УДК 539.3:534.1

© 1993 г. В.А. Добрушкин

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН

Для регуляризации интегродифференциальных выражений, описывающих распространение упругих волн в твердых телах, используется определение дробной производной в форме Маршо [1]. При помощи сплайн-интерполяции построен устойчивый алгоритм для приближенного вычисления исходных интегродифференциальных выражений и получены оценки остатков квадратурных формул.

Решения широкого круга задач динамической теории упругости неустойчивы к малым вариациям как области [2], так и граничных условий [3]. Решения в квадратурах (см., например, [3–7]) оказались малопригодными для практических расчетов, ибо они представляются в виде интегродифференциальных выражений с особенностями. Как известно [8], численное дифференцирование функции, значения которой находятся приближенно с некоторой погрешностью, является неустойчивой операцией.

1. Постановка задачи. Рассмотрим интегродифференциальный оператор B, действующий на функцию f двух независимых переменных по формуле

$$Bf(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t d\tau \int_0^\infty g(x, y-\xi)\, \frac{(t-\tau) H\left(t-\tau-c^{-2}\sqrt{x^2+(y-\xi)^2}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-c^{-2}\left(x^2+(y-\xi)^2\right)}}\, f(\xi, \tau)\, d\xi \tag{1.1}$$

где H – функция Хевисайда, $g(x, \alpha)$ – достаточно гладкая функция двух независимых переменных (играющая роль весовой функции), c – положительная постоянная.

Выражение в правой части (1.1) описывает распространение упругих волн со скоростью c в твердом теле, занимающем в декартовой системе координат область $(0 < x,\ 0 < y)$. Функция f определяет внешнее воздействие на упругое тело со стороны одной из граней $(x = 0)$, а B – разрешающий оператор соответствующей смешанной задачи для векторного уравнения Ламе. Операторы вида (1.1) встречаются во многих исследованиях, связанных с изучением отражения и дифракции акустических и упругих волн [5, 9]. Кроме того, функции Грина начальных и начально-краевых задач для уравнений в частных производных гиперболического типа являются, как правило, распределениями. Поэтому построение решений таких задач приводит к проблеме регуляризации соответствующих интегродифференциальных выражений с подвижными особенностями и разработки соответствующих численных методов.

2. Регуляризация интегродифференциального выражения (1.1). Предположим, что первая производная функция f является гельдеровской порядка $\alpha > 1/2$. Производя в правой части (1.1) замену переменных $\xi = y \pm \sqrt{c^2t^2\nu^2 - x^2}$, $\tau = t - ts$ и используя выражение

$$s(s^2-\nu^2)^{-1/2} = 1 + \int_s^\infty \nu^2 (\alpha^2-\nu^2)^{-3/2}\, d\alpha$$

после интегрирования по частям и некоторых преобразований будем иметь

$$Bf(x, y, t) = H(t - c^{-1}x) \left\{ \int_{\nu_0}^{w} \Psi_+(\nu)\Psi_-(\nu)\,d\nu + \int_{\nu_0}^{1} \Psi_-(\nu)\Psi_+(\nu)\,d\nu \right\} \tag{2.1}$$

Здесь

$$w = \min\left\{1, \sqrt{x^2+y^2}/(ct)\right\},\quad \nu_0 = x/(ct),\quad \Psi_\pm(\nu) = c^2t^2\nu R^{-1} g(x, \pm R)$$

$$R = \sqrt{c^2t^2\nu^2 - x^2},\quad \Phi_\pm(\nu) = (1-\nu^2)^{-1/2}\phi_\pm(\nu, 1) + \nu^2 \chi_\pm(\nu, 1, \nu)$$

$$\chi_\pm(\alpha, \beta, \nu) = \int_\alpha^\beta (s^2-\nu^2)^{-3/2}\phi_\pm(\nu, s)\,ds$$

$$\Phi_\pm(\nu, s) = f(y \pm R, t - t\nu) - f(y \pm R, t - ts)$$

Регуляризованное в форме Маршо выражение (2.1) существует и при более слабых ограничениях на функцию f, о которых было указано выше. Тем самым удалось расширить область определения оператора B, которая включает класс гельдеровских функций порядка $\alpha > 1/2$.

