

При $n \neq 1$ имеем

$$\frac{1}{Fr} \frac{\sin(\pi n/2)[e^\eta - \cos(\pi n/2)]}{\operatorname{ch} \eta - \cos(\pi n/2)} \sim e^\eta, \quad \eta \rightarrow -\infty$$

$$\frac{2}{n^4} \frac{[\operatorname{ch} \eta - \cos(\pi n/2)]^2}{\operatorname{ch}^4(\eta/n)} \sim e^{-2\eta(1-2/n)}, \quad \eta \rightarrow -\infty$$

При $n = 4/3$ имеем $-2\eta(1-2/n) = \eta$, так что $U_b = (4/3^{1/4})(ga_b)^{1/2}$, $2c/a_b = \sqrt{3}$ – "чечевицеобразный" контур, вытянутый по потоку.

При $n \neq 1$ и $n \neq 4/3$ описанная процедура оценки U_b для пузырей рассматриваемой формы неприменима. Так, при $n \in (0, 1)$ поверхность пузыря в окрестности передней критической точки не может быть линией постоянного давления твердой фазы, что необходимо для стационарного всплывания: правая часть выражения $p(\eta)$ в этом случае существенно отрицательна.

Из сказанного следует, что при $n \neq 1$ и $n \neq 4/3$ всплывание пузыря с нерегулярной передней критической точкой существенно нестационарно. Это подтверждается экспериментальными наблюдениями так называемых пальцев на поверхности пузырей, образующихся в окрестности лобовой критической точки. Их развитие часто приводит к дроблению всплывающего пузыря [3].

С другой стороны, наличие формы с устойчивой лобовой частью при $n = 4/3$ может объяснить характерную вытянутость плоских пузырей (пузырей у стенки) в псевдооживленном слое, вертикальный размер которых часто вдвое превышает горизонтальный [3] (фиг. 2). Наличие излома поверхности в передней критической точке не является существенным недостатком модели, так как вследствие ограниченности w , всюду на поверхности полости течения вблизи передней критической точки слабо меняется после малого "регуляризирующего" сглаживания контура.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородуля В.А., Гупало Ю.П. Математические модели химических реакторов с кипящим слоем. Минск: Наука и техника, 1976. 207 с.
2. Бобков Н.Н., Гупало Ю.П. О влиянии процессов дробления и слияния пузырей на массообмен в псевдооживленном слое//ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 782–792.
3. Псевдооживление/Под ред. И.Ф. Дэвидсона и Д. Харрисона. М.: Химия, 1974. 725 с.

Нижний Новгород, Москва

Поступила в редакцию
14.V.1991

УДК 539.3 : 534.1

© 1993 г. А.П. Чугайнова

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В СЛАБОУНИЗОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Изучаются движения в виде плоских слабонелинейных квазипоперечных волн в вязкоупругой среде с малой анизотропией. Рассматривается задача о взаимодействии двух ударных волн (УВ), движущихся навстречу друг другу.

Ранее [1, 2] численно решена задача о взаимодействии двух УВ, одна из которых догоняет другую, если состояние за системой этих двух волн соответствует точке из области неединственности решения автомодельной задачи.

Для исследования взаимодействия УВ, движущихся навстречу друг другу, должна, вообще говоря, использоваться полная система уравнений теории упругости (см., например, [3]). Однако в случае малой нелинейности задачу можно существенно упростить и необходимые для исследования расчеты проводить используя упрощенную систему уравнений [4].

Будем считать, что встречные УВ взаимодействуют в течение ограниченного промежутка времени τ . Поэтому влиянием слабой нелинейности и слабой анизотропии в период взаимодействия встречных волн можно пренебречь.

Оценим порядок ошибки, возникающей в результате сделанного предположения. Пусть деформации, которыми обладала среда, и те, которые возникли после прохождения волн, малы и имеют порядок ϵ . Тогда члены в уравнениях полной системы уравнений теории упругости, описывающие слабую нелинейность и слабую анизотропию, имеют порядок $L^{-1}\epsilon\chi$, $\chi = \max\{\epsilon^2, g\}$ [4], где g – параметр, характеризующий анизотропию, L – характерный масштаб длины взаимодействующих волн. Будем полагать, что такой же порядок величины имеют вязкие члены.

