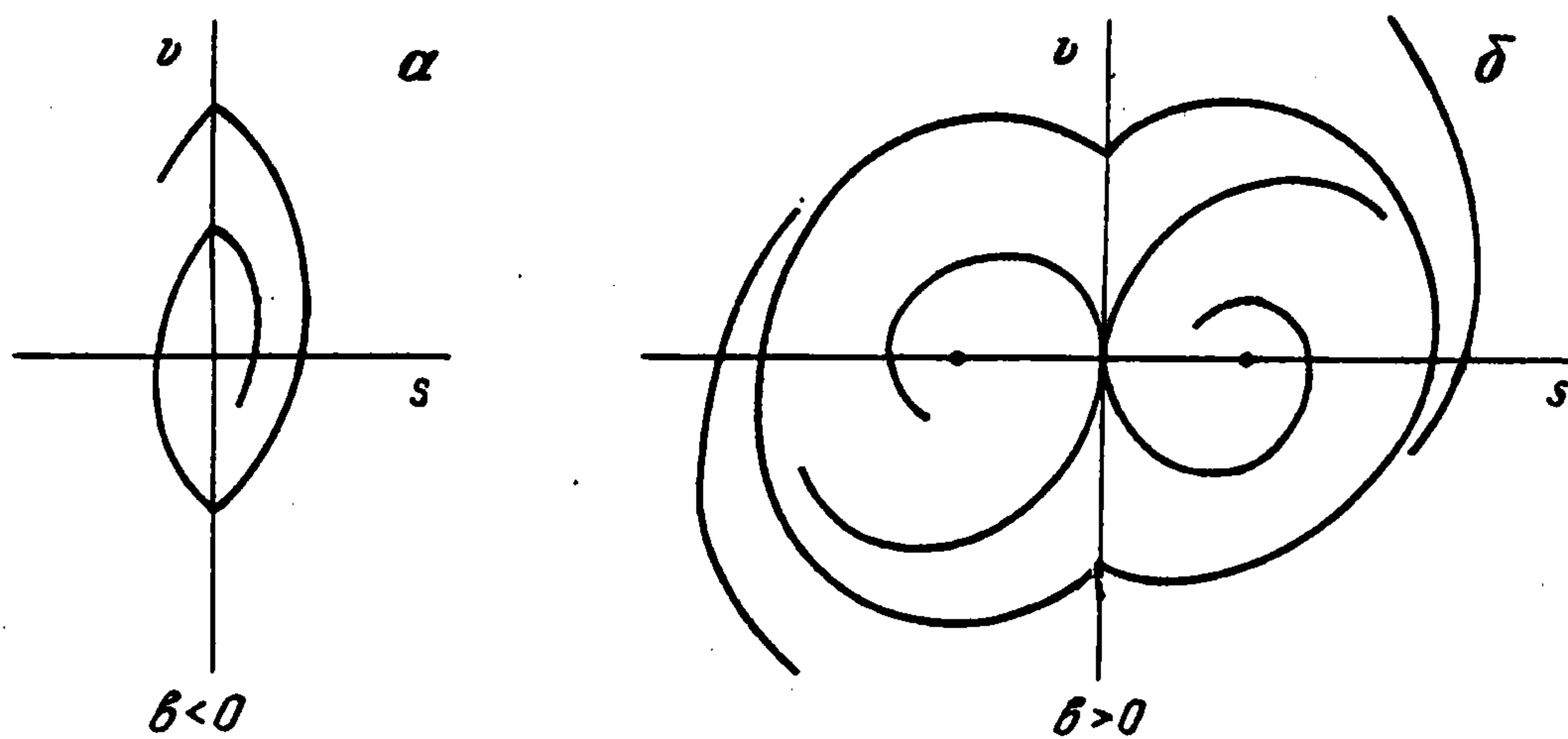
При добавлении нелинейных членов эти прямые задают асимптотические направления для системы (2.4), причем положительному корню z отвечает направление, асимптотическое при $t \rightarrow -\infty$, а отрицательному – при $t \rightarrow +\infty$. Так как данные направления трансверсальны линии удара $s = 0$, то при движении к особой точке система испытывает лишь конечное число ударов об ограничитель, и наличие односторонней связи не влияет на устойчивость.

В случаях 3, 5 (фокус) обозначим f_2^* такое значение, для которого величина σ , вычисленная при данных f_1° и k , равна единице. Тогда $f_2^\circ > f_2^*$ для неустойчивого фокуса и $f_2^\circ < f_2^*$ – для устойчивого. Траектории вспомогательной линейной системы

$$\dot{s} = Rv, \quad \dot{v} = R^{-1}f_1^\circ s + f_2^* v \quad (3.1)$$

замкнуты (фиг. 2, а), каждая из них пересекает полуось $s = 0$, $v > 0$ в единственной точке $(0, v_0)$. Положим $J(s, v) = v_0$, тогда функция J является первым интегралом системы (3.1) (явный вид этой функции приведен в [9]), т.е.

$$\frac{\partial J}{\partial s} Rv + \frac{\partial J}{\partial v} (f_1^\circ R^{-1}s + f_2^* v) = 0 \quad (3.2)$$



Фиг. 3

Переменные s , v можно выразить через J и t , при этом по аналогии с примером предыдущего параграфа зависимость от J линейна. По формулам дифференцирования неявных функций

$$1 = \frac{\partial J}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial J} + \frac{\partial J}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial J} = \frac{\partial J}{\partial s} \frac{s}{J} + \frac{\partial J}{\partial v} \frac{v}{J} \quad (3.3)$$

