3. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
4. *Куликовский А.Г.* Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабонеизотропном упругом теле // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 597–604.
5. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 284–291.
6. *Куликовский А., Свешникова Е.И.* Нелинейные зоны, возникающие при изменении напряжений на границе упругого полупространства // Вопросы нелинейной механики сплошной среды. Таллинн: Валгус, 1985. С. 133–145.
7. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Распад произвольного разрыва в упругой среде при малой нелинейности и анизотропии // Механика: Современные проблемы. Под ред. Г.Г. Черного. М.: Изд-во МГУ. 1987. С. 164–169.
8. *Куликовский А.Г., Свешникова Е.И.* Нелинейные волны в слабоанизотропных упругих средах // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 110–115.

Крымская область

Поступила в редакцию
22.V.1991

УДК 539.3:534.1

 В.Л. Андрианов

О СОПРОТИВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЮ НАГРУЗОК ВДОЛЬ УПРУГИХ НАПРАВЛЯЮЩИХ, ВЫЗВАННОМ ИЗЛУЧЕНИЕМ В НИХ ВОЛН

Находится аналитическое решение задачи, описывающей процесс колебания струны при движении по ней нагрузки при произвольном заданном законе движения. На основании полученной формулы выводится аналитическая зависимость для горизонтальной составляющей полной силы реакции струны, действующей в точке приложения нагрузки.

Предположим, что по струне, лежащей на вязком винклеровском основании, малые вертикальные колебания которой описываются уравнением

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + 2\delta u_t + h^2 u(x,t) = 0 \tag{1}$$

где $c = \sqrt{T/\rho}$ – скорость распространения поперечных волн в струне, T – натяжение, ρ – погонная плотность, величины δ и h характеризуют ее соответственно вязкие и упругие свойства, движется нагрузка P (вертикальная постоянная сила) по заданному закону

$$x = l(t) \in C_2[0,+\infty), \quad l(0) = 0, \quad \dot{l}(0) = v_0 \geqslant 0, \quad \ddot{l}(0) > 0$$

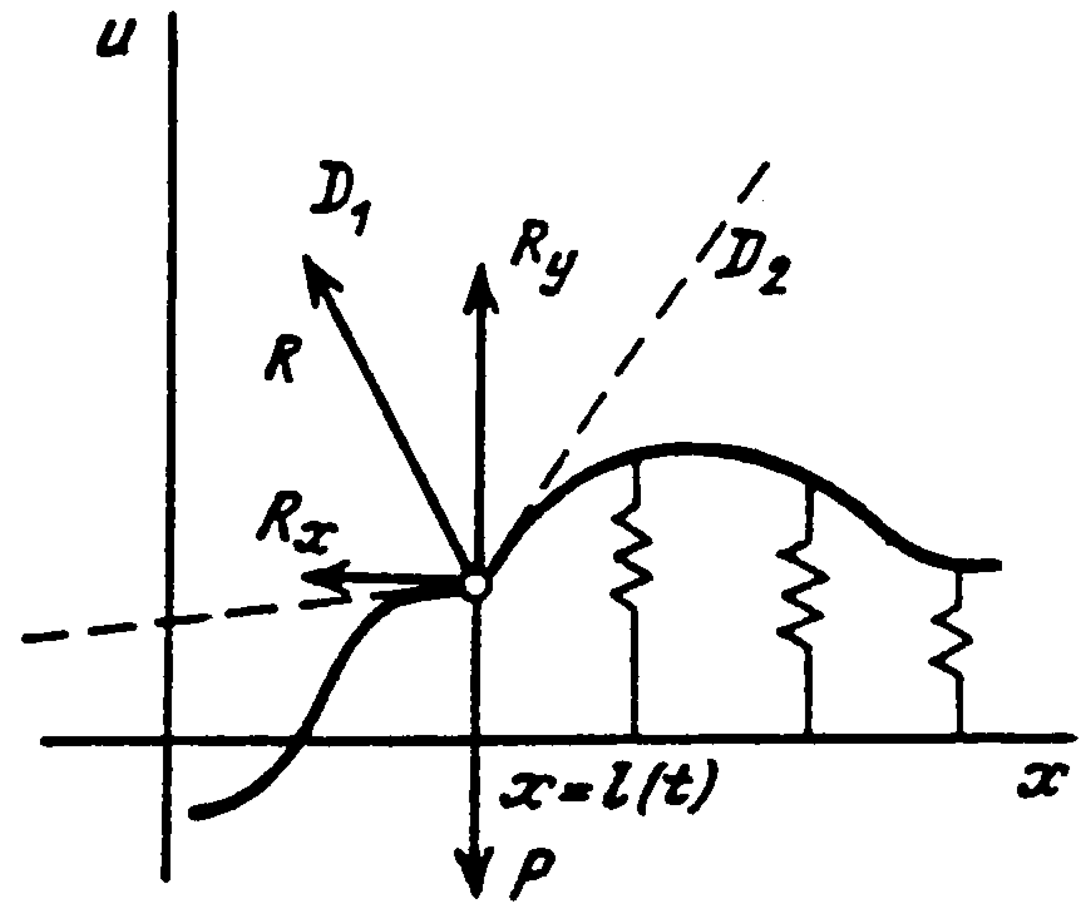
Считаем функцию $l(t)$ монотонно возрастающей, $l(+\infty) = +\infty$ и $\dot{l}(t) \neq c$.