3. Приближенное вычисление интегродифференциального выражения (1.1). Предположим для простоты, что функция $f(\cdot, t)$ в начальный момент времени $t = 0$ обращается в нуль. Введем обозначения

$$I_0(\alpha, \beta) = H(ct - x) \int_\alpha^\beta \nu^2 \Psi_+(\nu) \chi_-(\nu, I, \nu) d\nu$$

$$I_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = H(ct - x) \int_\alpha^\beta \nu^2 \Psi_+(\nu) \chi_-(\gamma, \delta, \nu) d\nu$$

$$I_2(\alpha, \beta) = H(ct - x) \int_\alpha^\beta \Psi_+(\nu) d\nu$$

$$I_3(\alpha, \beta, \gamma) = H(ct - x) \int_\alpha^\beta \nu^2 \Psi_+(\nu) \chi_-(\nu, \gamma, \nu) d\nu$$

Для аппроксимации правой части равенства (2.1) достаточно построить приближенные формулы вычисления интегралов $I_0(\nu_0, w)$ и $I_?(\nu_0, w)$. Поэтому в дальнейшем индекс минус у функции $\phi_-(\nu, s)$ опускается.

Предположим, что функция f определена матрицей $\{f(n, i)\}$ своих значений $f(y_m, t_i)$ в точках $y_m = (m - ½)h$ $(m = 1, 2, \ldots, M)$, $t_i = i\tau$ $(i = 1, 2, \ldots, J)$ (h и τ – шаги по пространственной и временной переменным соответственно), а функция $g(x, \alpha)$ задана аналитически. Приближенные значения $I_0(\nu_0, w)$ и $I_2(\nu_0, w)$ будем искать на том же шаблоне (т.е. в точках y_m и t_i).

Введем целый индекс N, который положим равным $m - 1$, если $x^2 + y^2 < c^2 t^2$. В противном случае $(x^2 + y^2 > t^2)$ полагаем $N = [\sqrt{c^2 t^2 - x^2}/h]$ – целая часть числа $\sqrt{c^2 t^2 - x^2}/h$. Введем также последовательность точек $\nu_n = \sqrt{n^2 t^2 + x^2}/(ct)$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$ и $s_\nu = 1 - \nu/j$ $(\nu = 0, 1, \ldots, \mathrm{in})$, где

$$\mathrm{in} = [j - \sqrt{n^2 h^2 + x^2}/(c\tau) \tag{3.1}$$

– целая часть числа, указанного в квадратных скобках. Если in < 0, то последовательность точек $\{s_\nu\}$ не рассматривается.

При $N > 1$ представим выражения для $I_0(\nu_0, w)$ и $I_2(\nu_0, w)$ в виде сумм:

$$I_k(\nu_0, w) = I_k(\nu_N, w) + \sum_{n=1}^{N} I_k(\nu_{n-1}, \nu_n) \ (k = 0, 2)$$

Если индексы iN или in больше нуля, то

$$I_0(\nu_N, w) = I_3(\nu_N, w, s_{\mathrm{iN}}) + \sum_{\nu=1}^{\mathrm{iN}} I_1(\nu_N, w, s_\nu, s_{\nu-1})$$

$$I_0(\nu_{n-1}, \nu_n) = I_3(\nu_{n-1}, \nu_n, s_{\mathrm{iN}}) + \sum_{\nu=1}^{\mathrm{in}} I_1(\nu_{n-1}, \nu_n, s_\nu, s_{\nu-1})$$

Приближенные значения интегралов $I_1(\nu_{n-1}, \nu_n, s_\nu, s_{\nu-1})$ $(\nu = 1, 2, \ldots, \mathrm{in}; n = 1, 2, \ldots, N)$ можно найти известными численными методами, так как соответствующие им подынтегральные функции не имеют особенностей.

Для аппроксимации интегралов $I_3(\nu_N, w, s_{\mathrm{in}})$ и $I_3(\nu_{n-1}, \nu_n, s_{\mathrm{in}})$ можно использовать линейную сплайн-аппроксимацию

$$\phi(\nu, s) = \phi(\nu, s_{\mathrm{in}})(s_{\mathrm{in}} - \nu)^{-1}(s - \nu) + r(\nu, s) \tag{3.2}$$

где

$$r(\nu, s) = ½ \phi''_{ss}(\theta_s)(s - \nu)^2 - ½\phi''_{ss}(\theta_{s\mathrm{in}})(s_{\mathrm{in}} - \nu)(s - \nu)$$

