

539.3: 534.1

© 1993 г. Е.В. Ладыгина, А.И. Маневич

## СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ БЛИЗКИХ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТАХ

Методом многих масштабов [1] исследуются свободные колебания в консервативной системе с двумя степенями свободы, имеющей кубические нелинейности (с симметричной характеристикой), при близких собственных частотах. Установлены возможные режимы модуляции колебаний в зависимости от коэффициентов системы дифференциальных уравнений, энергии и начальных условий.

Для систем с двумя степенями свободы, имеющих квадратичные нелинейности, известен и изучен внутренний резонанс при соотношении частот 1:2, для систем с кубическими нелинейностями – при соотношении частот 1:3 [1]. В последние годы обращается внимание на взаимодействие форм (типа внутреннего резонанса) при близких собственных частотах. Как показывают экспериментальные наблюдения и решения частных задач, этот эффект представляет интерес для описания колебательных процессов в висячих мостах [2–4], цилиндрических оболочках и других конструкциях [5–7]. Однако общий анализ взаимодействия форм свободных колебаний в нелинейных системах с близкими собственными частотами в литературе отсутствует. В частности, нет ответа на вопросы, какие возможны типы модуляции колебаний, чем определяется степень и период перекачки энергии в системе, каково число стационарных режимов (без модуляции) и какие из них устойчивы и т.п.

**1. Уравнения амплитудно-частотной модуляции.** Рассмотрим нелинейную колебательную систему (в начале, для общности, с демпфированием), описываемую уравнениями

$$\ddot{u}_k + 2\mu_* \dot{u}_k + \omega_*^2 u_k = b_{kk} u_k^3 + b_{12} u_1^k u_2^{3-k}, \quad k = 1, 2 \quad (1.1)$$

Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  предполагаются близкими, а коэффициенты демпфирования для обеих форм считаются одинаковыми.

Уравнения (1.1) представляют общий случай систем с симметричным потенциалом (при  $\mu_* = 0$ ), включающим члены второй и четвертой степеней. Они аналогичны уравнению Дуффинга для систем с одной степенью свободы и описывают широкий класс механических систем (для общности никаких ограничений на коэффициенты  $b_{ij}$  не накладывается).

В соответствии с методом многих масштабов вводим "быстрое" и "медленное" времена  $T_0 = t$ ,  $T_1 = \varepsilon T_0$ ,  $T_2 = \varepsilon^2 T_0$  (время  $T_1$  далее не понадобится) и ищем решение системы (1.1) в виде разложения (члены при  $\varepsilon^2$  для системы с кубическими нелинейностями обращаются в нуль):

$$u_k = \varepsilon u_{k1}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^3 u_{k3}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (1.2)$$

Малость  $\mu_*$  и разности частот вводится условиями

$$\mu_* = \varepsilon^2 \mu, \quad \omega_1 = \omega, \quad \omega_2^2 = \omega^2 + \varepsilon^2 \sigma \quad (1.3)$$

Учитывая, что

$$d/dt = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (D_0 = \partial/\partial T_0, D_1 = \partial/\partial T_1, D_2 = \partial/\partial T_2),$$

$$d^2/dt^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots$$

получаем следующие системы уравнений для двух приближений:

$$D_0^2 u_{k1} + \omega^2 u_{k1} = 0 \quad (1.4)$$

$$D_0^2 u_{k3} + \omega^2 u_{k3} = -2D_0(D_2 u_{k1} + \mu u_{k1}) + b_{kk} u_{k1}^3 + b_{12} u_{11}^k u_{21}^{3-k} - \delta_{2k} \sigma u_{k1} \quad (1.5)$$

( $\delta_{ij}$  – символ Кронекера).

Решение системы (1.4) запишем в виде (черта означает комплексно-сопряженную величину)

$$u_{k1} = A_k(T_2) \exp(i\omega T_0) + \bar{A}_k(T_2) \exp(-i\omega T_0) \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в систему (1.5), из условия отсутствия секулярных членов в получаемых уравнениях имеем (штрихом обозначено дифференцирование по  $T_2$ )

$$\begin{aligned} -2i\omega(A_k' + \mu A_k) + 3b_{kk} A_k^2 \bar{A}_k + 2b_{12} A_k A_{3-k} \bar{A}_{3-k} + \\ + b_{12} A_k A_{3-k}^2 - \delta_{2k} \sigma A_k = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Переходя к показательной форме для комплексных амплитуд  $A_k = \frac{1}{2} a_k \exp(i\theta_k)$  ( $k = 1, 2$ ), получаем из (1.7) после разделения действительных и мнимых частей систему уравнений, определяющих модуляцию амплитуд и фаз обеих форм:

$$(a_k^2)' + 2\mu a_k^2 = (-1)^k b_{12} (4\omega)^{-1} a_1^2 a_2^2 \sin 2\gamma \quad (1.8)$$

$$8\omega\theta_k' = -3b_{kk} a_k^2 - b_{12} a_{3-k}^2 (2 + \cos 2\gamma) \quad (1.9)$$

Из уравнений (1.8) после исключения  $\sin 2\gamma$  получаем интеграл

$$a_1^2 + a_2^2 = E \cdot \exp(-2\mu T_2) = E \cdot \exp(-2\varepsilon^2 \mu t) \quad (1.10)$$