Решение $u(x, t)$ будем искать отдельно для $x \gtrless 0$, т.е. $u(x, t) = u^{\pm}(x, t)$, $x \gtrless 0$, где функции $u^{\pm}(x, t)$ связаны соотношениями

$$u^+(0,t) = u^-(0,t), \quad u_x^+(0,t) = u_x^-(0,t), \quad t > 0$$

(под значением функции понимается соответствующий односторонний предел). Как известно [1], решение

$$u^+(x,t) = \begin{cases} u_2(x,t), & x > l(t) \quad ((x,t) \in D_2) \\ u_1(x,t), & x < l(t) \quad ((x,t) \in D_1), \quad x > 0, t > 0 \end{cases}$$



тогда должно удовлетворять условиям согласования

$$[u(x,t)]|_{x=l(t)}=0,\ \rho(c^2-\dot{l}^2(t))[u_x(x,t)]|_{x=l(t)}=-P$$

$$([u(x,t)]|_{x=l(t)}\overset{\text{def}}{\equiv}u_2(l(t),t)-u_1(l(t),t)) \tag{2}$$

При этом горизонтальная составляющая полной реакции R струны в точке $x = l(t)$ (фигура) определяется по формуле [1]

$$R_x=-\tfrac{1}{2}\rho(c^2-\dot{l}^2(t))[u_x^2(x,t)]|_{x=l(t)} \tag{3}$$

Начальные условия выберем в виде

$$u^{\pm}(x,0)=\varphi^{\pm}(x)=(2\gamma\ T)^{-1}P_0e^{\mp\gamma x}(\gamma=h/c)$$

$$u_t^{\pm}(x,0)=0,\ \ x\gtrless 0 \tag{4}$$

Отметим, что при $P_0=P$ нагрузка "стартует" из положения, соответствующего профилю струны при стационарной нагрузке P; если $P_0=0$, получаем невозбужденную струну (нулевые начальные условия). Ищем ограниченное на бесконечности $((x,t)\to\infty)$ решение задачи.

Применяем преобразование Лапласа отдельно для $x\gtrless 0$ к уравнению (1), причем

$$U^{+}(x,p)=L\{u^{+}(x,t)\}=\int\limits_0^{l_1(x)}u_2e^{-pt}dt+\int\limits_{l_1(x)}^{+\infty}u_1e^{-pt}dt \tag{5}$$

где $l_1(x)$ – обратная функция для $l(t)$. Тогда при учете условий (2)

$$L\{u_{tt}\}=p^2L\{u^{+}(x,t)\}-pu^{+}(x,0)+e^{-pl_1(x)}[u_t(x,t)]|_{t=l_1(x)}$$

