УДК 531:36

© 1993 г. А.С. Ковалева

РАЗДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ФАЗОЙ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Излагается процедура разделения движений в стохастических системах, приводимых к стандартной форме с быстрой фазой. Доказывается сходимость медленного движения к диффузионному процессу.

1. Исследуются системы, динамика которых описывается уравнениями

$$x^{\cdot} = \varepsilon F(x,\theta,\xi(t)) + \varepsilon^2 G(x,\theta) \tag{1.1}$$

$$\theta^{\cdot} = \omega(x) + \varepsilon H(x,\theta,\xi(t)) + \varepsilon^2 D(x,\theta)$$

$$x \in R_n, \quad \theta \in R_1, \quad x(0) = a$$

Здесь $\xi(t)$ – случайный процесс с траекториями в R_l, $F(x, \theta, \xi)$ и т.д. – детерминированные векторы, ε – малый параметр.

Асимптотические подходы применялись для исследования уравнений типа (1.1) при $\omega(x) = \omega_0$ = const и систем, приведенных к стандартной форме. Доказывалось, что при выполнении определенных условий (в наиболее общей форме эти условия приведены в [1]) процесс $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится [2] к диффузионному процессу $x_0(\tau)$ – решению стохастического уравнения

$$dx_0 = b(x_0)d\tau + \sigma(x_0)dw, \quad x_0(0) = a \tag{1.2}$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $w(\tau)$ – l-мерный стандартный винеровский процесс. Обоснованию предельного перехода от (1.1) к (1.2) при $\omega = \omega_0$ посвящены многочисленные работы; подробная библиография приведена в [1, 3, 4]. Также были получены [4, 5] аналогичные результаты для уравнений с вращающейся фазой при $\xi = \xi(\theta)$.

Используя развитый ранее [4, 5] подход, докажем справедливость асимптотического (при $\varepsilon \to 0$) разделения движений для (1.1).

Предположим, что коэффициенты уравнений (1.1) удовлетворяют следующим условиям: функции F, H представимы в виде

$$F = F_0(x,\theta)\xi(t), \quad H = H_0(x,\theta)\xi(t)$$

где $\xi(t)$ – стационарные случайные процессы с нулевым средним и траекториями в $D^l[0, \infty)$ [2]. Процессы $\xi(t)$ определены на стандартном вероятностном пространстве [2, 6]; для краткости всюду указана зависимость только от времени t, зависимость от случайного аргумента, характеризующего реализации, опущена; F_0, H_0 – матрицы соответствующих размеров.

Компоненты векторного процесса $\xi(t)$ удовлетворяют *условиям A*:

$$\mathrm{M}\xi(t) = 0$$

$$\mathrm{M}|\mathrm{M}_t[\ldots[[\xi(u_1)]^0\xi(u_2)]^0\ldots\xi(u_n)]^0| \leqslant c_n\alpha_1(u_1 - t)\ldots\alpha_n(u_n - u_{n-1})$$

$$0 \leqslant t \leqslant u_1 \ldots \leqslant u_n, \quad n = 1,2,3$$

Здесь $z^0 = z - Mz$, $Mz(t)$ – математическое ожидание, $M_s z(t)$ – условное математическое ожидание процесса $z(t)$.

Постоянная c_n зависит от величины $M|\xi(t)|^n$, ограниченные положительно определенные функции α_n подчиняются условию

$$\int_0^\infty u^2\alpha_n(u)du < \infty$$

Доказано [1, 4], что этим требованиям удовлетворяют, в частности, стационарные нормальные процессы и ограниченные процессы, подчиняющиеся условиям равномерно сильного перемешивания при соответствующем коэффициенте перемешивания [2].

Детерминированные коэффициенты системы (1.1) удовлетворяют *условиям Б*: в области $\theta \in R_1$, $x \in S$, где S – ограниченный шар в R_n, равномерно относительно x, θ выполняются требования:

1) функции F_0, H_0, G, D периодичны или квазипериодичны и ограничены по θ;

2) функция F_0 непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема по x, θ; H_0 непрерывна и непрерывно дифференцируема по x, θ; G непрерывна и непрерывно дифференцируема по x; D ограничена;

3) частота $\omega(x) \geqslant \omega_0 > 0$ непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема.