где произвольная постоянная  $E$  пропорциональна энергии системы (в первом приближении). В частности, для консервативной системы ( $\mu = 0$ )

$$a_1^2 + a_2^2 = E \quad (1.11)$$

Из (1.9) получаем уравнение относительно разности фаз  $\gamma$ :

$$8\omega\gamma' = (3b_{11} - 2b_{12}) a_1^2 + (2b_{12} - 3b_{22}) a_2^2 + b_{12} (a_2^2 - a_1^2) \cos 2\gamma + 4\sigma \quad (1.12)$$

Для дальнейшего анализа удобно [1] перейти к новой переменной  $\xi = a_1^2 / E$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ). Тогда из уравнений (1.9) при  $k = 1$  и (1.12) получается система уравнений, определяющих амплитудно-частотную модуляцию в переменных  $\xi, \gamma$ :

$$\xi' = -2\mu\xi + \Gamma_0 \xi (1 - \xi) \sin 2\gamma$$

$$\gamma' = \xi \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_0 (\frac{1}{2} - \xi) \cos 2\gamma \quad (1.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= b_{12} E (4\omega)^{-1}, & \Gamma_1 &= (3b_{11} - 4b_{12} + 3b_{22}) E (8\omega)^{-1} \\ \Gamma_2 &= [(2b_{12} - 3b_{22}) E + 4\sigma] (8\omega)^{-1} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Не ограничивая общности, будем считать  $\Gamma_0 \neq 0$ , так как в противном случае  $b_{12} = 0$  и система уравнений (1.1) распадается на два несвязанных уравнения.

**2. Решение уравнений модуляции.** Дальнейший анализ проводим для случая консервативной системы ( $\mu = 0$ ). Разделив второе уравнение (1.13) на первое, получаем

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = \frac{\xi(\Gamma_1 - \Gamma_0 \cos 2\gamma) + \Gamma_2 + \frac{1}{2}\Gamma_0 \cos 2\gamma}{\Gamma_0 \xi (1 - \xi) \sin 2\gamma} \quad (2.1)$$

Решение этого уравнения в полных дифференциалах

$$\Gamma_0 \xi (1 - \xi) \cos 2\gamma + \Gamma_1 \xi^2 + 2\Gamma_2 \xi = C \quad (2.2)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, определяет траектории в плоскости  $(\xi, \gamma)$  – "амплитудно-фазовый портрет" системы (АФ-портрет). Исключая  $\gamma$  из первого уравнения (1.13) и (2.2), получаем

$$\Gamma_0^{-2} (d\xi / dT_2)^2 = F_1^2(\xi) - F_2^2(\xi) \quad (2.3)$$

$$F_1(\xi) = \xi(1 - \xi), \quad F_2(\xi) = \Gamma_0^{-1} (\Gamma_1 \xi^2 + 2\Gamma_2 \xi - C)$$

Это уравнение по форме совпадает с приведенным [1] для случая  $\omega_2 = 3\omega_1$ , но функции  $F_1(\xi)$ ,  $F_2(\xi)$  имеют другой вид.

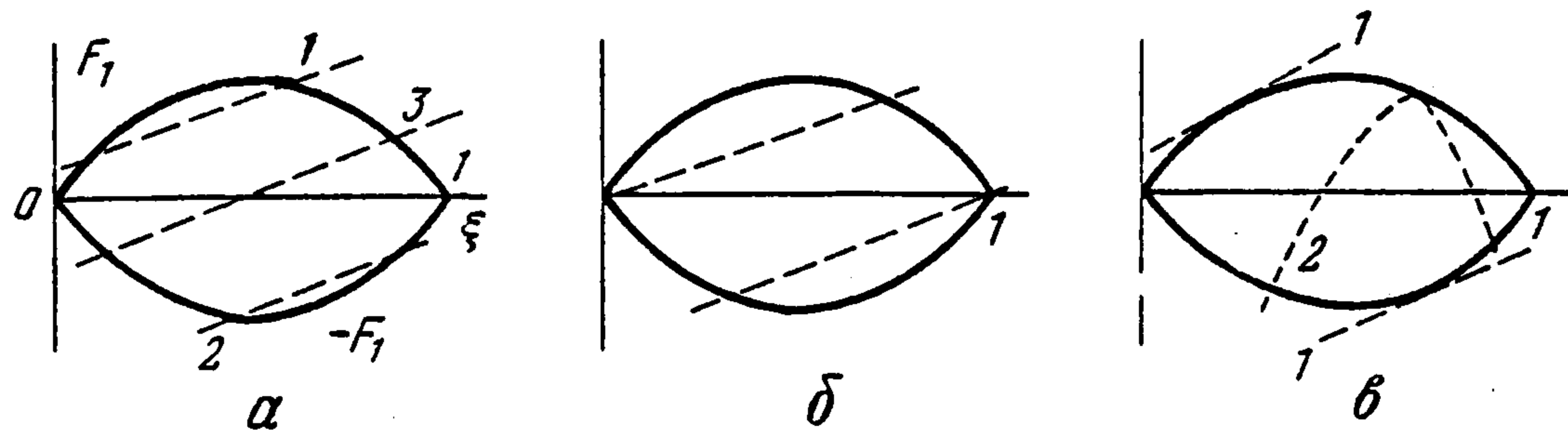
Условие существования решения уравнения (2.3)