или в силу соотношения $[u_t]|_{x=l(t)}=-\dot{l}(t)[u_x]|_{x=l(t)}$ (получается дифференцированием первого соотношения (2)) находим

$$u_{tt}^{+}\doteqdot p^2U^{+}(x,p)-p\varphi^{+}(x)+\frac{P\dot{l}(t)}{\rho(c^2-\dot{l}^2(t))}e^{-pl_1(x)},\ \ t=l_1(x)$$

Соотношение между U_{xx}^{+} и $L\{u_{xx}^{+}\}$ вычисляется дифференцированием равенства (5)

В итоге получаем операторное изображение задачи (1), (2), (4)

$$U_{xx}^{\pm}-\lambda^2U^{\pm}(x,p)=-PT^{-1}\dot{l}_1(x)e^{-pl_1(x)}\eta(x)-$$

$$-c^{-2}\varphi^{\pm}(x)(p+2\delta);\ \lambda=c^{-1}(p^2+2\delta p+h^2)^{1/2} \tag{6}$$

где $\eta(x)$ – единичная функция, $\lambda>0$ при $p>0$ [2].

Две из четырех произвольных постоянных из решений уравнений (6) полагаем равными нулю при учете стационарных начальных условий (4) (т.е. отсутствия"обратных" волн) и условия на бесконечности. Две оставшиеся постоянные определяются из условий "склейки" в точке $x = 0$:

$$U^+(0,p) = U^-(0,p),\ U_x^+(0,p) = U_x^-(0,p)\ \ (\mathrm{Re}\,p > 0)$$

В результате однозначно находим образ искомого решения

$$U^-(x,p) = -\frac{P_0 e^{\lambda x}}{2Tp\lambda} + \frac{Pe^{\lambda x}}{2T\lambda} F(0,p) + \frac{1}{p}\varphi^-(x)$$

$$U^+(x,p) = \frac{P}{2T\lambda}\{e^{\lambda x} F(x,p) + e^{-\lambda x}\int_0^x \dot{l}_1(\xi) e^{-pl_1(\xi)+\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi\} -$$

$$-\frac{P_0 e^{-\lambda x}}{2Tp\lambda} + \frac{1}{p}\varphi^+(x),\ \ F(x,p) = \int_x^{+\infty} \dot{l}_1(\xi) e^{-pl_1(\xi)-\lambda\xi} d\xi,\ \ \mathrm{Re}\,p > 0 \tag{7}$$

Численный счет, а тем более анализ полученного решения $U^{\pm}(x, p)$ и особенно его частных производных при учете формулы обращения $u^{\pm} = L^{-1}\{U^{\pm}\}$ непосредственно по формулам (7) достаточно затруднителен (особенно с точки зрения достижения требуемой точности) в силу осциляции интегралов. Поэтому, для проведения обращения проводится исследование асимптотического поведения интегралов (7). В связи с громоздкостью получающихся выражений и многообразием случаев в зависимости от соотношения между h и δ ограничимся здесь случаем $\delta = 0$.

Рассмотрим регулярную в полуплоскости $\mathrm{Re}\ p > 0$ функцию $F(x, p)$ при $\lambda = c^{-1}\sqrt{p^2 + h^2}$, $x > 0$. Исследование ее асимптотического поведения при $p \to \infty$, $\mathrm{Re}\ p \geqslant \alpha > 0$ в принципе может быть сведено к рассмотрению стандартного интеграла Лапласа [3], где точка максимального вклада $\xi = x$, если величину λ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $p = \infty$ и провести соответствующие оценки. Однако в данном случае это проще сделать, интегрируя выражение для $F(x, p)$ по частям и оценивая громоздкие выражения при учете указанной гладкости $l(t)$ по общей схеме построения асимптотического ряда