Для построения аппроксимирующего диффузионного процесса $x_0(\tau)$ используем процедуру диффузионной аппроксимации [1,7], преобразованную [4, 5] для анализа систем с быстрой фазой.

Введем необходимые определения [7]. Пусть $f^\varepsilon(\tau)$ – скалярный случайный процесс и $L^\varepsilon f^\varepsilon(\tau)$ – производящий дифференциальный оператор процесса, определенный формулой

$$L^\varepsilon f^\varepsilon(\tau) = \lim_{\delta\to 0_+} \delta^{-1}[M_\tau f^\varepsilon(\tau+\delta) - f^\varepsilon(\tau)] \tag{1.3}$$

Из (1.3) следует [1, 7]

$$M_\tau f^\varepsilon(T) - f^\varepsilon(\tau) = \int_\tau^T M_\tau L^\varepsilon f^\varepsilon(u)du \tag{1.4}$$

(все равенства понимаются в слабом смысле [1, 7]).

В частности, если $f^\varepsilon(\tau) = f(x_\varepsilon(\tau))$, где $f(x)$ – детерминированная функция и $x_\varepsilon(\tau)$ – решение некоторой возмущенной системы, то (1.4) указывает способ вычисления функционала $M_\tau f(x_\varepsilon(T))$ на траекториях возмущенной системы. В частности, если $x_\varepsilon(\tau) = x_0(\tau)$, где $x_0(\tau)$ – решение уравнения (1.2), то $L^\varepsilon = L$, где [1, 6, 7]

$$L = b'(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}A(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad A = \sigma\sigma' \tag{1.5}$$

(здесь и ниже штрих – знак транспонирования), и (1.4) принимает вид

$$M_\tau f(x_0(T)) - f(x_0(\tau)) = \int_\tau^T M_\tau Lf(x_0(u))du \tag{1.6}$$

Соотношения (1.4)–(1.6) указывают способ вычисления и сравнения функционалов на траекториях возмущенной и диффузионной систем.

Асимптотический подход базируется на следующем утверждении [1, 7]. Пусть при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau \in [0, T]$ выполняются условия:

1) при любых начальных условиях $x_0(0) = a \in K$, где K – компакт в R_n, существует единственное решение $x_0(\tau) \in D^n[0, \infty)$ уравнения (1.2);

2) $f(x) \in R_1$ – достаточно гладкая функция с компактным носителем;

3) для каждой функции $f(x)$ и любого $T < \infty$ найдется функция $f^{\varepsilon}(\tau)$, принадлежащая области определения оператора L^{ε}, такая, что

$$\sup_{\tau,\varepsilon} \mathrm{M}|f^{\varepsilon}(\tau)| < \infty \tag{1.7}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{M}|f^{\varepsilon}(\tau) - f(x_{\varepsilon}(\tau))| = 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{M}|L^{\varepsilon} f^{\varepsilon}(\tau) - Lf(x_{\varepsilon}(\tau))| = 0 \tag{1.8}$$

где $x_{\varepsilon}(\tau)$ – решение возмущенной системы, L – производящий дифференциальный оператор (1.5);

4) последовательность $x_{\varepsilon}(\tau)$ слабо компактна в $D^{n}[0, \infty)$ [2] и $x_{\varepsilon}(0) = x_0(0)$.

Тогда последовательность $x_{\varepsilon}(\tau)$ слабо сходится при $\varepsilon \to 0$ к диффузионному процессу $x_0(\tau)$ с производящим оператором L.

Было показано [1], что условия (2)–(4) можно ослабить, заменив $x_{\varepsilon}(\tau)$ соответствующим усеченным процессом $x_{\varepsilon}^{N}(\tau) = x_{\varepsilon}(\tau)\eta_N(x_{\varepsilon})$, и функции $f^{\varepsilon}(\tau)$ и $f(x)$ – соответствующими усеченными функциями $f^{\varepsilon N}(\tau)$ и $f^{N}(x) = f(x)\eta_N(x)$. Здесь $\eta_N(x) = \{1, |x| \leq N;\ 0, x > N\}$. Предположение о слабой компактности последовательности $x_{\varepsilon}(\tau)$ позволяет перейти к пределу при $N \to \infty$.

