УДК (532.5+539.3): 534.1

 И.В. Андронов

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В ЖИДКОСТИ ПОД УПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ С ТРЕЩИНОЙ

Исследуется явление дифракции на короткой прямолинейной трещине в тонкой упругой пластине, находящейся в контакте с однородным акустическим полупространством. Получены асимптотики диаграмм направленности рассеянных волн. Проведено сравнение полученных результатов с диаграммой рассеяния изгибных волн на трещине в изолированной пластине.

1. Постановка задачи. Пусть пластина $\{z = 0\}$ с трещиной вдоль отрезка $\Lambda = \{|x| < a, y = 0, z = 0\}$, колебания которой в вакууме исследованы ранее [1], находится в контакте с акустической средой. Будем считать, что акустическая среда однородна и располагается лишь с одной стороны от пластины.

Колебания описанной системы возбуждаются некоторым источником, который не конкретизируется. Считаются известными поле звукового давления u_0 и поле смещений пластины ξ_0, которые возбуждаются источником в задаче для пластины без трещины. Требуется найти рассеянную на трещине составляющую волнового процесса.

Давление в среде удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad z > 0 \tag{1.1}$$

Здесь k – волновое число звуковых колебаний. На бесконечности выполняются условия излучения. На пластине граничное условие имеет вид

$$\{(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)^2 - k_0^4\}\xi + D^{-1}u|_{z=0} = 0, \quad \{x,y\} \notin \Lambda,$$
$$\xi = \rho^{-1}\omega^{-2}\partial u/\partial z|_{z=0}, \quad k_0^4 = h\rho\omega^2/D \tag{1.2}$$

причем предполагается, что пластина совершает лишь изгибные колебания, описываемые функцией ξ. Волновое число колебаний свободной пластины k_0 определяется параметрами D, ρ, h (цилиндрическая жесткость, плотность материала и толщина пластины) и частотой ω.

Условия на кромках трещины, означающие отсутствие перерезывающей силы и изгибающего момента, совпадают с соответствующими условиями в задаче об изолированной пластине [1]

$$\mathbf{M}^{\pm}\xi \equiv \lim_{y\to\pm 0}(\xi_{yy} + \sigma\xi_{xx}) = 0, \qquad |x| < a$$
$$\mathbf{F}^{\pm}\xi \equiv \lim_{y\to\pm 0}(\xi_{yyy} + (2-\sigma)\xi_{xxy}) = 0, \quad |x| < a \tag{1.3}$$

Здесь σ – коэффициент Пуассона материала пластины.

Для звукового давления u в окрестности трещины ставятся условия Майкснера

$$\nabla u = O(r^{-\delta}), \quad \delta < 1 \tag{1.4}$$

а смещение пластины ξ у концов трещины должно удовлетворять условию конечности энергии [2]

$$\nabla\xi = O(r^{\delta}), \quad \delta \geqslant 0 \tag{1.5}$$

Производя растяжение координат, можно считать что $a = 1$. Ниже для сокращения записи рассматривается этот случай.

2. Интегральные уравнения. Сведем задачу к системе интегральных уравнений на отрезке. Рассеянное поле u_1 будем искать при помощи преобразования Фурье по x и по y в виде суммы четырех слагаемых:

$$u_1 = -\frac{2i}{\pi}k_0^4 \sum_{j=0}^{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0\lambda x} e^{ik_0\mu y} p_j(\lambda)\mu^j \frac{\exp(-L_1(\lambda,\mu)z)}{L(\lambda,\mu)} d\mu \tag{2.1}$$

$$L(\lambda,\mu) = -k_0^4 L_0(\lambda,\mu) L_1(\lambda,\mu) + \nu, \quad \nu = \rho\omega^2 / D$$

$$L_0(\lambda,\mu) = (\lambda^2 + \mu^2)^2 - 1, \quad L_1(\lambda,\mu) = \sqrt{k_0^2(\mu^2 + \lambda^2) - k^2}$$

с неизвестными $p_j(\lambda)$. Функция $L(\mu, \lambda)$ является фурье-образом условия на пластине (1.2).

