УДК 539.3:534.1

© 1993 г. А.В. Шанин

К ВЫВОДУ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ МЕТОДОМ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Дается вывод граничных условий на свободной границе колеблющейся тонкой пластины переменной толщины, когда толщина пластины меняется скачком. При этом левая часть дифференциального уравнения четвертого порядка, описывающего колебания пластины, имеет сингулярности типа δ-функции и ее производной. Поскольку правая часть этого уравнения не имеет сингулярности, естественно приравнять нулю коэффициенты при обобщенных функциях. Такие равенства и представляют собой граничные условия. Подобная схема нахождения граничных условий не является новой [1, 2], однако ее применение к уравнению четвертого порядка связано с необходимостью взятия частных производных от δ-функции, распределенной на контуре. Формула вычисления таких производных выводится в данной работе и применяется для получения граничных условий.

Традиционный путь [3, 4] решения задач рассматриваемого типа состоит в использовании вариационного принципа. При этом проводится преобразование интеграла по поверхности пластины в интеграл по ее границе, что весьма трудоемко. Предлагаемый ниже подход более прост и физически нагляден.

1. Постановка задачи. Будем исходить из уравнения движения тонких пластин (см. например [5])

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}=-m(x,y)\omega^2 w$$

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\quad M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{1.1}$$

$$M_{xy}=D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y};\quad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad m=\mu h$$

Здесь w – поперечное смещение пластины, h – ее толщина, μ – плотность, ω – круговая частота колебаний, E и ν – упругие постоянные.

Отметим, что уравнение (1.1) справедливо при произвольном распределении плотности, толщины и упругих постоянных вдоль поверхности пластины. В частности, оно остается справедливым, когда при переходе через границу толщина пластины падает до нуля. При этом моменты M_x, M_y и M_{xy} являются разрывными функциями. Следовательно, их вторые производные будут содержать δ-функцию и ее производную. Поскольку правая часть уравнения (1.1) сингулярности не содержит, коэффициенты при обобщенных функциях следует приравнять нулю. Таким образом, задача сводится к вычислению производных моментов при условии разрывности толщины h.

2. Вывод граничных условий. Очевидно, что моменты можно записать в виде

$$M(x,y)=\begin{cases}M^*(x,y) & \text{внутри границы}\\ 0 & \text{вне границы}\end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь и далее звездочкой будут помечаться значения величин на пластине, т.е. "обычные" моменты и их "обычные" производные (пределы этих производных при приближении точки к границе).

Пусть $\mathbf{n}$ – внутренняя единичная нормаль к границе, $\mathbf{l}$ – единичный касательный вектор в положительном направлении обхода пластины.

Первые частные производные функций типа (2.1) задаются формулами [6]

$$\partial M / \partial z = (\partial M / \partial z)^* + \delta(\Gamma)\cos(\mathbf{n},\mathbf{z}), \quad z = x, y \tag{2.2}$$

где Γ – граница пластины, $\delta(\Gamma)$ – распределенная δ – функция.

При повторном дифференцировании одного из выражений (2.2) первое слагаемое, представляющее собой разрывную функцию, допускает применения формул типа (2.2). Вычисление же производной второго слагаемого требует специального подхода (см. приложение):

$$\frac{\partial}{\partial z}[\rho(\Gamma)\delta(\Gamma)] = -\rho(\Gamma)\delta'(\Gamma)\cos(n,z) + \frac{\partial}{\partial l}[\rho(\Gamma)\cos(l,z)]\delta(\Gamma) \tag{2.3}$$

На месте $\rho(\Gamma)$ может стоять $M^*(\Gamma)$. Символ $\delta'(\Gamma)$ обозначает функцию типа двойного слоя. Определение и свойства функций δ и δ' обсуждаются в приложении.

Воспользовавшись формулами (2.2) и (2.3), вычислим вторые производные, входящие в уравнение (1.1). Введем угол φ между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{n}$ в положительном направлении. Приравняв в уравнении (1.1) коэффициенты при δ' и δ нулю, получим искомые граничные условия

$$-[M_x \cos^2\varphi + M_y \sin^2\varphi - 2M_{xy}\sin\varphi\cos\varphi] = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial M_y}{\partial y}\sin\varphi - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\cos\varphi\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial l}[\cos\varphi\sin\varphi(M_x - M_y) - M_{xy}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)] = 0 \tag{2.5}$$

Звездочка над обозначениями моментов и их производных везде опущена.

3. Обсуждение результатов. Сравним граничные условия (2.4), (2.5) с известными. Прежде всего отметим, что полученные граничные условия согласуются с приведенными в [4]. Для частного случая прямолинейной границы, расположенной вдоль оси (см., например, [5, 7])

$$M_x = 0, \quad \partial M_x / \partial x - 2\partial M_{xy} / \partial y = 0 \tag{3.1}$$

Эти выражения следуют из (2.4), (2.5) при $\varphi = 0$.