Для встречных волн $\tau \sim L/C$, где C – относительная скорость волн. Интегрируя нелинейные члены вдоль характеристик соответствующих волн, рассматриваемых как линейные, найдем, что изменения, вызываемые нелинейными и вязкими членами за время τ , имеют порядок $C^{-1}\epsilon\chi$. Последней величиной можно пренебречь по сравнению с ϵ , так что волны за время τ ведут себя как линейные, т.е. не меняют своей формы, и лишь потом, при существенно больших временах, происходит их изменение. Причиной этих изменений является то, что каждая из волн по истечении времени τ начинает двигаться по измененному фону (волна уже не соответствует фону).

Таким образом, в результате взаимодействия двух УВ, движущихся навстречу друг другу, образуются две системы волн, движущихся в противоположные стороны. Для изучения образования и эволюции каждой из этих двух систем волн будем использовать приближенные уравнения [4], описывающие слабонелинейные квазипоперечные волны в вязкоупругой среде с малой анизотропией, распространяющиеся только в одну сторону

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial u_\alpha} - \frac{1}{2\sqrt{\mu\rho_0}} \tau_{\alpha 3} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

$$R(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(f-g)u_1^2 + \frac{1}{2}(f+g)u_2^2 - \frac{1}{8}\kappa_1(u_1^2 + u_2^2)^2 \quad (1)$$

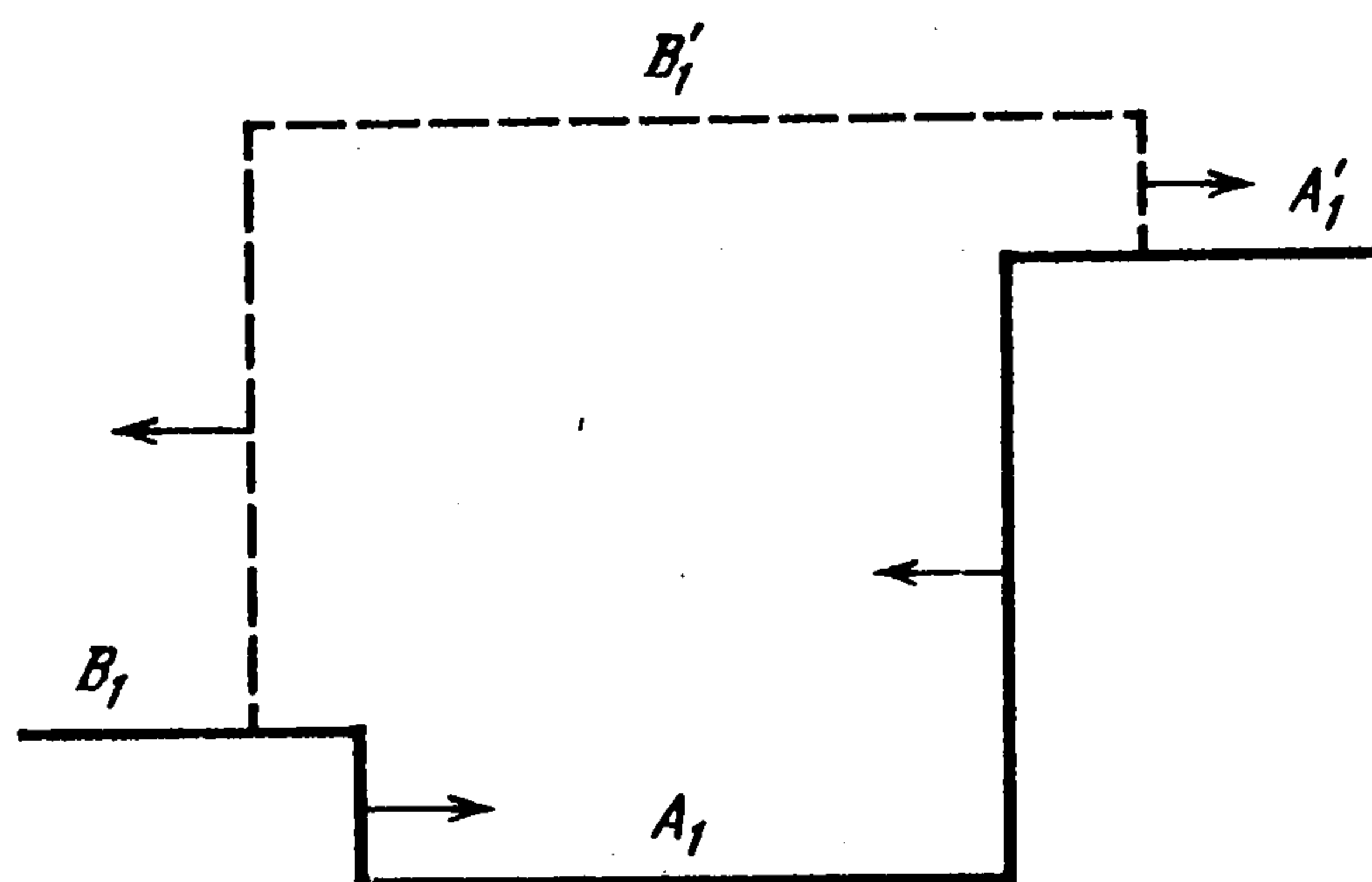
$$u_\alpha = \partial w_\alpha / \partial x, \quad \tau_{\alpha 3} = \rho_0 v \partial u_\alpha / \partial t = v \sqrt{\mu\rho_0} \partial u_\alpha / \partial x$$