Поведение неизвестных функций $p_j(\lambda)$ на бесконечности определяется условиями (1.5):

$$p_j(\lambda) = O(\lambda^{\delta - j}), \quad \delta > 0 \tag{2.2}$$

Можно установить, что условия Майкснера (1.4) при этом выполняются. Контур интегрирования обходит полюсы подынтегрального выражения, лежащие на положительной полуоси, снизу, а лежащие на отрицательной полуоси, – сверху. Такое проведение контура следует из условий излучения.

Представление (2.1) удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условию излучения по координате z. Граничное условие (1.2) приводит к интегральным уравнениям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0 x\tau} p_j(\tau) d\tau = 0, \quad |x| > 1 \tag{2.3}$$

Теперь обратимся к гранично-контактным условиям (1.3). Смещение пластины выражается двукратным интегралом Фурье

$$\xi_1 = -\frac{2ik_0^4}{\rho\omega^2\pi} \sum_{j=0}^{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0\lambda x} e^{ik_0\mu y} p_j(\lambda)\mu^j \frac{L_1(\lambda,\mu)}{L(\lambda,\mu)} d\mu\, d\lambda \tag{2.4}$$

Переход к пределу по y под знаком интеграла при подстановке этого выражения в гранично-контактные условия (1.3) приводит к расходимости интегралов, которые должны быть регуляризованы. Чтобы упростить эту процедуру, выделим в (2.4) составляющую, отвечающую вакуумной задаче. Для этого представим дробь, стоящую под знаком интеграла в (2.4), в виде

$$\frac{L_1(\lambda,\mu)}{L(\lambda,\mu)} = \frac{k_0^{-4}}{L_0(\lambda,\mu)} - \frac{\nu k_0^{-4}}{L_0(\lambda,\mu) L(\lambda,\mu)} \tag{2.5}$$

Первое слагаемое в (2.5) порождает представление для смещения $\xi_1^{(0)}$ в задаче об изолированной пластине, в чем легко убедиться, вычислив интегралы по λ. (Ниже все объекты, отвечающие задаче об изолированной пластине, будут снабжаться верхним нулевым индексом, для поправок будем писать индекс единица.) Выражения, возникающие при подстановке этого слагаемого в гранично-контактные условия (1.3), получены в [1].

Обратимся к поправочному члену $\xi_1^{(1)}$, соответствующему второму слагаемому в (2.5). Для этого члена убывание подынтегральной функции оказывается достаточным для проведения операций дифференцирования и вычисления предела под знаком интеграла. В результате получаем интегральные уравнения на отрезке, которые вместе с (2.3) завершают сведение исходной задачи к системе парных интегральных уравнений.

Интегральные уравнения, отвечающие условиям $\mathbf{F}^+\xi = \mathbf{F}^-\xi$ и $\mathbf{M}^+\xi = \mathbf{M}^-\xi$ выполненным на всей оси, допускают явное решение

$$p_0(\mu) = \sigma\mu^2 p_2(\mu), \quad p_1(\mu) = (2-\sigma)\mu^2 p_3(\mu)$$

Остальные контактные условия приводят к уравнениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_0x\mu} h_2(\mu) p_2(\mu) d\mu = \rho\omega^2 \mathbf{M}\xi_0(x), \quad |x|<1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_0x\mu} h_3(\mu) p_3(\mu) d\mu = \rho\omega^2 \mathbf{F}\xi_0(x), \quad |x|<1 \tag{2.6}$$

Функции h_2 и h_3 отличаются от приведенных в [1] на добавки, порожденные поправочными членами (2.5):

$$h_n(\mu) = h_n^{(0)} + h_n^{(1)}$$

$$h_2^{(0)}(\mu) = \zeta_-(\mu)(1-\mu^2)^{-1/2} - \zeta_+(\mu)(1+\mu^2)^{-1/2}$$

$$h_3^{(0)}(\mu) = -i\zeta_+(\mu)(1-\mu^2)^{1/2} - \zeta_-(\mu)(1+\mu^2)^{1/2}$$

$$\zeta_\pm(\mu) = [(1-\sigma)\mu^2 \pm 1]^2$$

$$h_2^{(1)}(\mu) = \frac{2i\nu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda^2+\sigma\mu^2)^2}{L_0(\lambda,\mu)L(\lambda,\mu)} d\lambda$$

$$h_3^{(1)}(\mu) = \frac{2i\nu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda^2+(2-\sigma)\mu^2)^2}{L_0(\lambda,\mu)L(\lambda,\mu)} \lambda^2 d\lambda$$