$$|F_1| \geq |F_2| \quad (2.4)$$

означает, что решениям соответствуют участки парабол  $F_2(\xi)$  внутри области, ограниченной дугами парабол  $\pm F_1(\xi)$  на отрезке  $[0, 1]$  (фиг. 1). Точки пересечения парабол  $F_2(\xi)$  с осью  $\xi$ , как видно из (2.2), соответствуют условию  $\cos 2\gamma = 0$ , т.е.  $\gamma = \pm(2n + 1)\pi/4$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), либо значениям  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Точки пересечения парабол  $F_2(\xi)$  и  $F_1(\xi)$  отвечают экстремальным значениям функции  $\xi(T_2)$  и соответственно  $a_k(T_2)$  ( $k = 1, 2$ ). Как следует из уравнений (1.13) (при  $\mu = 0$ ), в этих точках  $\sin 2\gamma = 0$  (если  $\xi \neq 0$  и  $\xi \neq 1$ ), т.е.  $\gamma = \pm n\pi/2$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), причем точкам на нижней кривой ( $F_1 < 0$ ) соответствуют четные значения  $n$ , а точкам на верхней кривой – нечетные значения. Следовательно, минимальные и максимальные значения  $\xi$ , определяющие модуляцию амплитуд и степень перекачки энергии между формами, равны корням уравнений  $F_1(\xi) = \pm F_2(\xi)$ , т.е. уравнений

$$\xi^2 (\mp \Gamma_1 - \Gamma_0) + \xi (\Gamma_0 \mp 2\Gamma_2) \pm C = 0 \quad (2.5)$$

где верхний и нижний знаки отвечают точкам пересечения параболы  $F_2(\xi)$  с верхней



Фиг. 1

и нижней кривой  $\pm F_1(\xi)$  соответственно, а значение  $C$  определяется начальными значениями  $\xi_0$  и  $\gamma_0$ .

Решения уравнения (2.5) и построение "характеристического графика" (фиг. 1) дают наглядное представление о колебательном режиме. Возможны два основных варианта пересечения кривых  $F_1(\xi)$  и  $\pm F_2(\xi)$  для "грубой" системы, которым отвечают два основных колебательных режима:

1) обе точки пересечения кривых лежат на одной и той же параболе  $+F_1(\xi)$  или  $-F_1(\xi)$  (кривые 1, 2 на фиг. 1, а);

2) парабола  $F_2(\xi)$  пересекает на отрезке  $[0, 1]$  обе параболы  $+F_1(\xi)$  и  $-F_1(\xi)$  (кривая 3).

В первом случае разность фаз  $\gamma$  будет осциллировать около значения  $\gamma = \pm n\pi/2$ . Происходит синхронизация колебаний "в среднем" за период модуляции: в моменты достижения экстремумов по  $a_1$  и  $a_2$  колебания по обеим степеням свободы происходят в фазе или антифазе, если обе точки пересечения лежат на нижней ветви, либо разность фаз в эти моменты равна  $\pi/2$  ( $3\pi/2$ ), если обе точки — на ветви  $F_1 > 0$ .

Во втором случае разность фаз монотонно увеличивается, пробегая в моменты достижения экстремумов последовательные значения  $n\pi/2$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Эти два типа колебательных режимов с осциллирующей и монотонно возрастающей разностью фаз будем называть модуляциями первого и второго типа соответственно.

Решение уравнения (2.3) имеет вид

$$\pm \frac{1}{|\Gamma_0|} \int_{\xi_0}^{\xi} [F_1^2(\xi) - F_2^2(\xi)]^{-1/2} d\xi = T_2 - T_{20}, \quad \xi_0 = \xi(T_{20}) \quad (2.6)$$

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_4$  — корни полинома четвертой степени  $F_1^2(\xi) - F_2^2(\xi)$ , расположенные в порядке возрастания, причем  $\xi_2$  и  $\xi_3$  лежат внутри области, ограниченной параболой  $\pm F_1(\xi)$ . Полупериод модуляции (в случае осцилляции фаз) соответствует изменению  $\xi$  в интервале  $(\xi_2, \xi_3)$ , поэтому период модуляции равен

$$T^* = \frac{2}{|\Gamma_0| |1 - \Gamma_1^2|^{1/2}} \int_{\xi_2}^{\xi_3} [(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)]^{-1/2} d\xi \quad (2.7)$$

Для "негрубых" систем следует рассмотреть особые случаи расположения кривой  $F_2(\xi)$  (фиг. 1б, в): прохождение параболы  $F_2(\xi)$  через точки  $\xi = 0$  или  $\xi = 1$  (фиг. 1, б), "внешнее" или "внутреннее" касание парабол  $F_1(\xi)$  и  $F_2(\xi)$  (соответственно линии 1 и 2 на фиг. 1, в). В этих случаях два из корней  $\xi_j$  совпадают:

в первом случае  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ , либо  $\xi_3 = \xi_4 = 1$ , в случаях 2 и 3  $\xi_2 = \xi_3$ . Так как при совпадении двух корней  $\xi_j$  несобственный интеграл в (2.7) становится расходящимся, период модуляции стремится к бесконечности при приближении к этим режимам. Это "граничные" режимы, отделяющие модуляции двух отмеченных выше типов (линии 1, 3) и соответствующие сепаратрисам в плоскости  $(\xi, \gamma)$ , либо режимы стационарных колебаний без модуляции (кривые 2). Отметим, что описанные в работе [4] "аперриодические" колебания отвечают указанным граничным режимам.