Здесь w_α – перемещения частиц, рассматриваемые как функции лагранжевых координат $x_1, x_2, x_3 \equiv x$, $\tau_{\alpha 3}$ – компоненты тензора вязких напряжений, ρ_0 – плотность в ненапряженном состоянии, μ – упругий коэффициент Ламе, v – кинематический коэффициент вязкости, f, g – постоянные, причем $g (g \ll f)$ – параметр анизотропии (малый), f – характеристическая скорость при отсутствии нелинейности и анизотропии, κ_1 – постоянная с размерностью скорости, которая характеризует нелинейные эффекты.

Знак упругой постоянной κ_1 существенно влияет на поведение простых и ударных волн. Система (1) содержит два уравнения для сдвиговых компонент деформаций, продольные компоненты деформаций выражаются через сдвиговые [4].

Как уже упоминалось, одним и тем же начальным условиям $u_1 = U_1, u_2 = U_2$ при $t = 0$, $x > 0$ и граничным условиям $u_1 = u_1^*, u_2 = u_2^*$ при $x = 0, t > 0$ в некоторой области задаваемых параметров могут соответствовать два различных решения, состоящих из последовательности простых и ударных волн, если величина $2g[(U_1^2 + U_2^2)\kappa_1]^{-1}$ достаточно мала [5, 6].

В случае $\kappa_1 > 0$ решение первого типа содержит быструю УВ и медленную ударную или простую волну. Решение второго типа представляет собой последовательность сложной быстрой волны и медленной ударной или простой волны. Сложная быстрая волна – это последовательность быстрых волн, движущихся с близкими скоростями (быстрая УВ с



Фиг. 2

u_1 и u_2 за и перед возмущением $A_1' \rightarrow B_1'$ (Δu_1 и Δu_2) равна разности этих же величин за и перед скачком $A_1 \rightarrow B_1$. Согласно предыдущему, можно считать, что скачок $A_1 \rightarrow B_1$ после взаимодействия со скачком $A_1 \rightarrow A_1'$ сохранил свою структуру, но распространяется по новому начальному состоянию среды, соответствующему точке A_1' .

