УДК 531.36:534.1

© 1993 г. А.Л. Куницын, А.С. Муратов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИАВТОНОМНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ВНУТРЕННЕМ РЕЗОНАНСЕ

Рассматривается задача устойчивости периодического движения многомерной периодической системы с малым параметром, при обращении которого в нуль она становится автономной. Исследуется критический случай одного нулевого и N пар чисто мнимых характеристических показателей в предположении, что система является обратимой (t-инвариантной) в смысле Биркгофа. Показывается, что при отсутствии параметрического резонанса характеристические показатели исходной системы с точностью до первой степени малого параметра совпадают с характеристическими показателями соответствующей автономной системы, если среди последних нет кратных. Далее рассматриваются случаи внутренних резонансов третьего и четвертого порядков, когда система может быть неустойчивой и когда требуется проводить нелинейный анализ. Формулируются необходимые и достаточные условия устойчивости и устанавливается влияние на устойчивость малых периодических членов.

Полученные результаты применяются для исследования устойчивости периодического поступательно-вращательного движения геостационарного спутника с малой реактивной тягой, позволяющей ему зависать над любой точкой земной поверхности.

1. Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения

$$x^{\cdot}=X(x,t,\varepsilon),\qquad x\in R^{2N+1}$$
$$X(x,t,\varepsilon)=\left[A_0+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k A_k(t)\right]x+X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k X_k(x,t)\tag{1.1}$$

где $x=(x_1,\ldots,x_{2N+1})$ – вектор фазовых переменных, $X_0(x)$ – аналитическая вектор-функция x, содержащая члены не ниже второго порядка относительно x; $X_k(x,t)$ – ω – периодические по времени t, аналитические в некоторой окрестности начала координат вектор-функции x, содержащие члены не ниже второго порядка относительно x; A_0 и $A_k(t)$ соответственно постоянная и ω – периодическая $(2N+1)\times(2N+1)$ – матрицы, такие, что линейная часть системы (1.1) имеет один нулевой и N пар чисто мнимых различных характеристических показателей $\pm\lambda_s$ ($\lambda_s^2<0$; $s=1,\ldots,N$); ε – малый параметр, а средние значения элементов матриц $A_k(t)$ за период равны нулю, что, очевидно, не нарушает общности. Кроме того, будем полагать, что система (1.1) обратима [1, 2] (или t-инвариантна [3]), т.е. имеет место тождество (E – единичная матрица)

$$MX(x,t,\varepsilon)+X(Mx,-t,\varepsilon)\equiv 0,\qquad M^2=E$$

При анализе устойчивости тривиального решения системы (1.1) при $\varepsilon=0$ было показано

[4, 5], что указанной системой может, в частности, описываться возмущенное поступательно-вращательное движение геостационарного спутника, использующего малую тягу для обеспечения движения по круговой орбите на произвольной широте. Можно показать, что исследование устойчивости периодических движений, возникающих в окрестности рассмотренных [4] положений относительного равновесия, приводят к уравнениям возмущенного движения вида (1.1), в которых роль малого параметра ε выполняет эксцентриситет эллиптической орбиты центра масс спутника.

Как известно [6], вопрос об устойчивости тривиального решения системы (1.1) сводится к вопросу об устойчивости автономной системы с одним нулевым и N парами чисто мнимых корней, рассмотренной в [5].

Для системы, содержащей малый параметр, интересно выяснить роль этого параметра в решении задачи устойчивости.

Займемся вначале преобразованием линейной части системы (1.1), приведем ее к автономному виду, для чего введем новые переменные $z = (z_1,..., z_{2N+1})$ по формулам

$$x = [B_0 + \varepsilon B_1(t) + \ldots]z \tag{1.2}$$

где B_0 – постоянная, а $B_1(t)$ – ω – периодическая относительно t матрица.

Потребуем, чтобы в новых переменных система имела вид

$$z^{\cdot} = [\Lambda_0 + \varepsilon\Lambda_1 + \ldots]z \tag{1.3}$$

где Λ_0 и Λ_1 – постоянные диагональные матрицы.