2. Опираясь на указанные условия, построим аппроксимирующий оператор L для системы (1.1). Построение разбивается на два этапа.

Построение функции $f^{\varepsilon N}(\tau)$. Пусть $\tau = \varepsilon^2 t$, $x = x(t, \varepsilon) = x_{\varepsilon}(\tau)$, $\theta = \theta(t, \varepsilon) = \theta_{\varepsilon}(\tau)$ – решение системы (1.1). Определим на траектории $x(t, \varepsilon)$ произвольную финитную функцию $f(x) \in C_3$, обращающуюся в нуль при $|x| > N$. Построим функцию $f^{\varepsilon N}(\tau)$, связанную с $f(x)$ соотношением

$$f^{\varepsilon N}(\tau) = [f(x) + \varepsilon f_1(x,\theta,t) + \varepsilon^2 f_2(x,\theta,t)]\eta_N(x) \tag{2.1}$$

и определим коэффициенты f_1, f_2 таким образом, чтобы выполнялись условия (1.7), (1.8).

Из (1.1), (1.3) имеем

$$L^{\varepsilon} f^{\varepsilon}(\tau) = \varepsilon^{-1}(f_x' F + L_t^{\varepsilon} f_1) + f_x' G + L_t^{\varepsilon} f_2 \tag{2.2}$$

где штрих – знак транспонирования, L_t^{ε} – производящий дифференциальный оператор

$$L_t^{\varepsilon} f(x,\theta,t) = \lim_{\Delta\to 0_+} \Delta^{-1}[\mathrm{M}_t f(x(t+\Delta,\varepsilon),\theta(t+\Delta,\varepsilon),t+\Delta) - f(x,\theta,t)] \tag{2.3}$$

Следуя [1, 4, 5], построим функцию f_1 таким образом, чтобы коэффициент при ε^{-1} в формуле (2.3) обратился в нуль. Определим

$$f_1(x,\theta,t) = f_x'(x)\int_t^{\infty} \mathrm{M}_t F(x,\varphi(u),\xi(u))du \tag{2.4}$$

где

$$\varphi(u) = \varphi^{x,\theta,t}(u) = \theta + \omega(x)(u-t) \tag{2.5}$$

– решение порождающей системы

$$dx/du = 0, \quad d\varphi/du = \omega(x) \tag{2.6}$$

$$x(t)=x, \quad \varphi(t)=\theta, \quad u \geqslant t$$

Было показано [1, 4], что для функций типа (2.4) оператор L_t^ε вычисляется простым дифференцированием по t при "замороженном" операторе M_t. Тогда при учете (2.5) получим

$$L_t^\varepsilon f_1 = f_{1x}x^{\cdot}+f_{1\theta}\theta^{\cdot}-f_{1\theta}\omega - f_x'F \tag{2.7}$$

причем все слагаемые вычисляются в точке (x, θ, t). В (2.7) учтены очевидные соотношения

$$\partial F / \partial\varphi = \partial F / \partial\theta, \quad \partial F / \partial t = -\omega \partial F / \partial\varphi$$

Подставляя (2.7) в (2.2) и принимая во внимание (1.1), получим

$$L^\varepsilon f^\varepsilon(\tau) = f_{1x}'(F+\varepsilon G)+f_{1\theta}(H+\varepsilon D)+f_x'G+L_t^\varepsilon f_2 \tag{2.8}$$

Функция $f_2(x, \theta, t)$ строится таким образом, чтобы исключить из f_2 секулярные по θ составляющие. По аналогии с полученными ранее результатами [4, 5] запишем

$$f_2(x,\theta,t)=\sum_{j=1}^{3}[I_j(x,\theta,t)-S_j(x,\theta)] \tag{2.9}$$

$$I_j = \int_t^\infty [M_t Q_j(x,\varphi(u),u) - MQ_j(x,\varphi(u),u)]du \tag{2.10}$$

при

$$Q_1 = f_{1x}'F, \quad Q_2 = f_{1\theta}H, \quad Q_3 = f_x'G \tag{2.11}$$

Можно показать, что для стационарного процесса $\xi(t)$ величины $MQ_j(x, \theta, t)$ не зависят от t и

$$MQ_j(x,\theta,t)=q_j(x,\theta)$$

Очевидно, что $I_3 = 0$ для детермированной функции Q_3. Величины S_j имеют вид

$$S_j(x)=\int_0^\theta [q_j(x,\psi)-\bar{q}_j(x)]d\psi \tag{2.12}$$

$$\bar{q}_j(x)=\lim_{\Gamma\to\infty}\frac{1}{\Gamma}\int_0^\Gamma q_j(x,\psi)d\psi \tag{2.13}$$

(предполагается, что пределы существуют равномерно относительно $|x| \leqslant N$).