В результате находим, что

$$F(x,p) = e^{-pl_1(x)-\lambda x}\left(\frac{\dot{l}_1(x)}{\dot{l}_1(x)+c^{-1}}\frac{1}{p} + O(\frac{1}{p^2})\right)$$

$$p \to \infty,\ \ \mathrm{Re}\,p \geqslant \alpha > 0,\ \ x > 0$$

Из приведенной оценки и аналогичной оценки для второго слагаемого следует, в частности, что $U^+(x, p)$ – образ (так как выполнены достаточные условия [2]), т.е. при учете формулы обращения найденная величина $u(x, t)$ – решение задачи. После этого применяем формулу обращения к исследуемому слагаемому, в которой часть интеграла $F(x, p)$, а именно интеграл в пределах от x_1^* до ∞, где x_1^* – первый положительный корень уравнения

$$c^{-1}x + t = F_1(x_1^*) \overset{\mathrm{def}}{\equiv} l_1(x_1^*) + c^{-1}x_1^*$$

дает нулевой вклад в величину $u^+(x, t)$ на основании леммы Жордано. Обращение оставшейся части $F(x, p)$ можно провести по известным операционным формулам [4], если поменять порядок интегрирования в формуле обращения. Обращение оставшихся слагаемых из (7) проводится по той же схеме, только, например, у следующего слагаемого нужно учитывать, что при скорости $\dot{l}(t)$, меньшей или большей критической величины, т.е. c, точкой максимального вклада будет соответственно начало или конец отрезка интегрирования. Окончательно при условии $\dot{l}(t) < c$ имеем:

$$u^+(x,t) = A(x,t,x_1^*,x)\eta(t - l_1(x)) + A(x,t,x_2^*,0)\eta(t - c^{-1}x) +$$

$$+\varphi^+(x) + A_0(x,t,c^{-1}x)\eta(t - c^{-1}x)$$

$$u^-(x,t)=A(x,t,x_3^*,0)\eta(t+c^{-1}x)+\varphi^-(x)+A_0(x,t,-c^{-1}x)\eta(t+c^{-1}x)$$

$$\varsigma_1(\xi,x,t)=h[(t-l_1(\xi))^2+c^{-2}(\xi-x)^2]^{1/2}$$

$$\varsigma_2(\xi,x)=h[\xi^2-c^{-2}x^2]^{1/2}$$

$$A(x,t,\beta,\alpha)=\frac{Pc}{2T}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\dot{l}_1(\xi)J_0(\varsigma_1(\xi,x,t))\mathrm{d}\xi$$

$$A_0(x,t,\alpha)=-\frac{P_0c}{2T}\int\limits_{\alpha}^{t}J_0(\xi_2(\xi,x))\mathrm{d}\xi \tag{8}$$

($J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка).

Если же $\dot{l}(t)>c$, то во втором слагаемом в формуле для $u^+(x,\ t)$ интегрирование нужно вести в пределах от x_2^* до x, а $\eta(t-c^{-1}x)$ заменить на $\eta(t-l_1(x))$.

В формулах (8), если $t<l_1(x)$, т.е. нагрузка P "не доехала" до точки x, то x_2^* – первый положительный корень уравнения $t-c^{-1}x=l_1(x_2^*)-c^{-1}x_2^*$, если же $t\geqslant l_1(x)$, то $x_2^*=x$. Если нагрузка движется со скоростью, большей критической, то при $l_1(x)\leqslant t\leqslant c^{-1}x$ величина x_2^* ищется из прежнего уравнения, и $x_2^*=0$ при $t\geqslant c^{-1}x$. Величина x_3^* – первый положительный корень уравнения

$$t+c^{-1}x=l_1(x_3^*)+c^{-1}x_3^*,\quad x<0$$

Представление (8) позволяет разобраться в структуре решения $u(x,\ t)$. Слагаемое $A_1=A(x,t,x_1^*,x)\eta(t-l_1(x))$ из (8) представляет собой волну, излучаемую нагрузкой назад, поэтому вклад в величину A_1 в данной точке x и в данный момент t вносят точки отрезка $\xi\in[x,x_1^*]$ (отрезка интегрирования), уже возбужденные нагрузкой P, возмущение от которых успело придти в данную точку x. Слагаемое $A_2=A(x,t,x_2^*,0)\eta(t-c^{-1}x)$ соответствует волне, излучаемой нагрузкой вперед, что объясняет различие отрезков интегрирования для случаев $\dot{l}(t)\gtrless c$. Два последних слагаемых $u^+(x,\ t)$ связаны с начальным положением струны.