**3. Стационарные точки, сепаратрисы, амплитудно-фазовые портреты.** Рассмотрим возможные АФ-портреты в плоскости  $(\xi, \gamma)$ , определяемые интегралом (2.2) и наглядно характеризующие колебательные режимы в системе.

Стационарные точки, отвечающие колебаниям без модуляции, на основании (1.13) находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} \xi(1 - \xi) \sin 2\gamma &= 0 & (3.1) \\ \xi\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_0(\frac{1}{2} - \xi) \cos 2\gamma &= 0 \end{aligned}$$

которая может иметь следующие решения:

$$\xi = 0, \quad \cos 2\gamma = -2\Gamma_2 / \Gamma_0 \quad (3.2)$$

$$\xi = 1, \quad \cos 2\gamma = -2(\Gamma_1 + \Gamma_2) / \Gamma_0 \quad (3.3)$$

$$\gamma = \pm n\pi / 2 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \xi = \xi_{\pm}^* = (\pm\Gamma_0 / 2 - \Gamma_2) / (\Gamma_1 \pm \Gamma_0) \quad (3.4)$$

Эти решения существуют при выполнении соответственно следующих условий:

$$1) |2\Gamma_2| \leq |\Gamma_0|, \quad 2) |\Gamma_1 + \Gamma_2| \leq |\Gamma_0|, \quad 3) 0 \leq \xi_{+}^* \leq 1, \quad 4) 0 \leq \xi_{-}^* \leq 1 \quad (3.5)$$

Ограничимся, учитывая периодичность по  $\gamma$ , прямоугольником в плоскости  $(0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \gamma < \pi)$ . Стационарные точки (3.2)—(3.4) могут располагаться на контурных линиях этого прямоугольника и средней линии  $\gamma = \pi/2$  (не более одной точки на линии). Характер стационарной точки проще всего исследовать при помощи (2.2), рассматривая вид интегральных кривых в окрестности стационарной точки. Стационарные точки при  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  являются седловыми и, следовательно, неустойчивыми. Отсюда следует, что наличие второй степени свободы делает неустойчивыми колебания по одной обобщенной координате, если стационарные точки (3.2) или (3.3) существуют.

В окрестностях стационарных точек на линиях  $\gamma = \pm n\pi/2$  траектории могут быть как эллиптического, так и гиперболического типа, и, следовательно, эти стационарные точки могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Условия устойчивости для нечетного и четного  $n$  соответственно имеют вид

$$5) \Gamma_0(\Gamma_0 + \Gamma_1) > 0, \quad 6) \Gamma_0(\Gamma_0 - \Gamma_1) > 0 \quad (3.6)$$

Устойчивым стационарным точкам на характеристическом графике (фиг. 1, в) отвечает "внешнее" касание парабол (линия 1), а неустойчивым точкам — "внутреннее" касание (линии 2).

Стационарные точки на линиях  $\gamma = \pm n\pi/2$  соответствуют синхронным одночастотным режимам, т.е. нормальным колебаниям нелинейной системы [8]. Точкам на линиях  $\gamma = 0$  и  $\gamma = \pi$  в конфигурационном пространстве  $(u_1, u_2)$ , как следует из (1.2),

(1.6), отвечают две прямые линии  $u_2 = \pm hu_1$ , где

$$h = \frac{a_2}{a_1} = \left( \frac{1 - \xi_*^-}{\xi_*^-} \right)^{1/2} = \left( \frac{\Gamma_0/2 - \Gamma_1 - \Gamma_2}{\Gamma_0/2 + \Gamma_2} \right)^{1/2}$$

Стационарным точкам на линиях  $\gamma = \pi/2$  и  $3\pi/2$  отвечают эллипсы

$$\frac{u_1^2}{\xi_*^+} + \frac{u_2^2}{1 - \xi_*^+} = E\varepsilon^2$$

а точкам на линиях  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$  — прямые, совпадающие с осями  $Ou_2$  и  $Ou_1$ .

Сепаратрисы проходят через возможные неустойчивые стационарные точки. Для сепаратрисы, проходящей через "левые" точки (3.2), следует в (2.2) положить  $C = 0$ . Получаем уравнения двух ветвей

$$1) \xi = 0, \quad 2) \cos 2\gamma = -(\xi\Gamma_1 + 2\Gamma_2)/[\Gamma_0(1 - \xi)] \quad (3.7)$$

которые существуют при выполнении условия 1 (3.5). "Правая" сепаратриса, проходящая через стационарные точки (3.3), существует при выполнении условия 2. Уравнения ветвей этой сепаратрисы получаются из (2.2) при  $C = \Gamma_1 + 2\Gamma_2$ :

$$1) \xi = 1, \quad 2) \cos 2\gamma = [(\xi + 1)\Gamma_1 + 2\Gamma_2]/(\Gamma_0\xi) \quad (3.8)$$

Центральная сепаратриса (ЦС), проходящая через стационарные точки (3.4) при нечетном (или четном)  $n$ , существует при выполнении условия 3 (условия 4) и нарушении условия 5 (условия 6). Подставляя в (2.2) координаты точки (3.4), получаем  $C = (-\Gamma_2 \pm \Gamma_0/2)^2 / (\mp\Gamma_0 - \Gamma_1)$  и уравнения ветвей центральной сепаратрисы:

$$\xi = B \pm \sqrt{B^2 - D} \quad (3.9)$$

$$B = \frac{\Gamma_0 \cos 2\gamma + \Gamma_2}{\Gamma_0 \cos 2\gamma - \Gamma_1}, \quad D = \frac{(\Gamma_2 \mp \Gamma_0/2)^2}{(\Gamma_1 \pm \Gamma_0)(\Gamma_1 - \Gamma_0 \cos 2\gamma)}$$

Стационарные точки и сепаратрисы обладают следующими свойствами.