Таким образом, функция $f^{\varepsilon N}(\tau)$ определяется соотношениями (2.1), (2.4), (2.9).

Построение оператора L. Из (2.3), (2.8), (2.9) следует

$$L_t^\varepsilon f_2 = -f_{1x}'F - f_{1\theta}H - f_x'G + f_{2x}x^{\cdot} + \sum_{j=1}^{2} I_{j\theta}(\theta^{\cdot}-\omega)+\sum_{j=1}^{3}\bar{q}_j(x) \tag{2.14}$$

$$L^\varepsilon f^{\varepsilon N}(\tau)=\left[\sum_{j=1}^{n}\bar{q}_j(x_\varepsilon(\tau))+\varepsilon(R_1+\varepsilon R_2)f(x_\varepsilon(\tau))\right]\eta_N(x_\varepsilon) \tag{2.15}$$

где $R_j f$ – соответствующие остаточные члены в (2.8), (2.14), рассматриваемые как операторы, действующие на f.

Выпишем в явном виде операторы $\overline{q}_j(x)$. Из (2.11)–(2.13) следует, что

$$q_1(x,\theta)=\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M} f_{1x_i}(x,\theta,t)F^i(x,\theta,\xi(t))$$
$$q_2(x,\theta)=\mathrm{M} f_{1\theta}(x,\theta,t)H(x,\theta,t) \tag{2.16}$$
$$q_3(x,\theta)=\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)G^i(x,\theta)$$

где x_i, F^i, G^i – i-е компоненты соответствующих векторов. Для функции f_1, определенной выражением (2.4), получим

$$f_{1x_i}=\sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(x)\int_t^{\infty}\mathrm{M}_t F_{x_i}^j(x,\varphi(u),\xi(u))du+\sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x)\int_t^{\infty}\mathrm{M}_t F^j(x,\varphi(u),\xi(u))du \tag{2.17}$$

Учитывая (2.5), запишем

$$F_{x_i}^j(x,\varphi(u),\xi(u))=[F_{z_i}^j(z,\theta+\omega(x)(u-t),\xi(u))]_{z=x}+$$
$$+F_\theta^j(x,\theta+\omega(x)(u-t),\xi(u))\,\omega_{x_i}(x)(u-t) \tag{2.18}$$

Точно так же

$$f_{1\theta}(x,\theta,t)=\int_t^{\infty}\mathrm{M}_t F_\theta(x,\theta+\omega(x)(u-t),\quad \xi(u))du \tag{2.19}$$

Подставим (2.17)–(2.19) в (2.16) и усредним в соответствии с (2.13). Учитывая известное свойство математического ожидания $\mathrm{MM}_t=\mathrm{M}$ [6], получим окончательный результат:

$$\overline{q}_1(x)=[b_1'(x)+b_3'(x)]f_x(x)+\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}A(x)f_{xx}(x) \tag{2.20}$$
$$\overline{q}_2(x)=b_2'(x)f_x(x),\qquad \overline{q}_3(x)=\overline{G}'(x)f_x(x)$$
$$\overline{G}(x)=\lim_{\Gamma\to\infty}\frac{1}{\Gamma}\int_0^{\Gamma}G(x,\theta)d\theta \tag{2.21}$$

$$b_j(x)=\lim_{\Gamma\to\infty}\frac{1}{\Gamma}\int_0^{\Gamma}d\theta\int_0^{\infty}B_j(x,\theta,s)ds,\quad j=1,2,3$$

$$B_1^i(x,\theta,s)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}[F_{z_j}^i(z,\theta+\omega(x)s,\xi(t+s))F_j(x,\theta,\xi(s))]_{z=x} \tag{2.22}$$

$$B_2^i(x,\theta,s)=\mathrm{M}[F_\theta^i(x,\theta+\omega(x)s,\xi(t+s))H(x,\theta,s)]$$