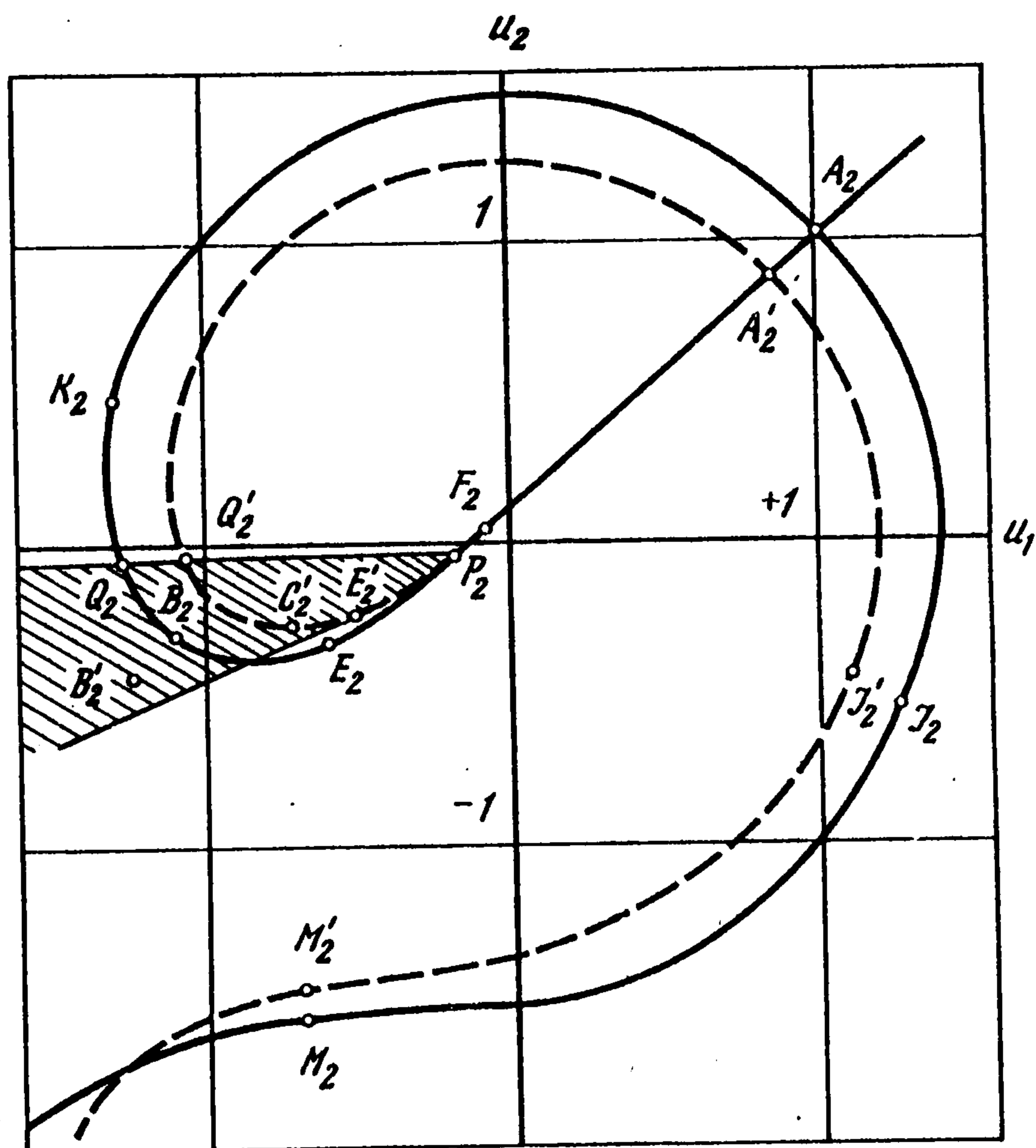
Исследуем эволюцию возмущения $A_1' \rightarrow B_1'$. Из точки A_1' как начальной проведена ударная адиабата $A_1'P_1'E_1'C_1'Q_1'A_1'M_1'$ (фиг. 1), изображенная штриховой линией. На фиг. 1 заштрихована область неединственности решения задачи для точки A_1' как начальной [1, 5]. Точка B_1' принадлежит этой области неединственности.

Для исследования эволюции возмущения $A_1' \rightarrow B_1'$ была поставлена следующая начально-краевая задача для системы уравнений (1). В качестве начальных условий ($t = 0$) задана структура скачка $A_1 \rightarrow B_1$, распространяющегося по состоянию A_1' , правое граничное условие ($t > 0, x = l$) взято в виде $U_1 = U_2 = 1$ (точка A_1' на фиг. 1). Система уравнений (1) решалась численно, так же как в [1, 2]. Численное решение поставленной начально-краевой задачи при достаточно больших временах представляет собой последовательность быстрой УВ $A_1' \rightarrow C_1'$ и медленной УВ $C_1' \rightarrow B_1'$, т.е. автомодельную асимптотику первого типа.

После взаимодействия волн $A_1 \rightarrow A_1'$ и $A_1 \rightarrow B_1$ влево будет распространяться возмущение $B_1 \rightarrow B_1'$. Точка B_1' не является точкой области неединственности решения автомодельной задачи для начальной точки B_1 . Поэтому система волн, движущихся после взаимодействия налево, определяется однозначно [5, 6, 7, 8].

2°. В случае $\kappa_1 > 0, 2g/\kappa_1 = 0,1$ рассмотрено взаимодействие УВ $A_2 \rightarrow A_2'$ и $A_2 \rightarrow B_2$ (фиг. 3) (координаты точек A_2, A_2', B_2 соответственно (1; 1), (0,86; 0,87), (-1,1; -0,3)). На фиг. 3 изображена ударная адиабата $A_2F_2P_2E_2Q_2K_2A_2I_2M_2$, проведенная из точки A_2 как начальной, и ударная адиабата $A_2'E_2C_2'Q_2'A_2'I_2M_2'$, проведенная из точки A_2' как начальной. В результате взаимодействия встречных УВ $A_2 \rightarrow A_2'$ и $A_2 \rightarrow B_2$ вправо будет распространяться возмущение $A_2' \rightarrow B_2'$, влево – возмущение $B_2 \rightarrow B_2'$. Точка B_2' принадлежит заштрихованной на фиг. 3 области неединственности решения автомодельной задачи, соответствующей точке A_2' как начальной.