а θ_s и $\theta_{s\mathrm{in}}$ – некоторые точки из интервала $[\nu, s_{\mathrm{in}}]$. В результате получаем равенства:

$$I_3(\nu_N, w, s_{\mathrm{iN}}) = \int_{\nu_N}^{w} \frac{ct\nu^2 \phi(\nu, s_{\mathrm{iN}})}{\sqrt{\nu^2 - \nu_0^2}\sqrt{s_{\mathrm{iN}}^2 - \nu^2}} d\nu + R_{\mathrm{N}0}(\phi) \tag{3.3}$$

$$I_3(\nu_{n-1}, \nu_n, s_{\mathrm{in}}) = \int_{\nu_{n-1}}^{\nu_n} \frac{ct\nu^2 \phi(\nu, s_{\mathrm{in}})}{\sqrt{\nu^2 - \nu_0^2}\sqrt{s_{\mathrm{in}}^2 - \nu^2}} d\nu + R_{n0}(\phi) \tag{3.4}$$

погрешности которых $R_{N0}(\phi)$ и $R_{n0}(\phi)$ имеют порядок $H(H + T)^{3/2}$, где $T = \tau/t = 1/j$, $H = h/(ct)$.

При $n > 1$ подынтегральная функция в правой части равенства (3.4) не имеет особенностей, следовательно, аппроксимация интеграла $I_3(\nu_{n-1}, \nu_n, s_{\mathrm{iN}})$ в этом случае не вызывает затруднений.

Если же $n = 1$, то функцию $ctv^2\phi(v, s_{in})\,(s_{in} - v)^{-1/2}$ заменяем на интервале $[v_0, v_1]$ линейным сплайном. В результате получаем следующую приближенную формулу:

$$I_3(v_0, v_1, s_{i1}) = \left[\frac{v_0\varphi(v_0, s_{i1})}{\sqrt{s_{i1}^2 - v_0^2}} - \frac{v_1\varphi(v_1, s_{i1})}{\sqrt{s_{i1}^2 - v_1^2}}\right] \times \left[\frac{ctv_1v_0}{v_1 - v_0}\ln\frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 - v_0^2}}{v_0} - \frac{h}{v_1 - v_0}\right] \tag{3.5}$$

Для приближенного вычисления интеграла в правой части (3.3) можно применить фомулу левых прямоугольников. Аналогично находится приближенное значение интеграла $I_1(v_N, w, s_v, s_{v-1})$.

Если индексы iN или in меньше единицы, то аппроксимация интегралов $I_0(v_N, w)$ или $I_0(v_{n-1}, v_n)$ осуществляется непосредственно. Окончательно получаем

$$I_0(v_N, w) = \frac{(w - v_{m-1})v_{m-1}^2}{\sqrt{v_N^2 - v_0^2}}\, J_{m-1}(\phi(v, 1)),\quad w = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{ct} < 1$$

$$I_0(v_N, w) = -\frac{ctv_N^2\phi(v_N, 1)}{\sqrt{v_N^2 - v_0^2}}\ln(1 + \sqrt{1 - v_N^2}),\quad \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant ct$$

$$I_0(v_{n-1}, v_n) = {1/2}\,(v_n - v_{n-1})\left[\frac{v_n^2 J_n(\phi(v, 1))}{v_n^2 - v_0^2} + \frac{v_{n-1}^2 J_{n-1}(\phi(v, 1))}{\sqrt{v_{n-1}^2 - v_0^2}}\right]$$

$$J_n(f(v)) = \frac{ctf(v_n)}{\sqrt{1 - v_n^2}}$$

Приближенные значения интеграла $I_0(v_0, v_1)$ находятся по формуле (3.5), где следует заменить число s_{i1} единицей.

Для приближенного вычисления интеграла $I_2(v_N, w)$ заменим подынтегральную функцию без множителя $\sqrt{1 - v^2}$ ее значением на левом конце интеграла.

Аппроксимация интеграла $I_2(v_{n-1}, v_n)$ при $n > 0$ осуществляется согласно правилу трапеций.