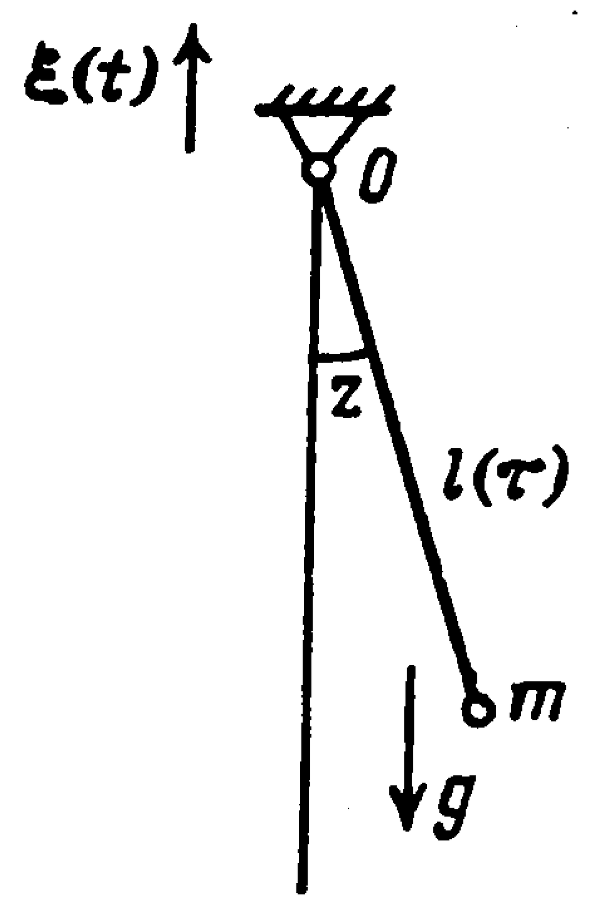
$$B_3^i(x,\theta,s)=s\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}[F_\theta^i(x,\theta+\omega(x)s,\xi(t+s))\omega_{x_j}(x)F_j(x,\theta,\xi(t))]$$

$$A(x)=a(x)+a'(x)=\sigma(x)\sigma'(x) \tag{2.23}$$

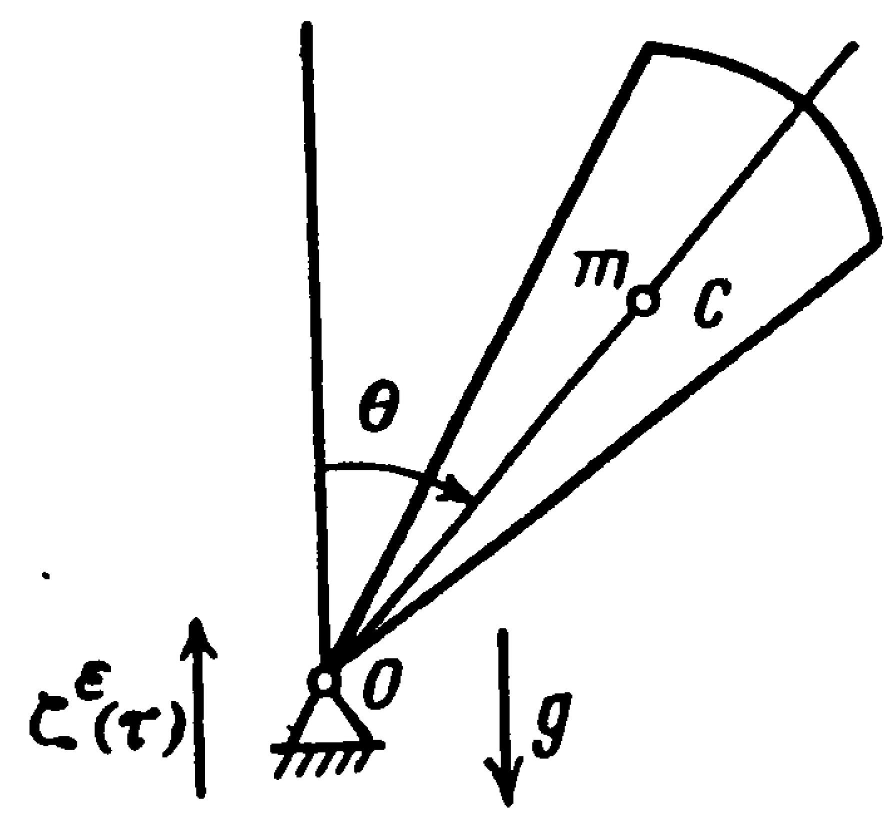
$$a(x)=\lim_{\Gamma\to\infty}\frac{1}{\Gamma}\int_0^{\Gamma}d\theta\int_0^{\infty}\alpha(x,\theta,s)ds$$