Численно решалась начально-краевая задача для системы (1) с начальными условиями ($t = 0$), соответствующими структуре скачка $A_2 \rightarrow B_2$, распространяющегося по состоянию



Фиг. 3

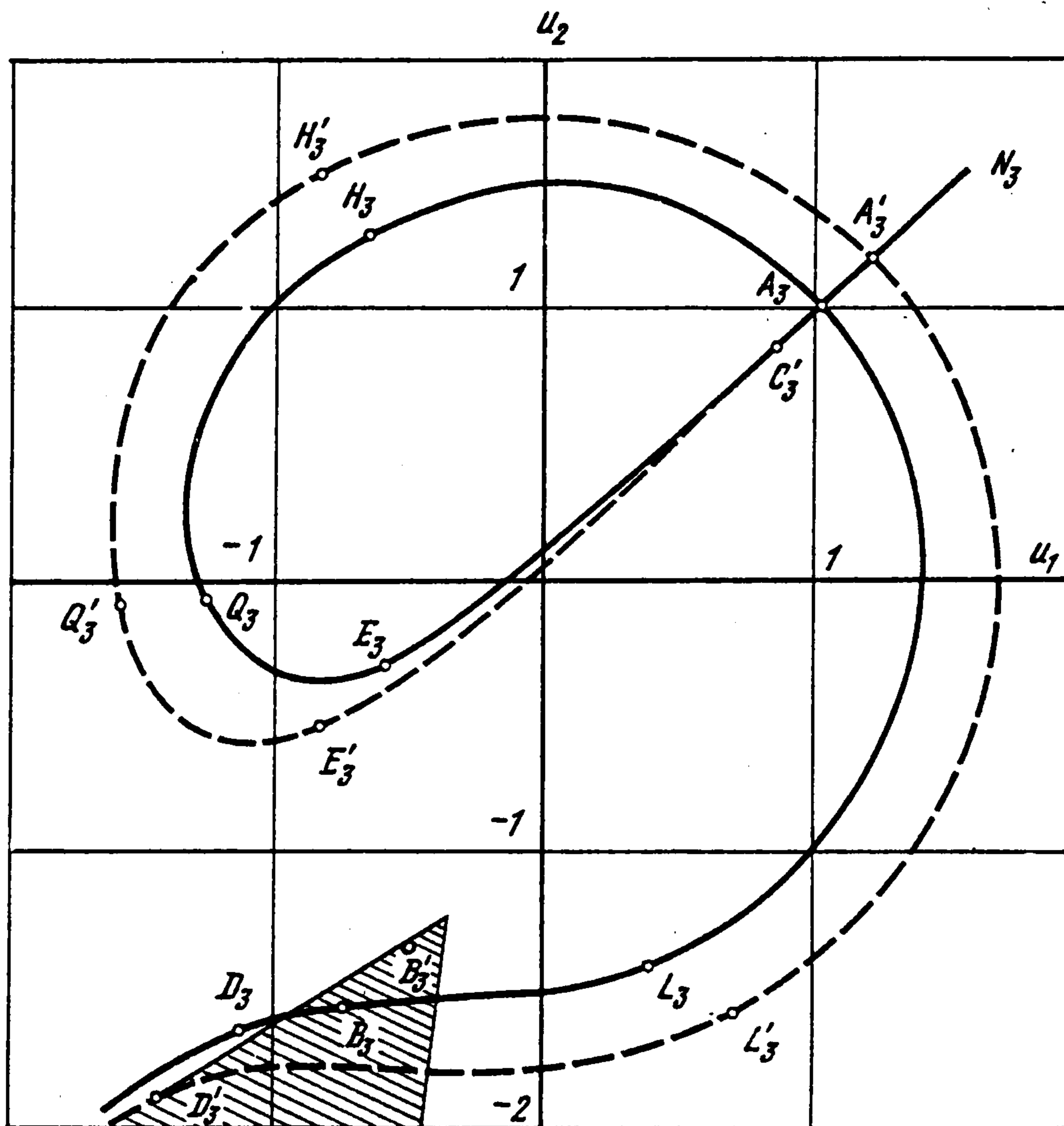
A_2' , правым граничным условием ($t > 0, x = l$) $U_1 = 0,86, U_2 = 0,87$, соответствующим точке A_2' (фиг. 3), и левым граничным условием ($t > 0, x = 0$) $u_1^* = -1,24, u_2^* = -0,43$, соответствующим точке B_2' (фиг. 3). Счет показал, что при достаточно больших временах решение состоит из быстрой УВ $A_2' \rightarrow C_2'$ и медленной простой волны $C_2' \rightarrow B_2'$, т.е. выходит на автомодельную асимптотику первого типа.