Дальнейшие выкладки повторяют приведенные в[1]. Для того чтобы удовлетворить уравнениям (2.3), будем искать $p_j(\mu)$ в виде

$$p_n(\mu) = \int_{-1}^{1} q_n(t) e^{-ik_0t\mu} dt$$

Поведение функций $q_j(t)$ у концов интервала интегрирования определяется асимптотиками (2.2)

$$q_j(t) = (1-t^2)^{j-2+\delta} Q(t), \quad \delta<0, \quad Q\in C([-1,1]) \tag{2.7}$$

После смены порядка интегрирования в (2.6) для $q_j(t)$ получим интегральные уравнения свертки на отрезке

$$\mathbf{H}_n q_n \equiv \int_{-1}^{1} H_n(x-t) q_n(t) dt = k_0^{2(1-n)} f_n(x), \quad |x|<1 \tag{2.8}$$

Сингулярные члены ядер H_n совпадают с вычисленными в [1] для случая дифракции на трещине в изолированной пластине. Следовательно, интегральные уравнения (2.8) разрешимы в классах (2.7) единственным образом и показатель δ при этом равен $^1/_2$. Решения ищутся по методу ортогональных многочленов:

$$q_2(t) = (1-t^2)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l U_l(t), \quad q_3(t) = (1-t^2)^{3/2} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l C_l^{(2)}(t)$$

Выбор полиномов Чебышева второго рода $U_l(t)$ и Гегенбауэра $C_l^{(2)}(t)$ связан с тем, что эти полиномы образуют собственные функции старших частей интегральных операторов $\mathbf{H}_2$ и $\mathbf{H}_3$.

В результате интегральные уравнения сводятся к бесконечным алгебраическим системам

$$\begin{gathered}
-\kappa(1+1)\cdot\alpha_1 + \pi^{-2}k_0^2 \sum_{l=0}^{\infty} A_{lm}\alpha_m = \pi^{-2} f_1^{(2)} \\
\frac{\kappa}{4}(1+1)^2(1+2)(1+3)^2\beta_1 + \pi^{-2}k_0^3 \sum_{l=0}^{\infty} B_{lm}\beta_m = \pi^{-2} f_1^{(3)}
\end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\kappa = (1-\sigma)(3+\sigma)$$

$$f_1^{(2)} = i\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{1/2} U_l(x)\mathbf{M}\xi_0(x)dx$$

$$f_1^{(3)} = -\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{3/2} C_l^{(2)}(x)\mathbf{F}\xi_0(x)dx$$

Убывание $h_j^{(1)}(\mu)$ на бесконечности приводит к убыванию по индексам $1, m$ поправок к матрицам $A^{(0)}$ и $B^{(0)}$, что позволяет доказать аналогично [1] однозначную разрешимость систем (2.9).

После замены переменных интегрирования

$$\mu = \tau\cos\alpha, \quad \lambda = \tau\sin\alpha \tag{2.10}$$

поправки $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$ выражаются двукратными интегралами:

$$A_{lm}^{(1)} = 16k_0^2\nu(l+1)(m+1)i^{l-m+1}\int_0^{\infty}\frac{G_{l+1\,m+1}^{(1)}(k_0\tau)}{L(\tau)}\frac{\tau^3}{\tau^4-1}d\tau$$

$$B_{lm}^{(1)} = -4k_0\nu\frac{(l+3)!(m+3)!}{l!m!}i^{l-m+1}\int_0^{\infty}\frac{G_{l+2\,m+2}^{(2)}(k_0\tau)}{L(\tau)}\frac{\tau^3}{\tau^4-1}d\tau$$