Из соотношений (3.2), (3.3) находим

$$\frac{\partial J}{\partial s} = -(f_2^* R v + f_1^* s) \frac{J}{Q}, \quad \frac{\partial J}{\partial v} = \frac{J}{Q} R^2 v \quad (3.4)$$

$$Q = R^2 v^2 - f_1^* s^2 - f_2^* R s v$$

где квадратичная форма Q в рассматриваемых случаях положительно определена. Заметим, что функция J – величина первого порядка относительно $r = (s^2 + v^2)^{1/2}$, а ее частные производные (3.4) ограничены. Функцию Ляпунова будем строить в виде $L = J + \lambda s v$. Эта функция положительно определена для всех действительных значений λ , при учете (3.4) имеем

$$L = J(f_2^* - f_2^*) v^2 R^2 / Q + \lambda f_1^* s^2 / R + \dots \quad (3.5)$$

где многоточием обозначены члены, малые по сравнению с выписанными. Подбором числа λ можно добиться знакоопределенности функции (3.5) того же знака, что и разность $f_2^* - f_2^*$. Отсюда по соответствующим теоремам Ляпунова и следуют утверждения об устойчивости и неустойчивости.

Заметим, что производная L имеет тот же порядок, что и L , поэтому в случаях 3, 5 движение по фазовой траектории к нулю происходит за бесконечное время (в отличие от квазифокуса), при этом система (1.1) испытывает бесконечное число соударений с ограничителем.

4. Устойчивость периодических движений. Периодическому движению системы (1.1) с ударами об ограничитель соответствует замкнутая траектория Γ на фазовой плоскости (s, v) , окружающая начало координат. Поскольку уравнения (1.4) инвариантны замене $s, v \rightarrow -s, -v$, то наряду с Γ фазовой кривой является также линия, симметричная с Γ относительно начала координат. Данное обстоятельство ограничивает тип периодических движений в случае, если правая часть уравнения (1.1) не зависит явно от времени, т.е. система автономна. При этом кривая Γ не может иметь самопересечений вне начала координат, ввиду чего удары происходят через равные промежут-

ки времени τ и при одинаковых значениях скорости сближения x'' (движение изображающей точки по кривой Γ происходит за время 2τ).

Если в окрестности Γ нет других замкнутых траекторий, то в соответствии с теорией Пуанкаре–Бендиксона для систем с разрывами [4] все траектории из этой окрестности спиралевидно навиваются на Γ при $t \rightarrow +\infty$ или при $t \rightarrow -\infty$.

Фазовые кривые неавтономной системы могут иметь самопересечения, и тип периодического движения характеризуется двумя натуральными числами: $N = \tau/T$ и K – числом ударов за период.

Различные определения устойчивости периодического движения можно сформулировать обычным образом. Заметим, что соответствующие определения непосредственно в системе (1.1) требуют видоизменения понятия окрестности для разрывных траекторий [3], при переходе же к точечным отображениям [1] не всегда ясно, какой из типов устойчивости обсуждается.

Орбитальная устойчивость изолированного периодического движения в автономном случае определяется характером асимптотики: если близлежащие траектории навиваются на Γ изнутри и извне при $t \rightarrow +\infty$, то движение орбитально асимптотически устойчиво, в противном случае – неустойчиво. Вывод о поведении этих кривых можно сделать, сравнивая ординаты их последовательных пересечений с полуосью $s = 0$, $v > 0$. Эта полуось определяет, таким образом, сечение Пуанкаре при исследовании орбитальной устойчивости.

При анализе устойчивости по Ляпунову следует сравнивать расположение изображающих точек на Γ и на возмущенной траектории в одинаковые моменты времени. В этом случае сечение Пуанкаре задается плоскостью $t = \text{const}$.

Примером, показывающим различие двух типов устойчивости, может служить движение тяжелой частицы с абсолютно упругими ударами о горизонтальную опору; при этом $k = 0$ и система (1.4) такова:

$$s' = v, \quad v' = -\text{sign} s$$

Все фазовые траектории данной системы замкнуты, но движение по ним происходит с разными периодами. Следовательно, каждое из периодических движений орбитально устойчиво, но неустойчиво по Ляпунову.

Алгоритм исследования устойчивости по первому приближению в системах с разрывной правой частью разработан в [10]. Применим его к анализу периодического движения системы (1.4), не содержащих касаний ударника и ограничителя (т.е. Γ не проходит через начало координат). На плоскости (s, v) это движение описывается непрерывной кривой $s_0(t), v_0(t)$, которая либо является замкнутой (если K четно), либо проходит при $t = 0$ и при $t = \tau$ через точки, симметричные относительно начала координат. Во втором случае вместо данного движения можно рассмотреть движение типа $(2N, 2K)$, траектория которого в плоскости (s, v) , будет уже замкнута.

Без ограничения общности будем считать, что $s_0(t_0) v_0(t_0) \neq 0$. Для тех значений времени, для которых $s_0(t) v_0(t) \neq 0$, уравнения в вариациях $\xi = s - s_0, \eta = v - v_0$ для системы (1.4) имеют вид

$$\xi' = R\eta, \quad \eta' = R^{-1}f_1\xi + f_2\eta \tag{4.1}$$

где величина R и частные производные функции f вычисляются на исследуемом решении.