$$\alpha_{ij}(x,\theta,s)=\mathrm{M}[F^i(x,\theta+\omega(x)s,\xi(t+s))F^j(x,\theta,\xi(t))]$$

Независимость подынтегральных выражений в (2.22), (2.23) от t вытекает из стационарности процесса $\xi(t)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Определим оператор L в виде

$$L = b'(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}A(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad b = \sum_{j=1}^{3} b_j \tag{2.24}$$

Очевидно, что при $\omega = \omega_0 = \mathrm{const}$ коэффициент $b_3 = 0$ и выражение (2.21) с точностью до обозначений совпадает с известным [3, 4].

Для доказательства требований (1.7), (1.8) достаточно показать, что при $|x| \leqslant N$, $t \in R_1$, $\theta \in R_1$ для всех $f(x) \in C_3$ выполняются условия

$$\mathrm{M}|f_j(x,\theta,t)| < \infty, \quad \mathrm{M}|R_j f(x)| < \infty, \quad j = 1,2 \tag{2.25}$$

Аналогичные оценки были получены ранее [4, 5], поэтому доказательство может быть опущено. Отметим, что справедливость неравенств (2.25) вытекает из приведенных выше условий A и $Б$.

Выполнение условий (1.7), (1.8) обеспечивает и слабую компактность последовательности $x_\varepsilon^N(\tau)$ [1].

Если выполняются условия A и $Б$ и существуют пределы (2.22), (2.23), то коэффициенты оператора (2.24) удовлетворяют требованиям $b(x) \in C_1$, $a(x) \in C_2$. Следовательно [6], существует диффузионный процесс $x_0(\tau)$ с производящим оператором (2.24).

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть в области $x \in S$, $\theta \in R_1$, $t \in R_1$ коэффициенты системы (1.1) удовлетворяют условиям A и $Б$ и существуют пределы (2.22), (2.23).

Тогда при $\varepsilon \to 0$, $\tau \in [0, T]$ процесс $x(t, \varepsilon) = x_\varepsilon(\tau)$ слабо сходится к диффузионному процессу $x_0(\tau)$ с производящим дифференциальным оператором (2.24).

Замечание. Очевидно, что все результаты справедливы и для случая $\omega = \omega(\tau)$. "Медленное" время τ может рассматриваться как дополнительная переменная

$$x_{n+1} = \tau, \quad \dot{x}_{n+1} = \varepsilon^2, \quad x_{n+1}(0) = 0$$

При этом коэффициенты оператора (2.24) определяются соотношениями (2.20)–(2.23), но $b_3 = 0$.

3. Рассмотрим некоторые примеры.

Колебания маятника переменной длины при вертикальной вибрации точки подвеса (фиг. 1). При малости диссипации и возмущения и медленном изменении длины уравнения движения маятника приводятся к виду

$$\frac{d}{dt}\left[l^2(\tau)\frac{dz}{dt}\right] + 2\varepsilon^2 n\frac{d}{dt}[l(\tau)z] + l(\tau)[g + \varepsilon\xi(t)]z = 0 \tag{3.1}$$

$$z(0) = \zeta, \quad \dot{z}(0) = \nu$$

Здесь z – угол отклонения маятника от вертикали, $l(\tau)$ – медленно изменяющаяся длина, $\tau = \varepsilon^2 t$, $\xi(t)$ – ускорение точки подвеса – стационарный нормальный процесс с нулевым средним и спектральной плотностью $S(\omega)$, ε – малый параметр.