$$G_{lm}^{(1)}(\chi) = \int_0^{\pi/2} J_l(\chi\cos\alpha)J_m(\chi\cos\alpha)\frac{(\sin^2\alpha+\sigma\cos^2\alpha)^2}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$G_{lm}^{(2)}(\chi) = \int_0^{\pi/2} J_l(\chi\cos\alpha)J_m(\chi\cos\alpha)\frac{(\sin^2\alpha+(2-\sigma)\cos^2\alpha)^2}{\cos^4\alpha}\sin^2\alpha\, d\alpha$$

$$L(\tau) = -k_0^4(\tau^4-1)\sqrt{k_0^2\tau^2-k^2}+\nu$$

3. Асимптотики поля на больших расстояниях. Рассмотрим два варианта возбуждения:

1°. Плоская акустическая волна

$$u^{(i)} = \exp\{ik(x\cos\varphi_0 \sin\theta_0 + y\sin\varphi_0 \sin\theta_0 + z\cos\theta_0)\}$$

2°. Плоская поверхностная волна

$$u^{(i)} = \exp\{i\tau_0(x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0) - \sqrt{\tau_0^2 - k^2}\, z\}$$

Здесь τ_0 – положительный корень дисперсионного уравнения

$$\sqrt{\tau^2 - k^2}\,(\tau^4 - k_0^4) - \nu = 0$$

асимптотически при $\omega \to 0$, стремящийся к $\nu^{1/5}$ [3].

В первом случае геометрическая часть поля u_0 определяется суперпозицией падающей и отраженной от пластины плоской волны $u^{(r)}$

$$u^{(r)} = R(\theta_0)\exp\{ik(x\cos\varphi_0 \sin\theta_0 + y\sin\varphi_0 \sin\theta_0 - z\cos\theta_0)\}$$

$$R(\theta_0) = R_- / R_+, \quad R_\pm = ik\cos\theta_0(k^4\sin^4\theta_0 - k_0^4) \pm \nu$$

($R(\theta_0)$ – коэффициент отражения).

Во втором случае геометрическая часть состоит только из падающей волны $u^{(i)}$.

Исследуем асимптотику дифракционной части поля в дальней зоне. Для этого в (2.1) проведем замену переменных (2.10) и вычислим интеграл по α. Дифракционная часть поля состоит из расходящейся поверхностной волны, формируемой вкладами вычета в полюсе $\tau = \tau_0 k_0^{-1}$,

$$u_{\text{surf}} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0 r}}\, e^{i\tau_0 r - i\pi/4} e^{-\sqrt{\tau_0^2 - k^2}\, z}\, \Psi_0(\varphi)$$

и сферической волны, отвечающей вкладу точки перевала $\tau = \tau_0 k_0^{-1}\cos\varphi$,

$$u_{\text{spher}} \approx \frac{2\pi}{kR} e^{ikR - i\pi/2}\, \Psi_s(\varphi, \theta)$$

Здесь

$$\Psi_0(\varphi) = 2i(5\pi\tau_0)^{-1}\{p_2(\tau_0\cos\varphi)Q(\varphi) + p_3(\tau_0\cos\varphi)\tau_0\cos\varphi(\sin^2\varphi + (2-\sigma)\cos^2\varphi)\}$$

$$\Psi_s(\varphi,\theta) = \frac{-2\pi^{-1}k^4\cos\theta\sin^2\theta}{k\cos\theta(k^4\sin^2\theta - k^4) - \nu i}\{p_2(k\sin\theta\cos\varphi)Q(\varphi) +$$

$$+ p_3(k\sin\theta\cos\varphi)k\sin\theta\cos\varphi(\sin^2\varphi + (2-\sigma)\cos^2\varphi)\}$$

$$Q(\varphi) = \sin^2\varphi + \sigma\cos^2\varphi$$

Найдем асимптотики Ψ_0 и Ψ_s по малому параметру k_0 (т.е., по $k_0 a$ в первоначальных обозначениях). Для этого рассмотрим первое уравнение в (2.9). Можно показать, что старшие члены в асимптотиках диаграмм определяются значением коэффициента α_0. Остальные коэффициенты имеют более высокий порядок малости