1°. Если существуют "левые" стационарные точки (3.2) (т.е. выполняется условие 1), то в прямоугольнике  $(0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \gamma < \pi)$  существует хотя бы одна "промежуточная" стационарная точка (3.4) на линии  $\gamma = \pi/2$  или  $\gamma = 0$ , и эта точка устойчива.

Действительно, при выполнении условия 1 знак числителя в условиях 3, 4 определяется знаком первого слагаемого, а для их модулей имеем:  $|\pm\Gamma_0/2 - \Gamma_2| \leq |\Gamma_0|$ , если знаки  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$  одинаковы, то знак знаменателя в условии 3 совпадает со знаком числителя, так как при этом  $|\Gamma_1 + \Gamma_0| > |\Gamma_0|$ , то выполняется условие 3 и, очевидно, условие 5. В случае же разных знаков  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$  в условии 4 знаки знаменателя и числителя совпадают и  $|\Gamma_1 - \Gamma_0| > |\Gamma_0|$ , тогда выполняются условия 4 и 6.

Аналогичное утверждение справедливо для "правых" стационарных точек (3.3).

2°. Если существует одна стационарная неустойчивая точка (3.4) на линии  $\gamma = \pi/2$  (или  $\gamma = 0$ ), то существует, и притом устойчивая, стационарная точка на линии  $\gamma = 0$  ( $\gamma = \pi/2$ ); сепаратрисы (3.7) и (3.8) при этом отсутствуют.

Пусть выполняется условие 3 и не выполняется условие 5 (неустойчивая стационарная точка при  $\gamma = \pi/2$ ). Тогда  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  имеют разные знаки и  $|\Gamma_1| \geq |\Gamma_0|$ . Из условия 3 следует (так как знак знаменателя определяется знаком  $\Gamma_1$  и противоположен знаку  $\Gamma_0$ ), что знаки  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_2$  совпадают и  $|\Gamma_2| > |\Gamma_1|/2$ . Следовательно, нарушается условие 1. Рассматривая отдельно случаи  $\Gamma_1 > 0$  и  $\Gamma_1 < 0$  с учетом того, что знак  $\Gamma_1$  противоположен знакам  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_2$  и  $|\Gamma_1| \geq |\Gamma_0|$ , получаем, что в обоих случаях  $|\Gamma_1 + \Gamma_0| \geq |\Gamma_0|/2$ , т.е. нарушается условие 2, а также нарушается неравенство (справа) в условии 4, что и доказывает утверждение.

Эти свойства позволяют описать возможные АФ-портреты в плоскости  $(\xi, \gamma)$ . Каждая боковая сепаратриса (БС) соединяет две неустойчивые стационарные точки при  $\xi = 0$  или при  $\xi = 1$ . Ветви этих сепаратрис охватывают одну устойчивую стационарную точку при  $\gamma = \pi/2$  или  $\gamma = 0$  ( $0 < \xi < 1$ ). Можно проверить, что если, например, между "левыми" сепаратрисами оказывается точка на линии  $\gamma = 0$ , то абсцисса точки пересечения сепаратрисы с прямой  $\gamma = 0$  вдвое больше абсциссы стационарной точки  $\xi_*$ ; очевидно, что  $\xi_* < 1/2$ . Аналогичное свойство выполняется для правой сепаратрисы: здесь обязательно охватываемая ее ветвями стационарная точка оказывается в правой половине прямоугольника. Сепаратриса, исходящая из  $\xi = 0$ , не может пересечь линии  $\xi = 1$ , и наоборот.

Ветви ЦС соединяют две неустойчивые стационарные точки (3.4), соответствующие четным или нечетным значениям  $n$ , охватывая при этом устойчивую стационарную точку. ЦС не могут пересечь линии  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Внутри областей, охваченных БС или ЦС, осуществляется модуляционный режим первого типа, вне этих областей – второго типа.

Таким образом, возможны четыре качественно различных типа АФ-портретов, определяемых условиями 1–6 и показанных на фиг. 2.