Фундаментальная матрица решений системы (4.1) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{X}(t) = \begin{vmatrix} 0 & R \\ R^{-1}f_x & f_x \end{vmatrix} X(t) \quad (4.2)$$

В моменты пересечения траекторий (s_0, v_0) координатных осей матрица $X(t)$ меняется скачком: при переходе из первой четверти в четвертую или из третьей во вторую выполняется соотношение

$$X^+(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa \end{vmatrix} X^-(t) \quad (4.3)$$

(индексы минус и плюс соответствуют значениям матрицы непосредственно до и после пересечения), при обратных переходах

$$X^+(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \kappa^{-1} \end{vmatrix} X^-(t) \quad (4.4)$$

а при пересечениях оси $s = 0$, соответствующих ударам в исходной системе (1.1)

$$X^+(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{|v_0|(1+k)} \left[\frac{\kappa f^-}{1+k} + \frac{f^+}{1-k} \right] & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} X^-(t) \quad (4.5)$$

Решение вопроса об устойчивости зависит от корней ρ_1, ρ_2 характеристического уравнения

$$\det(X(\tau) - \rho E_2) = 0, \quad X(0) = E_2 \quad (4.6)$$

Критерий асимптотической устойчивости имеет вид

$$|\rho_{1,2}| < 1 \quad (4.7)$$

Непосредственная проверка неравенств (4.7) возможна лишь после интегрирования уравнений (4.2)–(4.5), и представляет интерес получение легкопроверяемых условий, хотя бы отдельно необходимых или достаточных. Докажем такое утверждение:

Теорема 3. Пусть исследуемое периодическое движение $x_0(t)$ типа (N, K) асимптотически устойчиво. Тогда

$$\kappa^{2K} \exp \left\{ \int_0^{NT} f_x(t, x_0(t), x_0(t)) dt \right\} < 1 \quad (4.8)$$

Доказательство. Применим к системе (4.2) теорему Лиувилля

$$V'(t) = f_x V(t), \quad V(t) = \det\{X(t)\}, \quad V(0) = 1 \quad (4.9)$$

Для вычисления значения $V(\tau) = \rho_1 \rho_2$ заметим, что при пересечении координатных осей величина V меняется скачком так, что $V^+ = \kappa V^-$ для случаев (4.3), (4.5) и $V^+ = V^-/\kappa$ для случая (4.4). Из простых геометрических соображений ясно, что каждому пересечению траекторий (s_0, v_0) оси v соответствует нечетное число пересечений оси s , причем переходов вида (4.3) ровно на один больше, чем вида (4.4). Решая задачу Коши для линейного уравнения (4.9) с учетом умножения величины V на κ^2 при каждом ударе получим, что левая часть неравенства (4.8) равна $V(\tau)$, так что утверждение теоремы следует из критерия (4.7).

Следствие. В случае автономной системы условие (4.8) необходимо и достаточно для орбитальной асимптотической устойчивости (как отмечалось выше, в этом случае всегда $K = 1$).

Действительно, в этом случае всегда $\rho_1 = 1$ [11], поэтому величина $B(\tau)$ равна ρ_2 — мультипликатору предельного цикла Γ .

Для удобства решения конкретных задач можно рекомендовать следующее упрощение алгоритма построения матрицы $X(\tau)$. Обозначим $X_1(t)$ фундаментальную матрицу решений для линеаризованной системы (1.1). На интервалах безударного движения изменение этой матрицы описывается уравнением

$$X_1'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_x & f_x \end{bmatrix} X_1(t), \quad X_1(t_0) = E \quad (4.10)$$

Сравнение систем (4.2) и (4.10) приводит к следующей взаимосвязи между матрицами X и X_1 :

$$X(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{-1}(t) \end{bmatrix} X_1(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R(t_0) \end{bmatrix} \text{sign}(s_0(t)s_0(t_0)) \quad (4.11)$$

Матрица X_1 терпит разрывы только при ударах, при этом в соответствии с (4.5), (4.11)

$$X_1^+ = \begin{bmatrix} -\kappa & 0 \\ (f^+ + \kappa f^-) / x^- & -\kappa \end{bmatrix} X_1^- \quad (4.12)$$

$$f^\pm = f(t, 0, x^\pm)$$

Интегрируя систему (4.10), (4.12), можно построить матрицу монодромии $X_1(\tau)$, которая вследствие (4.11) подобна $X(\tau)$.

Пример. Рассмотрим вынужденные колебания осциллятора (1.9):

$$x'' + 2bx' + a^2x = P(t), \quad P(t+T) \equiv P(t) \quad (4.13)$$

Допустим, что система обладает периодическим движением $x(t) = p(t)$ типа $(N, 1)$ (т.е. с одним ударом за период $\tau = NT$). Вне зависимости от вида правой части уравнения в вариациях имеют общее решение вида

$$x(t) - p(t) = e^{-bt} (C_1 \cos \delta t + C_2 \sin \delta t)$$

Применяя формулу (4.12) в момент удара $t = t^*$, получим в итоге для коэффициентов характеристического уравнения следующие выражения:

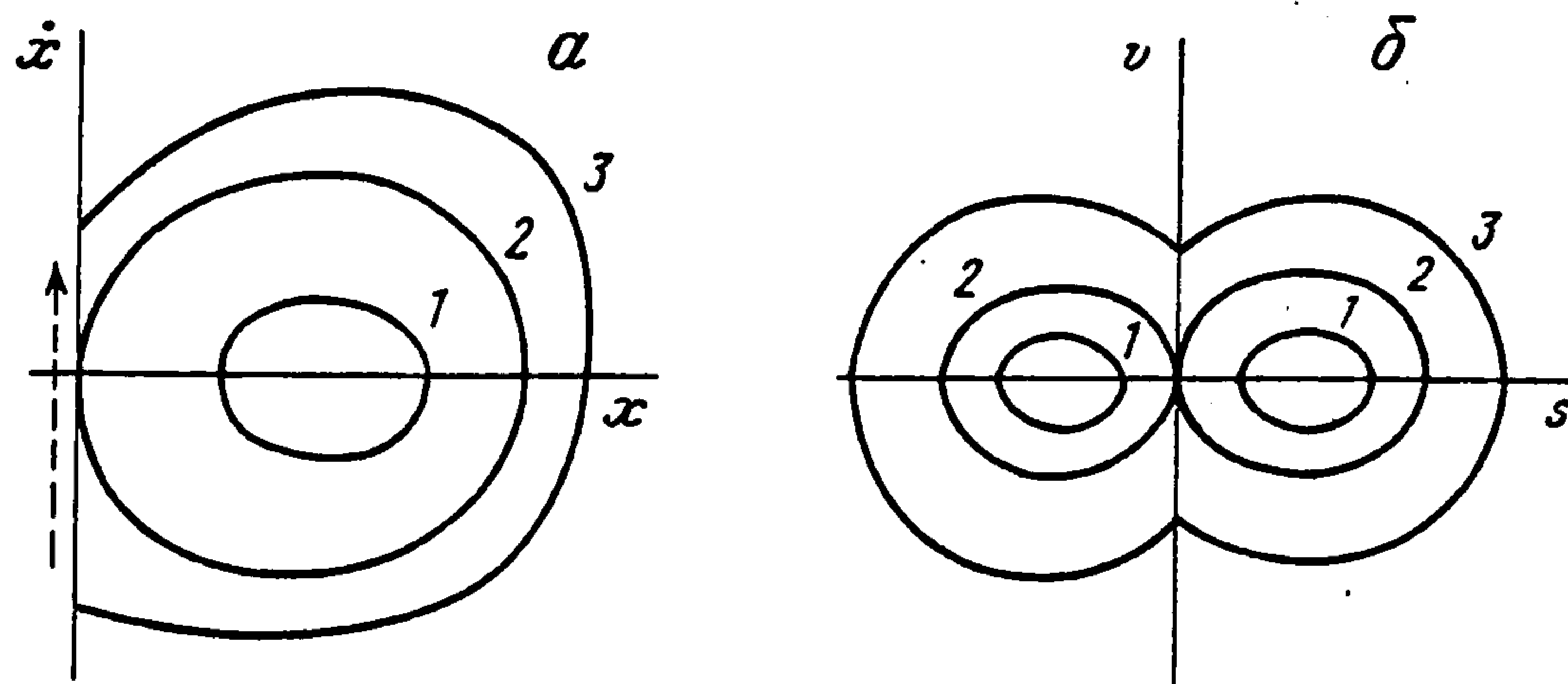
$$a_0 = B(\tau) = \kappa^2 e^{-2b\tau} \quad (4.14)$$

$$a_1 = \text{tr}\{X_1(\tau)\} = e^{-b\tau} \left\{ 2\kappa \cos \delta \tau + \frac{(1+\kappa)P(t^*) \sin \delta \tau}{\delta p'(t^* - 0)} \right\}$$

Условия устойчивости (4.7) по теореме Шура выглядят так:

$$|a_0| < 1, \quad |a_1| < |1 + a_0| \quad (4.15)$$

5. Бифуркации в виброударных системах. Допустим теперь, что правая часть уравнения (1.1) зависит от параметра μ . Для периодических движений с ударами элементы матрицы монодромии непрерывно зависят от μ , как следует из алгоритма построения этой матрицы (4.10), (4.12). Поэтому выполнение неравенств (4.7) гарантирует сохранение устойчивых периодических движений при изменении μ . Бифуркации возникают, когда один из мультипликаторов попадает на единичную окружность и относятся к одному из известных типов: "седло-узел", удвоение периода и т.д.



Фиг. 4

Специфическими для систем с ударами являются так называемые *C*-бифуркации [12]: если при некотором значении параметра периодическая траектория проходит через начало координат (в некоторый момент времени ударник касается ограничителя), то функции $\rho_{1,2}(\mu)$ могут терпеть разрыв. Действительно, в формуле (4.12) в этом случае знаменатель обращается в нуль, что в общем случае приводит к появлению бесконечно больших элементов в матрице $X_1(\tau)$. В результате *C*-бифуркации могут исчезать или рождаться целые семейства периодических или субпериодических движений [13–15]. По мнению автора данных работ, все эти движения в окрестности критического значения параметра неустойчивы. Данное утверждение не вполне точно, как показывает нижеследующий анализ.

Теорема 4. Пусть система (1.1) автономна и функция f зависит от параметра μ дифференцируемым образом. Для значений μ из интервала $(-\varepsilon, 0)$, где ε – некоторое положительное число, существуют безударные периодические движения, мультипликаторы которых ограничены в совокупности числом λ , меньшим единицы:

$$\rho_2(\mu) \leq \lambda < 1, \quad \mu \in (-\varepsilon, 0)$$

а при $\mu > 0$ безударных периодических движений нет (напомним, что в автономном случае $\rho_1(\mu) \equiv 1$). Тогда для достаточно малых положительных μ существуют устойчивые движения с одним ударом за период.