Дифференцируя по времени равенство (1.2) и учитывая (1.1), получим для j-столбцов матриц B_0 и B_1 следующие системы уравнений:

$$(A_0 - \lambda_{0j}E)B_{0j} = 0 \quad (j = 1,\ldots,2N+1) \tag{1.4}$$

$$\dot{B}_{1j} - (A_0 - \lambda_{0j}E)B_{1j} = (A_1 - \lambda_{1j}E)B_{0j} \tag{1.5}$$

где λ_{0j} и λ_{1j} - элементы матриц Λ_0 и Λ_1 соответственно (из (1.4) вытекает, что λ_{0j} – собственные значения матрицы A_0).

Рассмотрим вопрос о существовании ω – периодического решения систем (1.5). Все корни характеристического уравнения для каждой из этих систем найдутся по формуле

$$\kappa_{js} = i(\operatorname{Im}\lambda_{0s} - \operatorname{Im}\lambda_{0j}) \quad (s, j = 1,\ldots,2N+1) \tag{1.6}$$

Вводя матрицу $e_j(t) = \operatorname{diag}(e^{\kappa_{j1}t},\ldots,e^{k_{jN+1}t})$, рассмотрим нормированную фундаментальную матрицу

$$B_{1j}^{n}(t) = B_0 e_j(t) B_0^{-1} \tag{1.7}$$

Частное решение неоднородной системы (1.5) возьмем в форме Коши

$$B_{1j}^{*}(t) = \int_{n}^{t} B_{1j}^{n}(t-\tau)[A_1(\tau) - \lambda_{1j}E]B_{0j}d\tau \tag{1.8}$$

и выберем произвольные постоянные $C_j = (C_{j1},..., C_{jN+1})^T$ общего решения из условия его периодичности, приводящего к системе уравнений

$$[B_{1j}^{n}(\omega) - E]C_j + B_{1j}^{*}(\omega) = 0 \tag{1.9}$$

Поскольку, как следует из (1.6), характеристическое уравнение каждой из систем (1.5) обязательно имеет один (и только один) нулевой корень, то для системы (1.9) будем иметь $\det[B_{1j}^{n}(\omega) - E] = 0$ и, следовательно,

$$\operatorname{rank}[B_{1j}^{n}(\omega) - E] = 2N \tag{1.10}$$

если ни при каких натуральных k не выполняются равенства

$$\kappa_{sj}\,\omega = 2ik\pi \tag{1.11}$$

что и будем полагать в дальнейшем. (Для системы второго порядка с парой мнимых собственных значений указанное соотношение представляет, очевидно, условие параметрического резонанса.)

Из (1.10) вытекает, что система (1.9) либо не имеет ни одного решения, либо имеет их бесчисленное множество. В последнем случае матрица $B_{1j}^{*}(\omega)$ должна удовлетворять условию

$$\operatorname{rank}\{[B_{1j}^{n}(\omega) - E],\ -B_{1j}^{*}(\omega)\} = 2N \tag{1.12}$$

Условию (1.12) можно удовлетворить, положив в (1.8) $\lambda_{1j} = 0$.

Действительно, при учете (1.7) и (1.8) можно записать

$$B_{1j}^{*}(\omega) = \int_0^{\omega} B_{1j}^{n}(\omega-\tau)A_1(\tau)B_{0j}d\tau = \int_0^{\omega} B_{1j}^{n}(\omega-\tau)A_{1j}(\tau)d\tau \tag{1.13}$$

где элементы столбцовой матрицы $A_{1j}(\tau)$ – ω – периодические функции τ, разложимые в ряд Фурье. Это позволяет представить последний интеграл, входящий в (1.13), в виде

$$B_{1j}^{*}(\omega) = B_0 e(\omega-\tau)B_0^{-1}A_{1j}^{*}(\tau)\Big|_0^{\omega} = -[B_{1j}^{n}(\omega) - E]A_{1j}^{*}(\omega)$$

$$A_{1j}^{*}(\omega) = A_{1j}^{*}(0)$$

Отсюда видно, что последний столбец расширенной матрицы, фигурирующей в (1.12), является линейной комбинацией всех остальных ее столбцов, и, следовательно, условие (1.12) выполняется при $\lambda_{1j} = 0$.