Заменой переменных

$$z = x\cos\theta, \quad z^{\cdot} = -\omega(\tau)x\sin\theta \qquad (3.2)$$

$$\omega(\tau) = [g / l(\tau)]^{1/2}$$

уравнение (3.1) приводится к стандартной форме [8]

$$x^{\cdot} = \varepsilon\frac{\xi(t)}{\omega l}x\cos\theta\sin\theta - \varepsilon^2\left[\frac{2}{l}(l_\tau + n) + \frac{\omega_\tau}{\omega}\right]x\sin^2\theta \qquad (3.3)$$

$$\theta^{\cdot} = \omega + \varepsilon\frac{\xi(t)}{\omega l}\cos^2\theta - \varepsilon^2\left[\frac{2}{l}(l_\tau + n) + \frac{\omega_\tau}{\omega}\right]\sin\theta\cos\theta$$

$$l_\tau = dl / d\tau, \quad \omega_\tau = d\omega / d\tau, \quad x(0) = \alpha, \quad \theta(0) = \beta$$

При этом

$$F = (2\omega l)^{-1}\xi(t)x\sin 2\theta$$

$$H = (2\omega l)^{-1}\xi(t)(1 + \cos 2\theta) \qquad (3.4)$$

$$G = -(2l)^{-1}(3l_\tau + 4n)x\sin^2\theta$$

Подставляя (3.4) в (2.21)–(2.23), получим

$$b_1 = \frac{x}{16}D^2, \quad b_2 = \frac{x}{8}D^2 \qquad (3.5)$$

$$\overline{G} = -\left(\frac{3}{4}\frac{l_\tau}{l} + \frac{n}{l}\right)x$$

$$A_{11} = \sigma^2 = \frac{x^2}{8}D^2, \quad D^2 = \frac{S(2\omega)}{(\omega l)^2}$$

Из теоремы 1 следует, что процесс $x(t, \varepsilon) = x_\varepsilon(\tau)$ при $\varepsilon \to 0$ слабо сходится к диффузионному процессу $x_0(\tau)$, удовлетворяющему уравнению

$$dx_0 = b_0 x_0 d\tau + \sigma_0 x_0 dw, \quad x_0(0) = \alpha$$

$$b_0 = \frac{3}{16}D^2 - \left(\frac{3}{4}\frac{l_\tau}{l} + \frac{n}{l}\right), \quad \sigma_0^2 = \frac{1}{8}D^2 \qquad (3.6)$$

Оценим среднеквадратичное значение амплитуды колебаний $m_\varepsilon = Mx_\varepsilon^2$. Из слабой сходимости процессов следует, что на интервале времени $0 \leqslant \tau \leqslant T$ значение $m_\varepsilon(\tau)$ остается в ε-окрестности функции $m_0(\tau) = Mx_0^2(\tau)$, определяемой из решения уравнения [6]

$$dm_0 / d\tau = [2b_0(\tau) + \sigma_0^2(\tau)]m_0, \quad m_0(0) = \alpha^2 \qquad (3.7)$$

$$m_0(\tau) = \alpha^2 \exp\left\{\int_0^\tau [2b_0(s) + \sigma_0^2(s)]ds\right\} \qquad (3.8)$$

Из (3.6), (3.8) следует, что решение системы (3.7) асимптотически устойчиво, если

$$\int_0^\tau \left[\frac{D^2(s)}{2} - \frac{2n}{l(s)}\right] ds < \frac{3}{2} \ln \frac{l(\tau)}{l(0)} \tag{3.9}$$

При выполнении условия (3.9) $m_\varepsilon(\tau)$ остается в ε-окрестности экспоненциально затухающей функции $m_0(\tau)$.

Требование (3.9) можно заменить более сильным, но легко проверяемым условием $2b_0(\tau) + \sigma_0^2(\tau) < 0$ при всех $\tau > 0$, т.е.

$$S[2\omega(\tau)] < [\omega(\tau) l(\tau)]^2 [4n + 3l_\tau(\tau)] \tag{3.10}$$

При $l_\tau = 0$, $\omega = \mathrm{const}$ условие (3.10) совпадает с известным условием устойчивости в среднеквадратичном [3].