Система волн, движущихся после взаимодействия встречных УВ $A_2 \rightarrow A_2'$ и $A_2 \rightarrow B_2$ налево, определяется однозначно, так как точка B_2' не принадлежит области неединственности решения автомодельной задачи для точки B_2 как начальной.

3°. Пусть $\kappa_1 < 0, 2g/\kappa_1 = -0,1$. На фиг. 4 изображена ударная адиабата $A_3 F_3 Q_3 H_3 A_3 L_3 B_3 D_3$ (начальная точка $A_3(1;1)$, на которой отмечены отрезки эволюционности $A_3 H_3, L_3 D_3$, соответствующие медленным ударным волнам, и отрезок $A_3 N_3$, соответствующий эволюционным быстрым ударным волнам).

Исследуем взаимодействие встречных УВ $A_3 \rightarrow A_3'$ и $A_3 \rightarrow B_3$ (фиг. 4), (координаты точек A_3' и B_3 соответственно $(1,2; 1,2), (-0,72; -1,58)$). В результате взаимодействия этих двух УВ вправо будет распространяться возмущение $A_3' \rightarrow B_3'$, влево – возмущение $B_3 \rightarrow B_3'$. Из точки A_3' как начальной проведем ударную адиабату $A_3' E_3' Q_3' H_3' A_3' L_3' D_3'$. На фиг. 4 заштрихована область неединственности решения автомодельной задачи, соответствующей точке A_3' как начальной. Точка B_3' принадлежит этой области.

Численно решалась начально-краевая задача для системы уравнений (1) с начальными условиями ($t = 0$), соответствующими структуре скачка $A_3 \rightarrow B_3$, распространяющегося по состоянию A_3' , т.е. при условиях на правой границе ($t > 0, x = l$) $U_1 = U_2 = 1,2$,



Фиг. 4

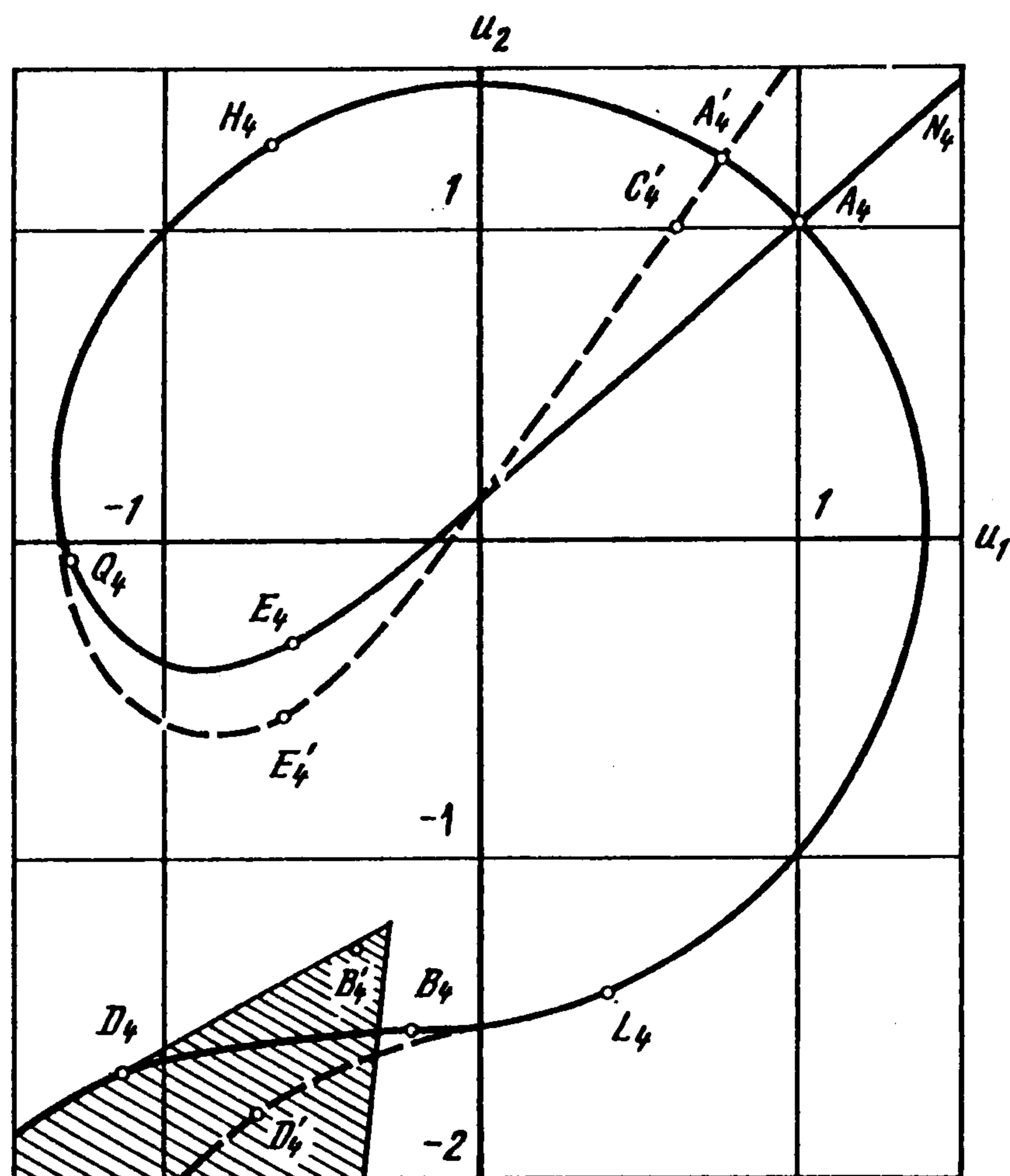
соответствующих точке B'_3 (фиг. 4), и значениями на левой границе ($t > 0, x = 0$) $u_1^* = -0,52$, $u_2^* = -1,38$, соответствующими точке B'_3 . Численный счет показал, что решение состоит из быстрой простой волны $A'_3 \rightarrow C'_3$ и медленной УВ $C'_3 \rightarrow B'_3$, т.е. представляет собой автомодельную асимптотику первого типа.