Таким образом, получен важный вывод о том, что при отсутствии в системе условия соизмеримости (1.11) характеристические показатели исходной системы с точностью до первой степени ε совпадают с собственными значениями матрицы A_0 (к этому выводу можно, по-видимому, придти и из более сложных рассуждений [3]).

2. На основании вышеизложенного систему (1.1) можно представить в виде

$$\begin{gathered} y^{\cdot} = \sum_{m=2}^{\infty} Y^{(m)} + Y, \quad u^{\cdot} = \Lambda_* u + \sum_{m=2}^{\infty} U^{(m)} + U, \\ \bar{u}^{\cdot} = -\Lambda_* \bar{u} + \sum_{m=2}^{\infty} \bar{U}^{(m)} + \bar{U} \\ \Lambda_* = \operatorname{diag}(i\lambda_{01}, \ldots, i\lambda_{0N}) \\ u = (u_1, \ldots, u_N), \quad \bar{u} = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_N) \end{gathered} \tag{2.1}$$

где u, $\bar{u}$ – комплексно-сопряженные переменные, Y, U, $\bar{U}$ – аналитические функции y, u, $\bar{u}$, t, ε, содержащие ε в степенях, не ниже второй; $Y^{(m)}$, $U^{(m)}$, $\bar{U}^{(m)}$ – формы m-го порядка с ω-периодическими коэффициентами, представимыми в виде

$$Y^{(m)} = Y_0^{(m)}(y,u,\bar{u}) + \varepsilon Y_1^{(m)}(y,u,\bar{u},t), \quad U^{(m)} = U_0^{(m)}(y,u,\bar{u}) + \varepsilon U_1^{(m)}(y,u,\bar{u},t) \tag{2.2}$$

Если система (2.1) обладает автоморфизмом $t \to -t, u \to \bar{u}, \bar{u} \to u, y \to y$ (что и будем полагать в дальнейшем), то при надлежащем выборе нормализующего преобразования указанные формы будут иметь только чисто мнимые коэффициенты [4].

Как известно [7], рассматриваемые системы обладают формальной устойчивостью, если между частотами отсутствуют резонансные соотношения $|p|$-го порядка вида

$$\langle p,\lambda_0\rangle = 2\pi\omega^{-1}q; \quad q = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$
$$|p| = p_1+\ldots+p_n \geqslant 3, \quad 1 \leqslant n \leqslant N, \quad p = (p_1,\ldots,p_n) \tag{2.3}$$
$$\lambda_0 = (\lambda_{01},\ldots,\lambda_{0n})$$

где p – целочисленный вектор с взаимно-простыми положительными компонентами.

Рассмотрим те резонансные случаи, в которых вопрос об устойчивости решается первыми нелинейными членами, т.е. резонансы третьего и четвертого порядков; в каждом из этих случаев решение задачи устойчивости существенно зависит от того, равна нулю правая часть (2.3) или нет.

Рассмотрим вначале случай $|p| = 3$ и $q \neq 0$. Проводя нелинейную нормализацию системы (2.1) согласно известной процедуре [8], в полярных координатах r_s, θ_s, получим следующую модельную (содержащую лишь первые нелинейные члены) систему:

$$\begin{aligned}
&y^{\cdot} = 0, \quad r_s^{\cdot} = 2\varepsilon r^{p/2} b_s \sin\theta \quad (s = 1,\ldots,n)\\
&\theta^{\cdot} = \sum_{s=1}^{n} p_s[(\beta_s^0 + \varepsilon\beta_s)y + \varepsilon b_s r^{p/2} r_s^{-1}\cos\theta]\\
&r_\alpha^{\cdot} = 0, \quad \theta_\alpha^{\cdot} = \lambda_{0\alpha} + (\beta_\alpha^0 + \varepsilon\beta_\alpha)y \quad (\alpha = n+1,\ldots,N)\\
&\theta = p_1\theta_1+\ldots+p_n\theta_n, \quad r^{p/2} = \prod_{j=1}^{n} r_j^{p_j/2}, \quad |p| = 3
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь b_s, β_s^0, β_s – постоянные коэффициенты, выражающиеся известным образом [8] через коэффициенты форм (2.2).

Полученная модельная система представляет частный случай систем, рассмотренных в [4, 5], где показано, что вопрос об устойчивости тривиального решения определяется исключительно резонансными коэффициентами b_s, появляющимися только вследствие наличия в исходной системе малых периодических членов. Там же приводятся необходимые и достаточные условия устойчивости, которым должны удовлетворять эти коэффициенты.

При $|p| = 3$ и $q = 0$ модельная система будет отличаться от (2.4) только уравнениями для резонансных переменных r_s, которые примут вид

$$r_s^{\cdot} = 2(b_s^0 + \varepsilon b_s) r^{p/2} \sin\theta \quad (s = 1,\ldots,n) \tag{2.5}$$

где постоянные коэффициенты b_s^0, вычисляются через постоянные коэффициенты форм $Y_0^{(m)}, U_0^{(m)}, \bar{U}_0^{(m)}$ системы (2.2).

Вопрос об устойчивости тривиального решения полученной модельной системы решается только группой уравнений (2.5) [4, 5], а именно: необходимым и достаточным условием устойчивости является наличие перемены знака в ряду коэффициентов $a_s = b_s^0 + \varepsilon b_s$ системы (2.5). Но поскольку при достаточно малых значениях ε знаки a_s совпадают со знаками b_s^0, то в рассматриваемом случае при решении задачи устойчивости для исходной системы ее периодическую часть можно не принимать во внимание.

Перейдем теперь к рассмотрению резонанса четвертого порядка. При $q \neq 0$ модельная система, содержащая члены до третьего порядка включительно, запишется так:

$$
\begin{aligned}
&y^{\cdot} = 0, \quad r_s^{\cdot} = 2\varepsilon b_s r^{p/2} \sin\theta \quad (s = 1,\ldots,n)\\
&\theta^{\cdot} = \sum_{s=1}^{n} p_s[(\beta_{1s}^0 + \varepsilon\beta_{1s})y + (\beta_{2s}^0 + \varepsilon\beta_{2s})y^2 +\\
&+\sum_{j=1}^{N}(\gamma_{sj}^0 + \varepsilon\gamma_{sj})r_j + \varepsilon b_s r^{p/2} r_s^{-1}\cos\theta]\\
&r_\alpha^{\cdot} = 0, \quad \theta_\alpha^{\cdot} = \lambda_{\alpha 0} + (\beta_{1\alpha}^0 + \varepsilon\beta_{1\alpha})y + (\beta_{2\alpha}^0 + \varepsilon\beta_{2\alpha})y^2 +\\
&+\sum_{j=1}^{N}(\gamma_{\alpha j}^0 + \varepsilon\gamma_{\alpha j})r_j \quad (\alpha = n+1,\ldots,N)\\
&\theta = p_1\theta_1 + \ldots + p_n\theta_n, \quad |p| = 4
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Таким образом, и в этом случае исходная периодическая система сводится к автономной, представляющей частный случай систем, рассмотренных в [5]. Согласно полученным в [5] результатам, необходимым и достаточным условием устойчивости тривиального решения системы (2.6) в невырожденном случае (все $b_s \neq 0$) является либо наличие пары коэффициентов b_ν, b_μ противоположного знака, либо при отсутствии перемены знака в ряду b_s должно выполняться неравенство

$$
\left|\sum_{s,j=1}^{n} p_s(\gamma_{sj}^0 + \varepsilon\gamma_{sj})\varepsilon b_s\right| > \prod_{j=1}^{n}\left|\varepsilon b_j\right|^{p_j/2}
\tag{2.7}
$$

Очевидно, в случае резонанса четвертого порядка ($|p| = 4$) при достаточно малых значениях ε неравенство (2.7) будет выполняться всегда и, следовательно, тривиальное решение системы (2.6) в случае $|p| = 4$, $q \neq 0$ всегда устойчиво.