Вычисление силы сопротивления движению нагрузки, т.е. величины R_x (3), которое проводится по формуле

$$R_x={}^1/_2P[(u_x)_2(x,l_1(x))+(u_x)_1(x,l_1(x))]$$

облегчается указанным физическим смыслом слагаемых. В случае докритической скорости при этом необходимо учитывать, что величины $\partial A_1/\partial x$ и $\partial A_2/\partial x$ на линии $t=l_1(x)$ разрывны и $x_{1,2}^*$ – функции от $x,\ t$.

После простых, но трудоемких вычислений и оценок окончательно находим

$$R_x(x)=\frac{P^2h^2}{2Tc}\int\limits_0^x\dot{l}_1(\xi)\frac{J_1(\varsigma_1(\xi,x,l_1(x)))}{\varsigma_1(\xi,x,l_1(x))}(x-\xi)\mathrm{d}\xi+$$

$$+\frac{P^2}{2T}\frac{c\dot{l}_1(x)}{1-c^2\dot{l}_1^2(x)}-\frac{PP_0h^2}{2Tc}x\int\limits_{x/c}^{l_1(x)}\frac{J_1(\varsigma_2(\xi,x))}{\varsigma_2(\xi,x)}\mathrm{d}\xi+$$

$$+\frac{P_0P}{2T}(1-e^{-\gamma x}),\quad x>0$$

Здесь $J_1(x)$ – функция Бесселя первого порядка.

В частности, находим силу реакции струны для начального момента (момента "трогания")

$$R_x(x=0) = -\frac{P^2}{2T}\frac{c\upsilon_0}{c^2-\upsilon_0^2}$$

Вычисление $R_x(x)$ по приведенным формулам показывает, что, например, в случае $\dot{l}(t) = l_0 = \text{const},\ t \geqslant t_0 > 0$ величина R_x осциллирует с отрицательным средним (при интегрировании по достаточно большому промежутку) и частотой, характерной для данной упругой системы (для $t \geqslant t_0$) и стремится к нулю при $x \to +\infty$.

При скорости $\dot{l}(t) > c$ величина скачка $[u_x]|_{t=l_1(x)}$ определяется величиной

$$r(x,t) = A(x,t,x_1^*,x)\eta(t-l_1(x)) + A(x,t,x,x_2^*)\eta(t-l_1(x))$$

которая соответствует возмущению, следующему за нагрузкой; при этом справедливы соотношения

$$\frac{\partial r_1}{\partial x}(l(t),t) = -\frac{P}{T}\frac{c^2}{\dot{l}^2(t)-c^2},\quad \frac{\partial r_2}{\partial x}(l(t),t) = 0 \tag{9}$$

Величина скачка производной, задаваемая формулами (9), очевидно, удовлетворяет условию (2). В этом случае

$$R_x(x) = -\frac{P^2}{2T}\frac{c^2}{\dot{l}^2(t)-c^2} - \frac{P_0 P}{2T}e^{-\gamma x},\quad t = l_1(x)$$

Отметим, что вопросы перехода через критические скорости в случае равноускоренного движения изучались ранее [5]. Рассматривалась методика получения асимптотики решений, их анализ и ряд важных приложений [6].

Автор благодарит А.И. Весницкого за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Весницкий А.И., Каплан Л.Э., Уткин Г.А.* Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 863–866.
2. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
3. *Федорюк М.В.* Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/ Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
5. *Каплунов Ю.Д., Муравский Г.В.* Действие равнопеременно движущейся силы на балку Тимошенко, лежащую на упругом основании. Переходы через критические скорости // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 3. С. 475–482.
6. *Дуплякин И.А.* Движение экипажа с постоянной скоростью по балке бесконечной длины, лежащей на основании с двумя упругими характеристиками // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 461–471.

Нижний Новгород — Поступила в редакцию

11.II.1992