Быстрое вращение плоского маятника при случайной вибрации оси подвеса (фиг. 2). Уравнение вращения маятника в вертикальной плоскости имеет вид

$$J d^2\theta / d\tau^2 - ml(g + d^2\zeta^\varepsilon / d\tau^2) \sin\theta = 0 \tag{3.11}$$

$$\tau = 0, \quad \theta = 0, \quad d\theta / d\tau = \gamma^\varepsilon$$

Здесь J – момент инерции относительно оси вращения O, m – масса маятника, l – плечо OC, $\zeta^\varepsilon(\tau)$ – вертикальное перемещение точки подвеса. Предполагается, что $\zeta^\varepsilon(\tau)$ – малое, но быстрое возмущение, так что

$$mlJ^{-1}\zeta^\varepsilon(\tau) = \varepsilon\zeta(\tau/\varepsilon^2), \quad \varepsilon \ll 1$$

Положим $\tau/\varepsilon^2 = t$ и запишем

$$\theta^{\cdot\cdot} = \varepsilon^2(\lambda^2 + \varepsilon^{-1}\zeta^{\cdot\cdot}(t)) \sin\theta \tag{3.12}$$

$$t = 0, \quad \theta = 0, \quad \theta^{\cdot} = \gamma$$

Здесь $\lambda^2 = mlgJ^{-1}$, $\gamma = \varepsilon\gamma^\varepsilon$.

Рассматривается случай быстрого вращения, когда $\gamma^\varepsilon \gg \lambda$.

Приводя (3.12) к стандартной форме, получим

$$x^{\cdot} = \varepsilon\xi(t)\sin\theta + \varepsilon^2 G(\theta), \quad x(0) = \gamma \tag{3.13}$$

$$\theta^{\cdot} = x, \quad \theta(0) = 0$$

Система (3.13) имеет вид (1.1) при

$$F = \xi(t)\sin\theta, \quad G = \lambda^2 \sin\theta, \quad H = 0, \quad \omega = x, \quad \xi(t) = \zeta^{\cdot\cdot}(t) \tag{3.14}$$

Следовательно, $b_1 = b_2 = 0$, $\overline{G} = 0$, $b_3 = {}^1/_4 S_x(x)$, $\sigma^2 = {}^1/_2 S(x)$, где $S(\omega)$ – спектральная плотность процесса $\xi(t)$.

Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ процесс $x(t, \varepsilon)$ слабо сходится к диффузионному процессу $x_0(\tau)$ с производящим дифференциальным оператором

$$L = b_3(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(S(x)\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{3.15}$$

Оценим время τ_ε пребывания процесса $x_\varepsilon(\tau)$ в α-окрестности стационарного решения $x = \gamma$. Из условия слабой сходимости следует, что $M\tau_\varepsilon \to M\tau_0$ при $\varepsilon \to 0$, где τ_0 – время пребывания процесса $x_0(\tau)$ в α-окрестности точки $x = \gamma$. В свою очередь [6] $M\tau_0 = V(\gamma)$, где $V(x)$ –

решение уравнения

$$LV(x)=-1,\quad V[\gamma(1+\alpha)]=V[\gamma(1-\alpha)]=0 \tag{3.16}$$

L – оператор (3.15). Уравнение (3.16) разрешимо в квадратурах. Для выявления физического смысла решения рассмотрим случай достаточно малых α. Тогда

$$M\tau_0=V(\gamma)=2\alpha^2\gamma^2/S(\gamma) \tag{3.17}$$

Величина τ_0 может служить мерой близости движения к стационарному: чем больше времени система находится в окрестности стационарной точки, тем ближе движение к стационарному. В частности, $M\tau_0 \to \infty$ при $\xi \to 0$. В свою очередь из (3.17) следует, что $M\tau_0$ уменьшается при возрастании $S(\gamma)$ и $M\tau_0 \to 0$ при $S(\gamma) \to \infty$, т.е. возникает эффект "резонансного" разгона системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kushner H.J.* Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes with Applications to Stochastic Systems Theory. Cambridge: MIT Press, 1984. 269 p.
2. *Биллингслей П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 351 с.
3. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 386 с.
4. *Ковалева А.С.* Управление колебательными и виброударными системами. М.: Наука, 1990. 256 с.
5. *Ковалева А.С.* О разделении движений в нелинейных колебательных системах со случайным возмущением // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 530–536.
6. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 567 с.
7. *Ethier S., Kurtz T.* Markov Processes: Characterization and Convergence. New York: Wiley, 1986. 534 p.
8. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971. 440 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.V.1991