Доказательство. Изобразим эволюцию периодических движений на фиг. 4: здесь на кривой 1 значение μ отрицательно, на кривой 2 оно равно нулю и на кривой 3 положительно. Последняя из траекторий разрывна на плоскости (x, \dot{x}) , а на плоскости (s, v) замкнута, но период движения вдвое больше, чем в исходных переменных. Проведем через начало координат положительную и отрицательную полутраектории системы (1.1) до их первого пересечения с осью x в точках x_μ^+ , x_μ^- соответственно, при $\mu = 0$ эти две точки совпадают. Из существования периодической кривой при $\mu = 0$ следует, что для достаточно малых значений μ функция f в начале координат положительна. Поэтому в области $x > 0$ фазовые кривые аппроксимируются параболами. Построим функцию последования $x = g(\bar{x})$ [11] на полуоси $x > 0$. Так как при ударах изображающая точка смещается по касательной к параболической траектории, проходящей через начало координат, то расстояние от этой точки до траектории уменьшается при этом в κ^2 раз. Следовательно, для функции последования получаем такое выражение:

$$g(\bar{x}) = \begin{cases} x_\mu^+ + \rho_2(-0)(\bar{x} - x_\mu^-) + o(\mu), & \bar{x} \leq x_\mu^- \\ x_\mu^+ + \kappa^2 \rho_2(-0)(\bar{x} - x_\mu^-) + o(\mu), & \bar{x} > x_\mu^- \end{cases} \quad (5.1)$$

При $\mu < 0$ вследствие орбитальной асимптотической устойчивости $x_\mu^+ < x_\mu^-$, а при $\mu > 0$ из отсутствия безударных периодических движений следует, что $x_\mu^+ > x_\mu^-$. Так как $\rho_2(-0) < 1$, то формулы (5.1) описывают двустороннюю бифуркацию: при $\mu < 0$ отображение g имеет неподвижную точку

$$x_1^* = x_\mu^- + (x_\mu^+ - x_\mu^-) / (1 - \rho_2(-0)) < x_\mu^-$$

а при $\mu > 0$ – неподвижную точку

$$x_2^* = x_\mu^- + (x_\mu^+ - x_\mu^-) / (1 - \kappa^2 \rho_2(-0)) > x_\mu^-$$

Так как $g'(x_1^*) = \rho_2(-0)$, $g'(x_2^*) = \kappa^2 \rho_2(-0)$, то обе эти точки устойчивы.

Замечание. Если $\rho_2(-0) \in (1, \kappa^{-2})$, то бифуркация односторонняя: обе неподвижные точки $x_{1,2}^*$ существуют при $\mu < 0$ (таким образом, кривая 3 на фиг. 4 соответствует, как и кривая 1, значениям $\mu < 0$). Поскольку $g'(x_1^*) > 1$, $g'(x_2^*) < 1$, то движения без ударов неустойчивы, а с ударами – устойчивы.

Для неавтономных систем траектории на фазовой плоскости могут иметь самопересечения, и в результате S -бифуркации может измениться период движения или число ударов за период.

Допустим, что для значений $\mu \in (-\epsilon, 0]$ существует семейство $x_\mu(t)$ τ -периодических движений неавтономной системы, ровно одно из которых включает касание ударника и ограничителя:

$$x_0(t_0) = x_0'(t_0) = 0, \quad f(t_0, 0, 0) > 0 \quad (5.2)$$

Составим матрицу монодромии $X_1(\mu, t_0 + \tau)$, решая систему (4.10) с учетом (4.12) и обозначим $x_{ij}(\mu)$ ($i, j = 1, 2$) ее элементы.

Теорема 5. Необходимым условием существования при $\mu > 0$ устойчивого τ -периодического движения с одним дополнительным (по отношению к движениям при $\mu < 0$) ударом за период является равенство

$$x_{12}(-0) = 0 \quad (5.3)$$

Доказательство. Наличие дополнительного удара в окрестности значения $t = t_0$ приводит к скачкообразному изменению матрицы монодромии в соответствии с (4.12). Определитель при этом умножается на κ^2 , а след увеличивается на величину, пропорциональную $x_{12}(\mu) / x^-$. Так как $x^- \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$, получим, что условие (5.3) необходимо для выполнения второго из неравенств (4.15), что и требовалось.

Пример. Для осциллятора (4.13) необходимое условие (5.3) в случае $P(t_0, \mu) \neq 0$ имеет вид

$$\sin \delta \tau = 0 \quad (5.4)$$

Построим периодические движения в случае, когда приложенная нагрузка описывается формулой

$$P(t, \mu) = (1 - \mu)a^2 + 2b\omega \sin \omega t + (\omega^2 - a^2) \cos \omega t$$

Система (4.13) имеет частное решение

$$p_\mu(t) = 1 - \mu - \cos \omega t, \quad T = 2\pi / \omega \quad (5.5)$$

Если $\mu < 0$, то формула (5.5) описывает периодическое безударное движение. В случае $\mu = 0$ ударник касается ограничителя в моменты $t_0 = 0, \pm T, \pm 2T$ и т.д. Если же $\mu > 0$, то безударных периодических движений нет.