$$\alpha_0\{-\kappa + \pi^{-2}k_0^2(A_{00}^{(0)} + A_{00}^{(1)})\} + \ldots = i\pi^{-1}M\xi_0(0,0) \tag{3.1}$$

$$A_{00}^{(0)} + A_{00}^{(1)} = O(k_0^{-2}\nu^{2/5})$$

Здесь ξ_0 – отвечающее u_0 смещение пластины. Внедиагональными членами, замененными многоточием, пренебрежем ввиду более высокого порядка малости коэффициентов $\alpha_2, \alpha_4, \ldots$.

Правая часть равенства (3.1) в случае падения плоской акустической волны имеет вид

$$\pi^{-1}(1 - R(\theta_0))k^3 \cos\theta_0 \sin^2\theta_0\, Q(\varphi_0)$$

что дает асимптотики

$$\begin{aligned} &\Psi_0^{(1)}(\varphi) = -2(5\pi\kappa)^{-1} k^3 a^2 \nu^{-1/5} \cos\theta_0 \sin^2\theta_0\, Q(\varphi) Q(\varphi_0) \\ &\Psi_s^{(1)}(\varphi,\theta) = ik^7 a^2 (\pi\kappa\nu)^{-1} \cos\theta_0 \sin^2\theta_0\, Q(\varphi_0) \cos\theta \sin^2\theta\, Q(\varphi) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для второго случая возбуждения в качестве правой части (3.1) имеем

$$i\pi^{-1}\sqrt{\tau_0^2 - k^2}\, \tau_0^2 Q(\varphi_0)$$

что дает

$$\begin{aligned} &\Psi_0^{(2)}(\varphi) = -2i(5\pi\kappa)^{-1} \tau_0^3 a^2 \nu^{-1/5} Q(\varphi_0) Q(\varphi) \\ &\Psi_s^{(2)}(\varphi,\theta) = -k^7 \tau_0^3 a^2 (\pi\kappa\nu)^{-1} Q(\varphi_0) \cos\theta \sin^2\theta\, Q(\varphi) \end{aligned} \tag{3.3}$$

В формулах (3.2), (3.3) вернулись к размерным величинам, a – полудлина трещины.

Отметим, что несовпадение значений диаграмм $\Psi_0^{(1)}(\varphi_0, \theta_0, \varphi)$ и $\Psi_s^{(2)}(\varphi, \varphi_0, \theta_0)$ объясняется тем, что плоская акустическая и поверхностная волны имеют разную энергию.

Сравнивая асимптотику (3.2) с диаграммой в задаче рассеяния изгибных волн на трещине в изолированной пластине [1]

$$\Psi(\varphi_0, \varphi) = i(4\kappa)^{-1}(k_0 a)^2 Q(\varphi_0) Q(\varphi) \tag{3.4}$$

можно заметить, что появление акустической среды приводит к увеличению диаграммы. В случае бесконечной трещины [3] эффект будет обратным. В изолированной пластине трещина полностью отражает падающую изгибную волну, а наличие акустической среды приводит к возникновению прошедшей изгибной волны. Таким образом, акустическая среда с одной стороны приводит к появлению дополнительных "путей" огибания препятствия и тем самым уменьшает эффективное сечение рассеяния. С другой стороны, благодаря наличию акустической среды появляется дополнительный канал рассеяния (уходящей в акустическую среду волны) и поперечник рассеяния увеличивается. В случае достаточно длинной трещины преобладающим является, очевидно, первый эффект, что и объясняет известный результат [3]. Для коротких трещин, как следует из сравнения (3.3) и (3.4), преобладает влияние появившегося дополнительного канала рассеяния.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов И.В.* Рассеяние изгибной волны на конечной прямолинейной трещине в упругой пластине // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 312–321.
2. *Андронов И.В., Белинский Б.П.* О потоках энергии в окрестности конца трещины в изгибно колеблющейся пластине // Изв. АН СССР МТТ. 1990. № 3. С. 184–187.
3. *Коузов Д.П.* Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1037–1043.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 23.I.1992