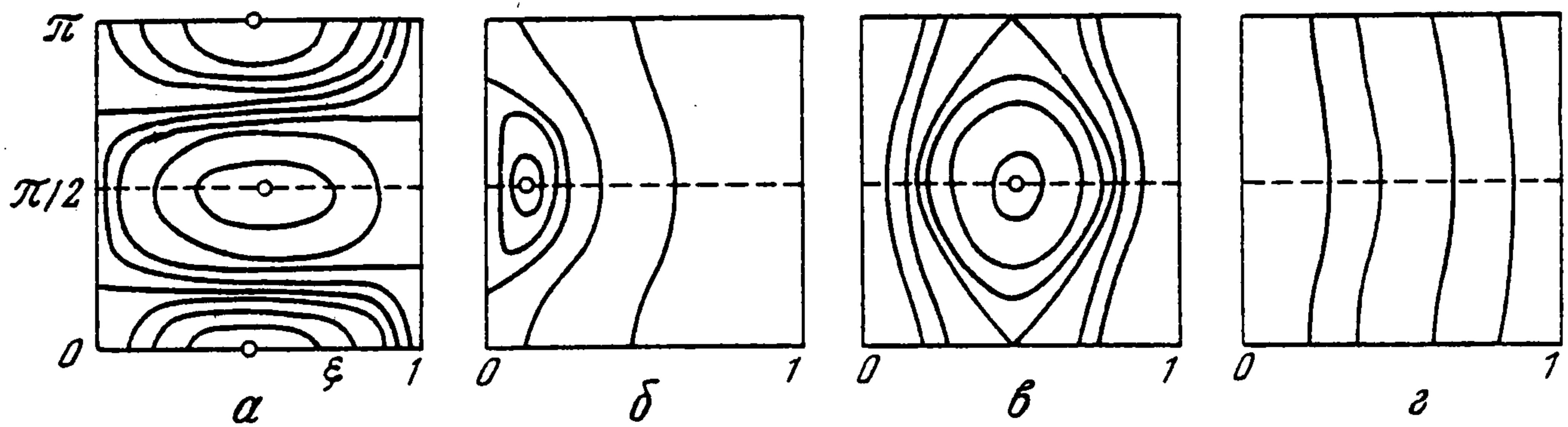
1°. Выполняются условия 1, 2. Имеются устойчивые стационарные точки при  $\gamma = n\pi/2$  (3.4) для четных и нечетных  $n$ , в левой ( $\xi < 1/2$ ) и правой ( $\xi > 1/2$ ) частях прямоугольника, т.е. существуют три устойчивые нормальные формы (и две тривиальные неустойчивые  $u_k = 0$ ,  $k = 1, 2$ ). Каждая из стационарных точек "охватывается" соответствующей БС; ЦС отсутствуют (фиг. 2, а).

2°. Выполняется только одно из условий 1, 2. Имеется устойчивая стационарная точка (3.4) только при нечетном или четном  $n$  и только одна БС (левая, если выполняется условие 1, и правая, если выполняется условие 2); ЦС отсутствуют (фиг. 2, б). Из нормальных форм, кроме одной формы  $u_k = 0$ ,  $k = 1$  или  $k = 2$ , существуют и устойчивы либо прямолинейная (если выполняется условие 4), либо эллиптическая (при выполнении условия 3).

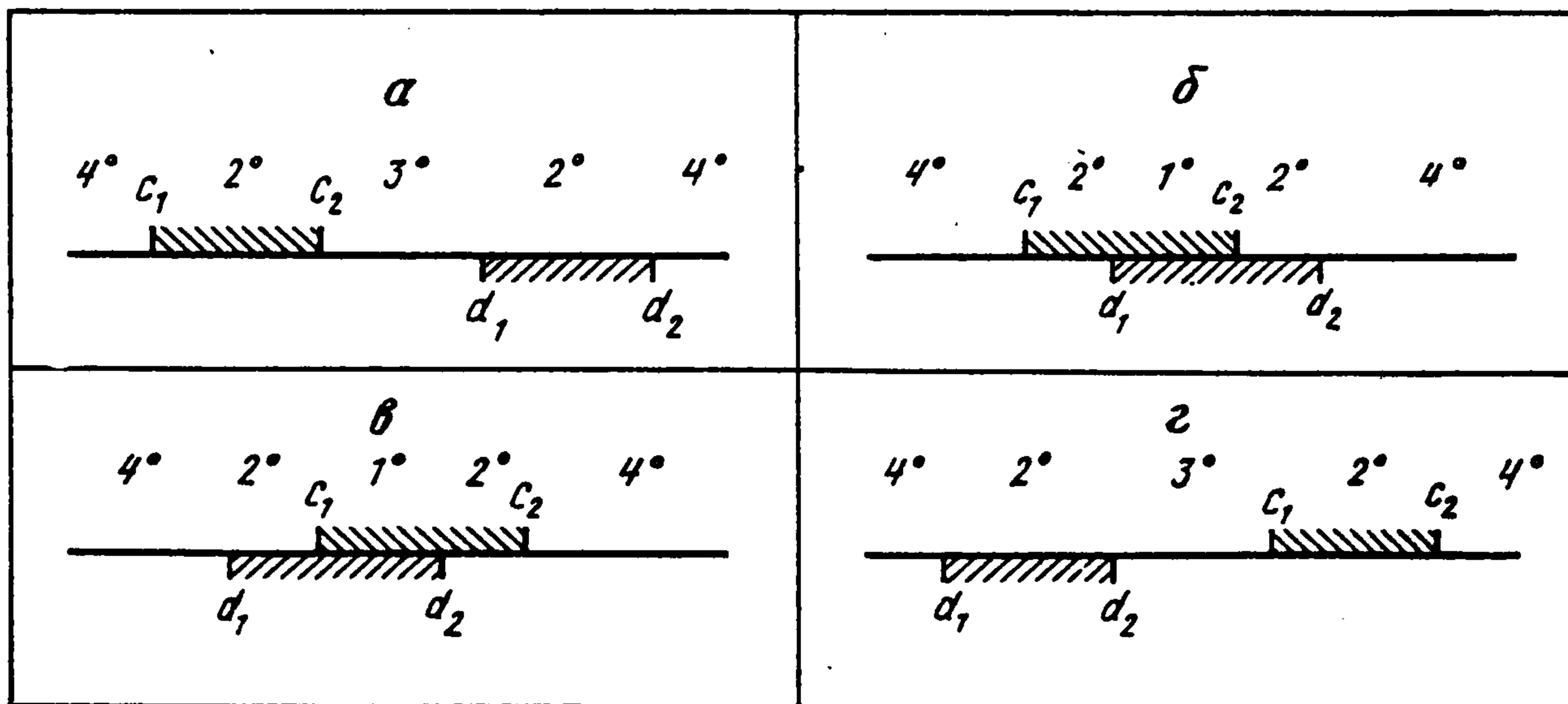
3°. Не выполняются оба условия 1, 2, но выполняется условие 3. Устойчивые и неустойчивые стационарные точки (3.4) чередуются (причем устойчивой будет точка при нечетном  $n$ , если выполняется условие 5). Есть ЦС, но отсутствуют БС (фиг. 2, в). Существуют три нормальные формы, из которых устойчива либо прямолинейная (при выполнении условия 6), либо эллиптическая (при выполнении условия 5).