Система волн, движущихся после взаимодействия встречных УВ $A_3 \rightarrow A'_3$ и $A_3 \rightarrow B_3$ налево, определяется однозначно, так как точка B'_3 не принадлежит области неединственности решения автомодельной задачи для точки B_3 как начальной.

4°. Пусть $\kappa_1 < 0, 2g/\kappa_1 = -0,1$. На фиг. 5 изображена ударная адиабата $A_4 B_4 Q_4 H_4 A_4 L_4 B_4 D_4$ (начальная точка $A_4(1;1)$), $A_4 H_4, L_4 D_4$ – отрезки эволюционности, соответствующие эволюционным медленным УВ, $A_4 N_4$ – отрезок эволюционности, соответствующий эволюционным быстрым УВ.

В результате взаимодействия УВ $A_4 \rightarrow A'_4$ и $A_4 \rightarrow B_4$ ($A_4(0,76;1,22), B_4(-0,2;-1,53)$ на фиг. 5), движущихся навстречу друг другу, вправо будет распространяться возмущение $A'_4 \rightarrow B'_4$, влево – возмущение $B_4 \rightarrow B'_4$. $A'_4 C'_4 E'_4 A'_4 D'_4$ – ударная адиабата, проведенная из точки A'_4 как начальной. На фиг. 5 заштрихована область неединственности решения автомодельной задачи, соответствующей точке A'_4 как начальной. Точка B'_4 принадлежит этой области.

Численно решена следующая начально-краевая задача для системы уравнений (1) с начальными условиями, соответствующими структуре скачка $A_4 \rightarrow B_4$, распрост-



Фиг. 5

раняющегося по состоянию A_4' , т.е. при условиях на правой границе ($t > 0, x = l$) $U_1 = 0,76$, $U_2 = 1,22$ (точка A_4' на фиг. 5 и условиями на левой границе ($t > 0, x = 0$) $u_1^* = -0,44$, $u_2^* = -1,31$ (точка B_4' на фиг. 5).

Решение состоит из быстрой простой волны $A_4' \rightarrow C_4'$ и медленной УВ $C_4' \rightarrow B_4'$, т.е. представляет собой автомодельную асимптотику первого типа.

Система волн, движущихся после взаимодействия встречных УВ $A_4 \rightarrow A_4'$ и $A_4 \rightarrow B_4$ влево, определяется однозначно.