Граничные условия для границы произвольной формы при постоянной толщине пластины [3] следуют из (2.4), (2.5), если положить $h = \mathrm{const}$ и считать $\mathbf{n}$ внешней нормалью.

Отметим, что предлагаемый метод позволяет получать граничные условия на свободной границе для любого уравнения теории упругости. Необходимо лишь, чтобы это уравнение было применимо в случае переменной жесткости.

С другой стороны, граничные условия, записанные в виде (2.4), (2.5) позволяют использовать для решения граничных задач теории тонких пластин методы теории потенциала. Пусть известна функция Грина уравнения (1.1), т.е. функция $w = G(P_1, P_2)$, такая, что

$$L[w] \equiv \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \omega^2 m w = \delta(P_1 - P_2)$$

(P_1, P_2 – точки пластины). Дифференцирование проводится по координатам точки P_1. В ряде случаев, например для остроугольного упругого клина, удается найти такую функцию G.

Пусть на границе пластины заданы граничные условия вида

$$B_k[w] = \psi_k(\Gamma), \quad k = 1, 2$$

где операторы B_1 и B_2 – левые части равенств (2.4) и (2.5) соответственно. Решение такой задачи ищется в виде линейной комбинации потенциалов простого и двойного слоя

$$w(P_1)=\int_\Gamma f_1(P_2)\frac{\partial}{\partial n}G(P_1,P_2)d\Gamma+\int_\Gamma f_2(P_2)G(P_1,P_2)d\Gamma,\quad P_2\in\Gamma$$

где **n** – внутренняя нормаль к границе относительно координат точки P_2. Интегрирование производится по координатам точки P_2. Видно, что

$$L[w]=f_1(\Gamma)\delta'(\Gamma)+f_2(\Gamma)\delta(\Gamma)$$

Согласно проведенным выше рассуждениям, функции f_1 и f_2 определяют разрывы значений операторов B_1 и B_2 на границе пластины. Из общих соображений, аналогичных используемым в теории потенциала, на самой границе операторы B_1 и B_2 дадут среднее арифметическое значений справа и слева. Таким образом, граничная задача сводится к системе уравнений Фредгольма второго рода:

$$\frac{1}{2}f_k(P_1)+\int_\Gamma B_k[f_1(P_2)\partial G(P_1,P_2)/\partial n+f_2(P_2)G(P_1,P_2)]d\Gamma=\psi_k(P_1),$$

$$k=1,2,\quad P_1,P_2\in\Gamma$$

Приложение. Распределенные обобщенные функции δ и δ' задаются следующим образом. Положим, что на плоскости задана область S, контур Γ внутри нее и произвольная гладкая функция Φ, равная нулю вне S. Тогда

$$\int_S\Phi\delta(\Gamma)dS=\int_\Gamma\Phi(\Gamma)d\Gamma,\quad \int_S\Phi\delta'(\Gamma)dS=\int_\Gamma\frac{\partial\Phi}{\partial n}(\Gamma)d\Gamma \tag{П.1}$$

Пусть $\rho(\Gamma)$ – функция, заданная на контуре Γ и имеющая смысл веса δ – функции. Вычислим частную производную $\rho\delta(\Gamma)$ по z ($z=x,y$). Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}\int_S\Phi\frac{\partial}{\partial z}[\rho\delta(\Gamma)]dS&=-\int_S\rho\delta(\Gamma)\frac{\partial\Phi}{\partial z}dS=-\int_\Gamma\rho\frac{\partial\Phi}{\partial z}(\Gamma)d\Gamma=\\&=-\int_\Gamma\rho(\Gamma)\cos(n,z)\frac{\partial\Phi}{\partial n}d\Gamma+\int_\Gamma\Phi\frac{\partial}{\partial l}[\rho(\Gamma)\cos(l,z)]d\Gamma\end{aligned}\tag{П.2}$$

Сравнивая этот результат с формулами (П.1), в силу произвольности Φ заключаем, что справедлива формула (2.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сендз М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 7. Физика сплошных сред. М.: мир, 1977. 288 с.
2. *Moss S.L., Maradudin A.A., Cunningham S.L.* Vibrational edge modes for wedges with arbitrary interior angles // Phys. Rev. B. 1973. V. 8. No. 6. P. 2999–3008.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
4. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
5. *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. New York: McGraw-Hill, 1959. 580 p.
6. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: Мир, 1978. 518 с.
7. *McKenna J., Boyd G.D., Thurston R.N.* Plate theory solution for guided flexural acoustic waves along the tip of a wedge // IEEE Trans. on Sonics and Ultrasonics. 1974. V. 21. No. 3. P. 178–186.

Москва

Поступила в редакцию
5.III.1992