4°. Не выполняются условия 1–3. Стационарные точки (нормальные формы) и сепаратрисы отсутствуют. Все колебательные режимы относятся к модуляциям типа 2, причем модуляция относительно мала по сравнению со случаями 1°–3° (фиг. 2, г).

В случаях 1°–3° можно выделить подслучаи. В случае 1° имеются два подслучая, различающиеся расположением левой стационарной точки – на линии  $\gamma = 0$  или



Фиг. 2



Фиг. 3

$\gamma = \pi/2$ . Аналогично в случае  $3^\circ$  устойчивой может быть стационарная точка при  $\gamma = 0$  или  $\gamma = \pi/2$ . Для случая  $2^\circ$  возможны четыре подслучая – левая и правая сепаратриса, стационарная точка при  $\gamma = 0$  или  $\gamma = \pi/2$ . Соответствующие АФ-портреты можно получить из приведенных на фиг. 2.

**4. Влияние "расстройки" частот на поведение системы.** Введем параметры

$$\alpha_1 = b_{11} / b_{12}, \quad \alpha_2 = b_{22} / b_{12}, \quad \sigma^0 = 4\sigma / (b_{12}E) \quad (4.1)$$

Тогда условия 1–6 можно представить в виде:

- 1)  $3\alpha_2 - 3 \leq \sigma^0 \leq 3\alpha_2 - 1$
- 2)  $-3\alpha_1 + 1 \leq \sigma^0 \leq -3\alpha_1 + 3$
- 3)  $-3\alpha_1 + 1 \leq \sigma^0 \leq 3\alpha_2 - 1$     при  $\alpha_1 + \alpha_2 > \frac{2}{3}$   
 $3\alpha_2 - 1 \leq \sigma^0 \leq -3\alpha_1 + 1$     при  $\alpha_1 + \alpha_2 < \frac{2}{3}$     (4.2)
- 4)  $3\alpha_2 - 3 \leq \sigma^0 \leq -3\alpha_1 + 3$     при  $\alpha_1 + \alpha_2 < 2$   
 $-3\alpha_1 + 3 \leq \sigma^0 \leq 3\alpha_2 - 3$     при  $\alpha_1 + \alpha_2 > 2$
- 5)  $\alpha_1 + \alpha_2 > \frac{2}{3}$
- 6)  $\alpha_1 + \alpha_2 < 2$

Безразмерный параметр расстройки частот  $\sigma^0$  в отличие от  $\sigma$  и  $E$  не зависит от выбора  $\varepsilon$  и может быть записан следующим образом:

$$\sigma^0 = 4\sigma_* b_{12}^{-1} [u_1^2(0) + u_2^2(0)]^{-1}, \quad (\sigma_* = \varepsilon^2 \sigma = \omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (4.3)$$

Как видно из (4.2), тип АФ-портрета определяется взаимным расположением точек

$$c_1 = 3\alpha_2 - 3, \quad c_2 = 3\alpha_2 - 1, \quad d_1 = -3\alpha_1 + 1, \quad d_2 = -3\alpha_1 + 3 \quad (4.4)$$

и величиной  $\sigma^0$ . Возможны четыре случая расположения интервалов  $(c_1, c_2)$  и  $(d_1, d_2)$ , показанные на фиг. 3 ( $c_2 < d_1$ ;  $c_1 < d_1 < c_2$ ;  $c_1 < d_2 < c_2$ ;  $d_2 < c_2$ ). Сверху над интервалами указан тип АФ-портрета (легко определить по (4.2)). В случае *a* в интервале  $(c_2, d_1)$  устойчивой является стационарная точка при  $\gamma = 0$  ( $\pi$ ), т. е. прямолинейная нормальная форма, и неустойчивой — при  $\gamma = \pi/2$  ( $3\pi/2$ ) (т. е. эллиптическая). В случае 2 эти точки (и нормальные колебания) "обмениваются" устойчивостью.