Если $n = 0$, то, интерполируя линейным сплайном на интервале $[v_0, v_1]$ функцию $ctv/\sqrt{1 - v^2}\, f(y - R, t - tv)g(x, R)$, получаем приближенную формулу

$$I_2(v_0, v_1) = H(ct - x)\frac{1}{v_1 - v_0}\Big\{ g(x, mh)J_0(f(m, t - tv))\left[H - v_0\ln\frac{v_1 + H}{v_0}\right] -$$

$$- g(x, (m - 1)h)J_1(f(m - 1, t - tv))\left[H - v_1\ln\frac{v_1 + H}{v_0}\right]$$

Приведенные выше аппроксимационные равенства содержат значения функции $f(\ldots, t - tv_n)$ в точках, которые не принадлежат шаблону. Используя индекс (3.1), можно найти значения функции $f(\ldots, t - tv_n)$ линейной интерполяцией

$$f(\ldots, t - tv_n) = (1 + \mathrm{in} - j + jv_n)f(\ldots, \mathrm{in}) + (j - jv_n - \mathrm{in})f(\ldots, \mathrm{in} + 1) \tag{3.6}$$

Рассмотрим наконец случай $N = 0$. Пусть $x^2 + y^2 < c^2t^2$ и $m = 1$. На интервале $[v_0, \sqrt{x^2 + y^2}/(ct)]$ заменим функцию $(1 - v^2)^{-1/2} g(x, R) \times f(y - R, t - tv)$ ее значением на левом конце указанного промежутка. В результате получаем следующую приближенную формулу:

$$I_2(v_0, w) = H(ct - x)\frac{yct}{\sqrt{c^2t^2 - x^2}}\, g(x, h)f(1, t - tv_0)$$

Функцию $f(1, t - tv_0)$ следует определить согласно линейной интерполяции (3.6).

Приближенное вычисление интеграла $I_0(v_0, w)$ в случае $m = 1$ и $ct \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ зависит от величины индекса ii, определяемого как целая часть числа $j - \sqrt{x^2 + y^2}/(ct)$. Если ii $\geqslant 1$, то

$$I_0(v_0, w) = I_3(v_0, w, s_{ii}) + \sum_{v=2}^{ii} I_1(v_0, w, s_v, s_{v-1}).$$

Для аппроксимации $I_3(v_0, w, s_{ii})$ интерполируем функцию $\phi(v, .)$ линейным сплайном (3.2). Тогда

$$I_3(v_0, w, s_{ii}) = \int_{v_0}^{\sqrt{x^2 + y^2}/(ct)} \frac{ctv^2 g(x, R)}{\sqrt{v^2 - v_0^2}\sqrt{s_{ii}^2 - v^2}}\, \phi(v, s_{ii})dv$$

Заменив на интервале $[v_0, \sqrt{x^2 + y^2}/(ct)]$ функцию $vg(x, R) \times (s_{ii}^2 - v^2)^{-1/2}\phi(v, s_{ii})$ ее значением в точке $v = v_0$, получаем

$$I_3(v_0, w, s_{ii}) = \frac{xyg(x, 0)}{\mathrm{ct}\sqrt{s_{ii}^2 - v_0^2}}\, \varphi(v_0, s_{ii})$$

Аналогично находятся приближенные значения интегралов $I_1(\nu_0, w, s_\nu, s_{\nu-1})$ ($\nu = 1, 2, \ldots$, ii).

Если ii < 0, то применение линейной интерполяции (3.2) по переменной s и модификации формулы левых прямоугольников приводит к следующему приближенному равенству:

$$I_3(\nu_0, w, 1) = H(ct - x)\,\frac{xyg(x, 0)}{\sqrt{c^2t^2 - x^2}}\,f(m, t - t\nu_0).$$

Пусть $\sqrt{x^2 + y^2} > ct$ и $N = 0$. Заменяя функцию $g(x, R)f(y - R, t - t\nu)$ постоянной $g(x, 0)f(m, t - t\nu_0)$, будем иметь

$$I_2(\nu_0, w) = H(ct - x)g(x, 0)f(m, t - t\nu_0)\pi/2$$

По аналогии с тем, как это было сделано для случая ii < 0, можно найти приближенное значение интеграла $I_0(\nu_0, w)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. *Maul J.* Perturbation of domains for some nonclassical BVP in elasticity//ZAMM. 1987. Bd. 67. H 6. S. 231–239.
3. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
4. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
5. *Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В.* Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Л.: Наука, 1982. 289 с.
6. *Achenbach J.D.* Wave propagation in elastic solid. Amsterdam; L.: Horth-Holland Rubl. Comp.; N.Y.: Amer. Elsevier Publ. Comp., 1973. 425 p.
7. *Miklowitz J.* The theory of elastic waves and waveguides. Amsterdam: N.Y., Oxford: North-Holland Publ. Comp., 1978. 618 p.
8. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
9. *Добрушкин В.А.* Краевые задачи динамической теории упругости для клиновидных областей. Минск: Наука и техника, 1988. 416 с.
10. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 350 с.

Минск

Поступила в редакцию
27.VI.1991