Пусть теперь при резонансе четвертого порядка в (2.3) имеем $q = 0$. Тогда нормализованная модельная система будет отличаться от (2.6) только уравнениями для резонансных переменных r_s. Эти уравнения будут иметь тот же вид, что и (2.5), но при $|p| = 4$. Как видим, знаки всех $a_s = \overset{0}{b_s} + \varepsilon b_s$ и $c_{sj} = \overset{0}{\gamma_{sj}} + \varepsilon\gamma_{sj}$ при достаточно малых значениях ε будут совпадать со знаками $\overset{0}{b_s}$ и $\overset{0}{\gamma_{sj}}$, и, следовательно, при решении задачи устойчивости в этом случае периодические члены в исходной системе можно отбросить. Условия устойчивости полученной автономной системы даются теоремой из [5]. Таким образом, на основании вышеизложенного можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Пусть в системе (1.1) имеет место внутренний резонанс (2.3) третьего или четвертого порядка при $q = 0$. Тогда при решении задачи устойчивости при достаточно малом ε вместо исходной периодической системы можно рассматривать соответствующую автономную систему, получаемую из (1.1) при $\varepsilon = 0$. В случае $q \neq 0$ устойчивость тривиального решения системы (1.1) при резонансе третьего порядка определяется исключительно периодическими членами, каким бы малым ни было ε; при резонансе четвертого порядка и $q \neq 0$ устойчивость тривиального решения системы (1.1) сохраняется и при учете нелинейных членов до третьего порядка включительно.

3. Проведенный анализ позволяет обобщить полученные ранее результаты [4, 8] по исследованию устойчивости поступательно-вращательного движения геостационарного искусственного спутника Земли (ИСЗ), способного зависать над любой точкой земной поверхности вследствие сообщения ему постоянного по модулю малого реактивного ускорения w. Покажем, что в малой окрестности найденных в [4] устойчивых стационарных движений, представляющих относительное равновесие ИСЗ в равномерно вращающейся вместе с Землей системе координат, существуют устойчивые периодические движения с периодом, близким периоду вращения Земли, и с тем же множеством неустойчивых резонансных режимов.

Для этого уравнения движения такого ИСЗ, представляющего, как и в [4, 8], тело переменной массы с твердой оболочкой, запишем во вращающейся с угловой скоростью ω прямоугольной системе координат xyz, начало которой находится в центре Земли, а ось z, вокруг которой происходит вращение, направлена по оси вращения Земли. Будем считать ω равной угловой скорости обращения ИСЗ по кеплеровой эллиптической орбите с полуосью a, равной радиусу орбиты стационарного экваториального ИСЗ, и произвольным, но достаточным малым эксцентриситетом e, так что

$$\omega \equiv \frac{d\nu}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}} \tag{3.1}$$

где ν – истинная аномалия на рассматриваемой эллиптической орбите, а μ – гравитационный параметр Земли.