Таким образом, исследование взаимодействия двух УВ различных типов, движущихся навстречу друг другу, показало, что во всех рассмотренных случаях решение выходит на автомодельную асимптотику, соответствующую решению первого типа автомодельной задачи о об изменении нагрузки на границе нелинейно-упругого полупространства. Аналогичные результаты были получены [1, 2] при изучении задач о взаимодействии двух УВ, одна из которых догоняет другую.

Проведенные здесь, а также ранее [1, 2], расчеты позволяют предположить следующее: в тех случаях, когда в результате взаимодействия УВ в упругой среде с ничтожно малой вязкостью возникают задачи о распаде начального разрыва, их решения для последующих моментов времени, соответствующие асимптотике, по вязкости стремящейся к нулю, являются решениями первого типа. Если принять эту гипотезу, то для широкого класса задач о волнах в упругой среде с ничтожно малой вязкостью, предлагаемый выбор решения будет существенно определяться введенной в задачу вязкостью.

Автор благодарит А.Г. Куликовского и Е.И. Свешникову за внимание к работе и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чугайнова А.П. О формировании автомодельного решения в задаче о нелинейных волнах в упругом полупространстве // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 692–697.
2. Чугайнова А.П. О выходе нелинейных волн на автомодельный режим в задаче о действии внезапного изменения нагрузки на границе упругого полупространства // Изв. АН СССР. МТТ: 1990. № 3. С. 187–189.

3. Седов Л.И. *Механика сплошной среды*. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
4. Куликовский А.Г. Об уравнениях, описывающих распространение нелинейных квазипоперечных волн в слабонеизотропном упругом теле // *ПММ*. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 597–604.
5. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Автомодельная задача о действии внезапной нагрузки на границу упругого полупространства // *ПММ*. 1985. Т. 49. Вып. 2. С. 284–291.
6. Куликовский А., Свешникова Е.И. Нелинейные зоны, возникающие при изменении напряжений на границе упругого полупространства // *Вопросы нелинейной механики сплошной среды*. Таллинн: Валгус, 1985. С. 133–145.
7. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Распад произвольного разрыва в упругой среде при малой нелинейности и анизотропии // *Механика: Современные проблемы*. Под ред. Г.Г. Черного. М.: Изд-во МГУ. 1987. С. 164–169.
8. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в слабоанизотропных упругих средах // *ПММ*. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 110–115.

Крымская область

Поступила в редакцию
22.V.1991

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. В.Л. Андрианов

О СОПРОТИВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЮ НАГРУЗОК ВДОЛЬ УПРУГИХ НАПРАВЛЯЮЩИХ, ВЫЗВАННОМ ИЗЛУЧЕНИЕМ В НИХ ВОЛН

Находится аналитическое решение задачи, описывающей процесс колебания струны при движении по ней нагрузки при произвольном заданном законе движения. На основании полученной формулы выводится аналитическая зависимость для горизонтальной составляющей полной силы реакции струны, действующей в точке приложения нагрузки.

Предположим, что по струне, лежащей на вязком винклеровском основании, малые вертикальные колебания которой описываются уравнением

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + 2\delta u_t + h^2 u(x, t) = 0 \quad (1)$$

где $c = \sqrt{T/\rho}$ – скорость распространения поперечных волн в струне, T – натяжение, ρ – погонная плотность, величины δ и h характеризуют ее соответственно вязкие и упругие свойства, движется нагрузка P (вертикальная постоянная сила) по заданному закону

$$x = l(t) \in C_2[0, +\infty), \quad l(0) = 0, \quad \dot{l}(0) = v_0 \geq 0, \quad \ddot{l}(0) > 0$$

Считаем функцию $l(t)$ монотонно возрастающей, $l(+\infty) = +\infty$ и $\dot{l}(t) \neq c$.

Решение $u(x, t)$ будем искать отдельно для $x \geq 0$, т.е. $u(x, t) = u^\pm(x, t)$, $x \geq 0$, где функции $u^\pm(x, t)$ связаны соотношениями

$$u^+(0, t) = u^-(0, t), \quad u_x^+(0, t) = u_x^-(0, t), \quad t > 0$$

(под значением функции понимается соответствующий односторонний предел). Как известно [1], решение

$$u^+(x, t) = \begin{cases} u_2(x, t), & x > l(t) \quad ((x, t) \in D_2) \\ u_1(x, t), & x < l(t) \quad ((x, t) \in D_1), \quad x > 0, t > 0 \end{cases}$$