Периодическое движение типа (1.1) описывается в промежутках между ударами формулой

$$x_\mu(t) = p_\mu(t) + e^{-bt}(C_1 \cos \delta t + C_2 \sin \delta t)$$

Если удары происходят в моменты $t^* + mT, m \in Z$, то условия T -периодичности выглядят так:

$$x_\mu(t^*) = x_\mu(t^* + T) = 0, \quad x'_\mu(t^*) = -\kappa x'_\mu(t^* + T) \geq 0 \quad (5.6)$$

Условия (5.6) при учете равенства (5.4) значительно упрощаются и принимают следующий вид:

$$\delta = \frac{1}{2}n\omega, \quad n \in Z, \quad t^* = -\omega^{-1} \arccos(1 - \mu) \quad (5.7)$$

$$C_1 \cos \delta t^* + C_2 \sin \delta t^* = 0, \quad C_2 = \frac{-\omega(1 + \kappa) \sin \omega t^* \cos \delta t^* e^{b(t^* + T)}}{\delta(e^{bT} + \kappa(-1)^n)}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для решения (5.7) выполнены геометрические условия существования, т.е. на промежутке $(t^*, t^* + T)$ функция $x_\mu(t)$ положительна.

В формулах (4.14) получаем

$$a_0 = \kappa^2 e^{-2b\tau}, \quad a_1 = \pm 2\kappa e^{-b\tau}$$

Следовательно, в результате C -бифуркации рождается устойчивое периодическое движение с ударами.

По аналогии с теоремой 5 можно сформулировать необходимое условие рождения при C -бифуркации устойчивых движений типа $(N, 1)$. Это условие имеет вид

$$x_{12}^{(N)}(-0) = 0 \quad (5.8)$$

где $x_{ij}^{(N)}(\mu)$ – элементы N -й степени матрицы монодромии $X_1(t_0 + T)$.

В рассмотренном выше примере условие (5.8) выглядит так:

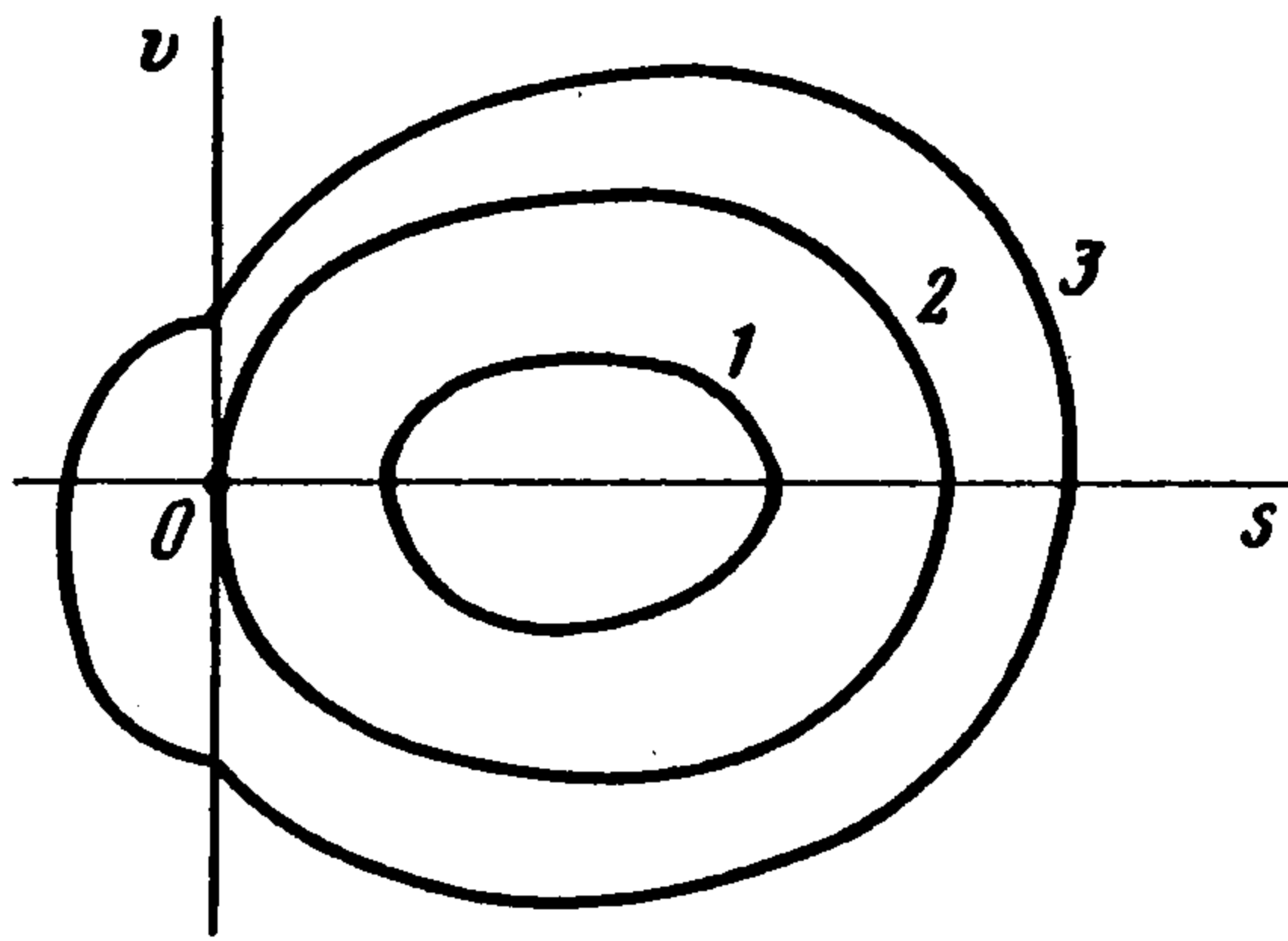
$$\sin(N\delta T) = 0 \quad (5.9)$$

Замечание. Равенства (5.4), (5.9) выражают соизмеримость собственной частоты затухающих колебаний осциллятора и частоты периодической нагрузки. Обычно в задачах механики резонансы являются дестабилизирующим фактором. В данном случае, напротив, резонансы обеспечивают сохранение устойчивости при C -бифуркации. Как показано в [16], устойчивые периодические движения системы (4.13) могут рождаться и вблизи резонанса: если левая часть равенства (5.4) – отрицательное число, близкое к нулю, то C -бифуркации предшествует бифуркация "седло–узел", в результате которой возникает пара движений с невырожденными ударами. Одно из этих движений при $\mu = 0$ вырождается и аннигилирует с безударным движением, а устойчивое движение с ударами сохраняется при $\mu > 0$.