При учете малости e в дальнейшем вместо (3.1) будем рассматривать приближенное выражение

$$d\nu / dt = \omega_e(1+2e\cos\nu) \tag{3.2}$$

где ω_e – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

Тогда используя обозначения и допущения работы [8], получим следующие уравнения поступательно-вращательного движения ИСЗ с малым постоянным по величине реактивным ускорением, вектор которого неподвижен в связанной с ИСЗ системе координат и постоянно проходит через его центр масс:

$$R^{\cdot\cdot} - R(\theta^{\cdot 2}\cos\varphi + \varphi^{\cdot}) - R\omega^2\cos^2\varphi - 2R\omega\theta^{\cdot}\cos^2\varphi = w\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\sigma_i + \frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial R}$$

$$\frac{d}{dt}(R^2\varphi^{\cdot}) + \frac{1}{2}R(R\theta^{\cdot 2}\sin^2\varphi + \omega^2\sin 2\varphi) + \omega R^2\theta^{\cdot}\sin 2\varphi = Rw\sum_{i=1}^{3}\beta_i\sigma_i$$

$$\frac{d}{dt}(R^2\theta^{\cdot}\cos^2\varphi) + R^2\omega^{\cdot}\cos^2\varphi + R\omega(2R^{\cdot}\cos\varphi - R\varphi^{\cdot}\sin 2\varphi) = Rw\cos\varphi\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\sigma_i$$

$$\beta^{\cdot} = r\beta_2 - q\beta_3 - [(\theta^{\cdot}+\omega)\alpha_1\sin\varphi + \gamma_1\varphi^{\cdot}] \tag{3.3}$$

$$\gamma_1^{\cdot} = r\gamma_2 - q\gamma_3 + [(\theta^{\cdot}+\omega)\alpha_1\cos\varphi + \beta_1\varphi^{\cdot}]$$

$$\gamma_2^{\cdot} = p\gamma_3 - r\gamma_1 + [(\theta^{\cdot}+\omega)\alpha_2\cos\varphi + \beta_2\varphi^{\cdot}]$$

$$Ap^{\cdot} + (C-B)qr = \Omega^2(C-B)\gamma_2\gamma_3 \quad (ABC,\ pqr,\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3)$$

$$\Omega^2 = 3\mu / R^3$$

Здесь R, φ, θ – соответственно расстояние до центра Земли, широта и долгота центра масс ИСЗ в вышеуказанной вращающейся системе координат; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – направляющие косинусы главных осей инерции ИСЗ относительно введенной сферической (орбитальной) системы; σ_i – направляющие косинусы вектора w относительно связанных осей; p, q, r – проекции абсолютной угловой скорости ИСЗ на связанные оси; A, B, C – квадраты радиусов инерции относительно главных осей, предполагаемые постоянными; точкой обозначено дифференцирование по времени t.

Переходя от времени t к новой независимой переменной ν и полагая

$$R = y_1, \quad \varphi = y_2, \quad d\theta / d\nu \equiv \theta' = y_3, \quad R' = y_4, \quad \varphi' = y_5$$

$$p = y_6, \quad q = y_7, \quad r = y_8, \quad \beta_1 = y_9, \quad \gamma_1 = y_{10}, \quad \gamma_{11} = y_{11}, \quad \theta = y_{12}$$

вместо (3.3) получим следующую систему, в которой отброшены нелинейные относительно малого параметра e члены:

$$y_s' = Y_s(e, y_1, \ldots, y_{11}, \nu) \quad (s = 1, \ldots, 11) \quad y_{12}' = y_3 \tag{3.4}$$

Здесь:

$$\begin{gathered}
Y_1 = y_4, \quad Y_2 = y_5, \quad Y_3 = 2ey_3 \sin\nu - 2y_3y_4 / y_1 + 2y_3y_5 \operatorname{tg} y_2 - \\
-2y_4 / y_1 + 2y_5 \operatorname{tg} y_2 + 2e\sin\nu + w\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\sigma_i / (\nu^{\cdot 2} y_1), \\
Y_4 = 2ey_4 \sin\nu + y_1\cos^2 y_2 + (y_3^2\cos^2 y_2 + y_5^2)y_1 + 2y_1y_3\cos^2 y_2 + \\
+\left(w\sum_{i=1}^{3}\gamma_i\sigma_i - \mu / y_1^2\right) / \nu^{\cdot 2}, \quad Y_5 = 2ey_5\sin\nu - 2y_4y_5 / y_1 - \\
-\tfrac{1}{2}y_3^2\sin 2y_2 - \sin y_2\cos y_2 - y_3\sin 2y_2 + w\sum_{i=1}^{3}\beta_i\sigma_i / (\nu^{\cdot 2} y_1) \\
Y_6 = (B - C)(y_7y_8 - 3\mu\gamma_2\gamma_3 / y_1^3) / (A\nu^{\cdot}) \\
Y_7 = (C - A)(y_6y_8 - 3\mu\gamma_1\gamma_3 / y_1^3)(B\nu^{\cdot}) \\
Y_8 = (A - B)(y_6y_7 - 3\mu\gamma_1\gamma_2 / y_1^3) / (C\nu^{\cdot}) \\
Y_9 = (\beta_2y_8 - \beta_3y_7) / \nu^{\cdot} - (\alpha_1y_3\sin y_2 + y_5y_{10}) - (\omega_e\alpha_1\sin y_2) / \nu^{\cdot} \\
Y_{10} = (y_8y_{11} - \gamma_3y_7) / \nu^{\cdot} + \alpha_1y_3\cos y_2 + y_5y_9 + (\omega_e\alpha_1\cos y_2) / \nu^{\cdot} \\
Y_{11} = (y_6\gamma_3 - y_8y_{10}) / \nu^{\cdot} + \alpha_2y_3\cos y_2 + \beta_2y_5 + (\omega_e\alpha_2\cos y_2) / \nu^{\cdot}
\end{gathered} \tag{3.5}$$

где согласно аппроксимации (3.2) нужно взять

$$1 / \nu^{\cdot} = \omega_e^{-1}(1 - 2e\cos\nu), \quad 1 / \nu^{\cdot 2} = \omega_e^{-2}(1 - 4e\cos\nu)$$

При $e = 0$ система (3.4) имеет частное решение

$$\begin{gathered}
y_1 = y_{10}, \quad y_2 = y_{20}, \quad y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = y_9 = y_{10} = \alpha_2 = \alpha_3 = \sigma_1 = 0, \\
y_7 = \omega_e, \quad \beta_2 = \gamma_3 = \cos\lambda, \quad \gamma_2 = -\beta_3 = \sin\lambda
\end{gathered} \tag{3.6}$$

орбитальная устойчивость которого исследовалась в [4] (последнее уравнение системы (3.4) было отброшено, поскольку переменная y_{12} не входит в основную систему, определяющую устойчивость орбиты ИСЗ), и было показано, что область орбитальной устойчивости рассматриваемого стационарного движения (3.6) и неустойчивые резонансные множества практически совпадают с теми, которые были построены [8] при использовании нецентральной модели поля тяготения Земли.

Поскольку правая часть системы (3.4) представляет аналитическую функцию малого параметра e и 2π-периодична по ν, то согласно теореме Пуанкаре [9] она может иметь 2π-периодическое решение, аналитическое по e и обращающееся в решение (3.6) при $e = 0$, если характеристическое уравнение системы уравнений в вариациях при $e = 0$ не имеет корней вида $\pm ki$ ($k = 0, 1, 2,\ldots$); в противном случае правые части соответствующей неоднородной системы должны удовлетворять определенным условиям.

Представляя искомое периодическое решение в виде

$$z(\nu) = y^* + eu(\nu) + \ldots$$

$$z = (z_1, \ldots, z_{11}), \quad u = (u_1, \ldots, u_{11})$$

где $y^* = (y_1^*, \ldots, y_{11}^*)$ – частное решение (3.6), и, полагая в (3.4) $Y_s = Y_s^0(y) + eY_s^1(y, \nu)$, для $u_s(\nu)$ получим систему уравнений

$$u_s' = \sum_{\alpha=1}^{11} \left(\frac{\partial Y_s^0}{\partial y_\alpha}\right)_* u_\alpha + Y_s^1(y_*, \nu) \quad (s = 1, \ldots, 11) \tag{3.7}$$