Фиг. 3 наглядно показывает влияние параметра  $\sigma^0$  на поведение системы. Если  $\sigma^0$  находится в интервале

$$\delta_1 < \sigma^0 < \delta_2, \quad \delta_1 = \min(c_1, d_1), \quad \delta_2 = \max(c_2, d_2) \quad (4.5)$$

то имеют место АФ-портреты типов 1°–3° со стационарными точками и выраженной модуляцией амплитуд и фаз (энергообменом). Если  $\sigma^0$  выходит за пределы этого интервала, отмечается АФ-портрет типа 4° с относительно небольшой модуляцией. Таким образом, условие (4.5) позволяет конкретизировать понятие малости расстройки частот. Минимальная ширина интервала (4.5) равна двум. Центром интервала является точка

$$\alpha_* = \frac{3}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{3}{2}(b_{22} - b_{11}) / b_{12}$$

В случае  $b_{11} = b_{22}$  имеем  $\alpha_1 = \alpha_2$ ;  $\alpha_* = 0$ , т. е. интервал (4.5) симметричен относительно начала координат.

При  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  интервал оказывается смещенным относительно начала координат и при достаточно большом  $|\alpha_2 - \alpha_1|$  (или  $|b_{22} - b_{11}|$ ) точка  $\sigma^0 = 0$  может оказаться вне интервала. Нужно учесть также, что знак  $\sigma^0$  определяется знаком  $b_{12}$  (можно всегда полагать  $\sigma_* > 0$ , т. е.  $\omega_2 > \omega_1$ ). Условие знакоопределенности  $\sigma^0$  выделяет из интервала (4.5) его знакоположительную или знакоотрицательную часть (если она существует). Отсюда следуют два вывода:

1) необязательно меньшему значению  $\sigma^0$  соответствует большая модуляция; возможны сочетания коэффициентов  $b_{ij}$ , при которых АФ-портреты типов 1°–3° имеют место в интервалах  $\sigma^0$ , удаленных от точки 0;

2) при определенных сочетаниях  $b_{ij}$  возможен только АФ-портрет типа 4° независимо от энергии и расстройки частот.

В приведенном анализе естественно разделяется влияние энергии колебаний и отношения начальных амплитуд двух форм на энергообмен. Величина  $E$  влияет на  $\sigma^0$ , согласно (4.3) (причем увеличение  $E$  равносильно уменьшению  $\sigma$ ), и определяет, следовательно, наряду с  $\sigma_*$  тип АФ-портрета. Отношение начальных амплитуд  $\xi_0$  определяет выбор фазовой траектории на данном АФ-портрете.

Рассмотрим частный случай  $b_{11} = b_{22} = 0, b_{12} \neq 0$ . Тогда  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $c_1 = -3$ ,  $c_2 = -1$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 3$ , т. е. имеем случай *a* фиг. 3. Условие 5 не выполняется, а условие 6 вы-

полняется. При  $-3 < \sigma^0 \leq -1$  имеем АФ-портрет типа 2° с левой сепаратрисой и устойчивой стационарной точкой при  $\gamma = 0 (\pi)$ , т.е. с прямолинейными нормальными колебаниями. При  $-1 < \sigma^0 < 1$  – АФ-портрет типа 3° с устойчивой стационарной точкой при  $\gamma = 0 (\pi)$  и неустойчивой – при  $\gamma = \pi/2 (3\pi/2)$ , т.е. с устойчивыми прямолинейными нормальными формами и неустойчивой – эллиптической. При  $1 < \sigma^0 < 3$  – АФ-портрет типа 2° с правой сепаратрисой и устойчивыми прямолинейными нормальными формами. Наконец, при  $\sigma^0 < -3$  и  $\sigma^0 > 3$  – АФ-портрет типа 4°.

В заключение отметим, что выполненные численные расчеты по уравнению (1.1) с целью оценки точности решения, полученного методом многих масштабов, показали практически полное совпадение аналитического и численного решений во всех рассмотренных вариантах при произвольном выборе  $\varepsilon \leq 0,1$  и для амплитуд до 0,5 (погрешность в определении амплитуд порядка 0,1%). Но при увеличении  $\varepsilon$  выше 0,1 погрешность быстро возрастала, например при  $\varepsilon = 0,15$  погрешность вычисления амплитуд доходила до 30%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Nayfeh A.H., Mook D.T. *Nonlinear oscillations*. New York: Wiley, 1979. 704 p.
2. Abdel-Ghaffar A.M., Rubin L.I. *Nonlinear free vibrations of suspension bridges: theory and applications* // J. Eng. Mech. Amer. Sol. Civil Eng. 1983. V. 109. № 1. P. 313–345.
3. Россихин Ю.А., Шитикова М.В. *Нелинейные свободные пространственные колебания висячих комбинированных систем* // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 1003–1011.
4. Россихин Ю.А., Шитикова М.В. *Влияние начальных условий на характер протекания колебательных процессов в висячей комбинированной системе.* // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 143–154.
5. Аксютян Г.К., Попов Н.А. *Собственные нелинейные колебания виброизолированной системы с двумя степенями свободы.* // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1978. № 8. С. 53–57.
6. Chen J.C., Babcock C.D. *Nonlinear vibration of cylindrical shells.* // AIAA Journal. 1975. V. 13. № 7. P. 868–876.
7. Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С. *Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек.* Киев: Наук. думка, 1984. 219 с.
8. Rosenberg R.M., Hsu C.S. *On the geometrization of normal vibrations of nonlinear systems having many degrees of freedom.* // Тр. междунар. симпоз. по нелинейным колебаниям. Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. С. 380–415.

Днепропетровск

Поступила в редакцию  
8.I.1992