В неавтономной системе возможен еще один случай сохранения устойчивости при C -бифуркации. Для его реализации необходимо выполнение при $\mu = 0$ условий

$$f(t_0, 0, 0) = \frac{d}{dt} f(t_0, 0, 0) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2} f(t_0, 0, 0) > 0$$

Примерный сценарий изображен на фиг. 5: для траектории третьего типа количество ударов за период на два больше, чем для траектории 1. Здесь подразумевается, что в моменты пересечения траекторией 3 оси ν выполнено равенство $f = 0$, так что в соответствии с (4.12) добавочные удары приводят к умножению мультипликаторов на κ^2 .



Фиг. 5

6. Обобщение метода непрерывного представления. Метод непрерывного представления разрывных колебаний, представленный в разд. 1, может быть использован и для анализа многомерных систем с одной ударной парой, в том числе и для случаев зависимости коэффициента восстановления от начальных условий удара и при наличии сухого трения.

Пусть $y = (x, x', z_1, \dots, z_n)$ – вектор фазовых переменных, причем $x \geq 0$. В области $x > 0$ движение описывается уравнениями

$$\dot{y} = F(t, y) \quad (6.1)$$

На плоскости $x = 0$ изменение переменной x' определяется по аналогии с (1.2), остальные же уравнения системы (6.1) остаются без изменения. К виду (6.1) можно привести, в частности, механические системы с идеальной односторонней связью [5]: в этом случае в качестве z можно взять лагранжевы координаты и сопряженные им импульсы, а уравнения движения записать в форме Рауса.

Сделаем замену (1.3), оставляя z без изменения. Непрерывное представление системы (6.1) имеет вид

$$s' = Rv, \quad v' = R^{-1}F_2 \operatorname{sign} s, \quad z_j' = F_{j+2} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (6.2)$$

где правые части разрывны при $s v = 0$.

В более общем случае, когда ударные взаимодействия описываются формулами

$$x^{+\prime} = -x^{-\prime} H_0(y^-), \quad 0 < H_0 < 1 \quad (6.3)$$

$$z_j^{+\prime} = z_j^{-\prime} + x^{-\prime} H_j(y^-) \quad (j = 1, \dots, n)$$

вспомогательные фазовые переменные s, v, w_1, \dots, w_n можно определить следующим образом:

$$x = |s|, \quad x' = v \operatorname{sign} s (1 - k^* \operatorname{sign}(sv)) \quad (6.4)$$

$$z_j = w_j + x' \alpha_j(|v|, w_1, \dots, w_n), \quad k^* = (1 - H_0) / (1 + H_0)$$

Функции α_j подберем так, чтобы переменные v, w_j при ударных преобразованиях (6.3) оставались неизменными. Для этого они должны удовлетворять системе уравнений

$$\alpha_j = -H_j / (1 + H_0)$$

где положено $x^{-\prime} = -|v|(1 + k^*)$.

Дифференцируя равенства (6.4) при $sv \neq 0$, можно получить непрерывное представление системы (6.1) с ударами (6.3).

Пример. Материальная частица падает под углом на шероховатую горизонтальную плоскость. Уравнения удара таковы:

$$\dot{x}^+ = -\kappa \dot{x}^-, \quad \dot{z}^+ = \dot{z}^- + \mu(1 + \kappa)\dot{x}^- \quad (6.5)$$

где x, z – декартовы координаты частицы (x – высота над опорной плоскостью), μ – коэффициент кулоновского трения.

Второе из уравнений (6.5) справедливо в случае, если рассчитанное с его помощью значение \dot{z}^+ , так же как и \dot{z}^- , положительно, в противном случае надо считать $\dot{z}^+ = 0$, т.е. скольжение частицы прекращается. Формулы (6.5) переходят в (6.3) при обозначениях $H_0 = \kappa, H_1 = \mu(1 + \kappa)$. Следовательно, вспомогательная переменная w определяется так: $w = \mu \dot{x} + \dot{z}$.

В промежутках между ударами $\ddot{x} = -g, \ddot{z} = 0$, поэтому система непрерывного представления имеет вид

$$\dot{s} = Rv, \quad \dot{v} = -gR^{-1} \text{sign} s \quad (6.6)$$

$$\dot{z} = w - \mu Rv \text{sign} s, \quad \dot{w} = -\mu g \quad (w \geq 0)$$

где g – ускорение свободного падения; масса частицы единична.

Система (6.6) легко интегрируется: первые два уравнения описывают движение частицы, отвесно падающей на опору и имеющее вид бесконечно ударного процесса, затухающего за конечное время [7]. Четвертое уравнение по форме совпадает с уравнением движения тела, скользящего по шероховатой опоре (w – скорость); если начальное значение скорости \dot{z} достаточно велико, то это уравнение останется справедливым и после прекращения подскоков.