в которой постоянная матрица $\{\partial Y_s^0 / \partial y_\alpha\}_*$ (звездочкой обозначен результат подстановки вместо y_α значений (3.6)) является матрицей системы уравнений в вариациях для частного решения (3.6), устойчивость которого исследовалась в [4], где было показано, что эта матрица при всех значениях параметров системы обязательно имеет одно нулевое собственное значение. Таким образом, система (3.7) может иметь 2π-периодическое решение только в том случае, если функции $Y_s^1(y_*, \nu)$ будут удовлетворять условиям

$$\int_0^{2\pi} Y_s^1(y_*, \nu)d\nu = 0 \tag{3.8}$$

а среди остальных собственных значений не будет чисто мнимых равных $\pm i$ [9]. Из (3.5) видно, что условия (3.8) выполняются и, следовательно, система (3.7) будет иметь 2π-периодическое решение, если исключить из рассмотрения множество значений параметров, для которого реализуется указанная пара мнимых корней, что и будем полагать в дальнейшем.

Можно убедиться, что уравнения возмущенного движения для исследуемого периодического движения будут иметь вид системы (1.1). Так, полагая $x_s = y_s - z_s$, для уравнений первого приближения получим

$$x_s' = \sum_{\alpha=1}^{11} \left\{ \left(\frac{\partial Y_s^0}{\partial y_\alpha}\right)_* + e\left[\sum_{\beta=1}^{11} \left(\frac{\partial^2 Y_s^0}{\partial y_\beta \partial y_\alpha}\right)_* u_\beta + \left(\frac{\partial Y_s^1}{\partial y_\alpha}\right)_*\right] + \ldots \right\} x_\alpha \tag{3.9}$$

где невыписанные члены имеют порядок относительно малого параметра e выше первого.

Как видим, при $e = 0$ (3.9) обращается в систему, рассмотренную в [4] и допускающую линейный автоморфизм

$$x_1 \to x_1, \quad x_2 \to x_2, \quad x_3 \to x_3, \quad x_4 \to x_4$$

$$x_5 \to -x_5, \quad x_6 \to -x_6, \quad x_7 \to x_7, \quad x_8 \to x_8$$

$$x_9 \to -x_9, \quad x_{10} \to x_{10}, \quad x_{11} \to -x_{11}, \quad \nu \to -\nu$$

который, как можно убедиться, сохраняется и для системы (3.9). Следовательно, она также обратима. Отсюда и из изложенного в разд. 1 вытекает, что характеристические показатели системы (3.9) будут отличаться от собственных значений матрицы $\{\partial Y_s^0 / \partial y_\alpha\}_*$, определяющих устойчивость стационарного движения (3.6), на величину порядка e^2, и, следовательно, область устойчивости рассматриваемого периодического движения в пространстве параметров B/A, C/A и φ для достаточно малых значений e будет практически совпадать с областью устойчивости указанного стационарного движения, построенной в [8]. Из обратимости системы (3.9) вытекает также, что эта область будет и областью полной устойчивости по Биркгофу [1], т.е. устойчивости в любом конечном порядке.

Основываясь на теореме, доказанной в разд. 2, можно также заключить, что неустойчивости стационарного движения при резонансах третьего порядка, обнаруженной в [4, 8], будет соответствовать неустойчивость при тех же значениях параметров и рассматриваемого периодического движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биркгоф Д.* Динамические системы. М.; Л.: ОГИЗ, 1941. 320 с.
2. *Moser J.* Stable and rendom motions in dynamical systems. Princeton, New Jersey: Princeton Univ. Press., 1973, 198 p.
3. *Якубович В.А., Старжинский В.М* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
4. *Куницын А.Л., Матвеев М.В.* Об устойчивости одного класса обратимых систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 904–911.
5. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
6. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
7. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
8. *Куницын А.Л., Ташимов Л.Т.* Некоторые задачи устойчивости нелинейных резонансных систем. Алма-Ата: Гылым, 1990. 195 с.
9. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.I.1992