Используя непрерывное представление, можно получить для многомерных систем ряд результатов по устойчивости положений равновесия и периодических движений с ударами. Так, допустим, что $F_3 = F_4 = \dots = F_{n+2} = 0, F_2 < 0$ при $y = 0$, тогда начало координат – положение равновесия системы (6.2). Наряду с этой системой рассмотрим вспомогательную систему уравнений

$$\dot{z}_j = F_{j+2}|_{s=v=0} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (6.7)$$

Правые части уравнений (6.7) непрерывно дифференцируемы в окрестности особой точки $z = 0$, и характер этой точки можно исследовать обычными методами.

Последующий вывод об устойчивости исходной системы основан на следующем утверждении.

Теорема 6. Если для всех значений $t \geq t_0$ выполнены неравенства

$$-M \leq F_2(t, 0) \leq -m < 0$$

то тривиальное решение системы (6.1) устойчиво (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда устойчиво (асимптотически устойчиво) тривиальное решение системы (6.7).

Доказательство. Утверждение теоремы станет очевидным, если показать, что для всех начальных условий из некоторой окрестности U_0 начала координат системы (6.1) фазовая траектория за конечное время приходит на плоскость $x = \dot{x} = 0$ и остается в этой плоскости по крайней мере до тех пор, пока она не покинет U_0 . Данное свойство следует из анализа функции (2.3), удовлетворяющей условиям (2.2). Хотя производная функции $G(s, v)$, построенной для системы (6.2), может явно зависеть от времени, она допускает ту же оценку. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, получим, что за конечное время функция G обратится в нуль, т.е. траектория перейдет на плоскость $x = \dot{x} = 0$.

Пример. Движение тяжелой частицы на вибрирующем по гармоническому закону основании описывается уравнением

$$d^2x/d\varphi^2 = I \sin\varphi - 1, \quad x \geq 0 \quad (6.8)$$

где φ – фаза колебаний, I – их интенсивность, а безразмерная величина x пропорциональна высоте частицы над движущейся опорой.

По теореме 6 при $I < 1$ начало координат является асимптотически устойчивым положением равновесия (соответствующим движению частицы без отрыва от опоры). Это не исключает наличия периодических движений с подскоками [1]: при выполнении неравенства

$$I > \pi k N, \quad N \in Z$$

существуют периодические движения периода $\tau = 2\pi N$ с ударами в фазе φ_0 , где

$$I \cos\varphi_0 = \pi k N, \quad x^- = -(1+k)\pi N \quad (6.9)$$

Исследуем устойчивость периодического движения (6.9). Коэффициенты характеристического уравнения найдем по формулам (4.10), (4.12):

$$a_0 = \kappa^2, \quad a_1 = (1+\kappa)^2 I \sin\varphi_0 - 1 - \kappa^2$$

откуда условия (4.7) принимают вид

$$0 < \operatorname{tg}\varphi_0 < \frac{2}{\pi N} \frac{1+\kappa^2}{1-\kappa^2}$$

что совпадает с результатом, полученным в [1].

Найдем достаточные условия устойчивости начала координат системы (6.8) в целом. Рассмотрим для этого функцию

$$V = \frac{1}{2}(1-k^2)Iv^2 + |s| \quad (6.10)$$

Производная функции (6.10) при $s \neq 0$ такова:

$$dV/d\varphi = -|v|[2k - I \sin\varphi(k + \operatorname{sign}(sv))] \quad (6.11)$$

При выполнении неравенства

$$I < 2k/(1+k) \quad (6.12)$$

правая часть в формуле (6.11) отрицательна, и функция (6.10) удовлетворяет условиям теоремы Барбашина–Красовского. Таким образом, условие (6.12) достаточно для устойчивости в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобринский А.А., Кобринский А.Е. Двумерные виброударные системы. М.: Наука, 1981. 335 с.
2. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
3. Gajewsky K., Radziszewski B. On the stability of impact systems//Bul. Pol. Aca. Sci. Tech. Sci. 1987. V. 35. № 3–4. P. 183–188.
4. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
5. Журавлев В.Ф. Уравнения движения механических систем с идеальными односторонними связями//ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 781–788.
6. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.
7. Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 200 с.

8. Губарь Н.А. О бифуркациях в окрестности "сшитого фокуса">//ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 5. С. 937–941.
9. Солнцев Ю.К. Об устойчивости по Ляпунову положений равновесия системы двух дифференциальных уравнений в случае разрывных правых частей//Уч. зап. МГУ. Сер. матем. 1951. Вып. 148. С. 144–180.
10. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Об устойчивости периодических движений//ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 6. С. 750–758.
11. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 586 с.
12. Брусин В.А., Неймарк Ю.И., Фейгин М.И. О некоторых случаях зависимости периодических движений релейной системы от параметров//Изв. вузов. Радиофизика. 1963. Т. 6. № 4. С. 785–800.
13. Фейгин М.И. Удвоение периода колебаний при C -бифуркациях в кусочно-непрерывных системах//ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 5. С. 861–869.
14. Фейгин М.И. О рождении семейства субгармонических режимов в кусочно-непрерывной системе//ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 5. С. 810–818.
15. Фейгин М.И. О поведении динамических систем вблизи границ области существования периодических движений//ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 628–636.
16. Ivanov A.P. Stabilization of an impact oscillator near grazing incidence owing to resonance//J. of Sound and Vibration. 1993. V.162. № 3. P. 515–518.

Москва

Поступила в редакцию
11.X.1991