ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. ТОМ 57, ВЫП. 2, 1993

УДК 539.375

© 1993 г. В.В. Сильвестров

КУСОЧНО-ОДНОРОДНАЯ УПРУГАЯ ПЛОСКОСТЬ СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ЗАКРЫТЫХ ТРЕЩИН

Рассматривается напряженно-деформированное состояние кусочно-однородной упругой плоскости, составленной из разных полуплоскостей, и в которой на линии раздела сред имеется счетное множество закрытых трещин, сгущающихся в бесконечности с одной или с двух сторон. На берегах трещин задаются касательные напряжения, а на бесконечности задаются напряжения и вращение.

Методом краевой задачи Римана для счетного множества контуров построены комплексные потенциалы задачи и получены формулы для коэффициента интенсивности напряжений. Изучена также задача взаимодействия закрытой макротрещины с бесконечным рядом коллинеарных ей закрытых микротрещин.

Ранее были изучены [1–4] частные случаи рассматриваемой задачи: однородная и кусочно-однородная плоскости с конечной и бесконечной периодической системами закрытых трещин. В последнем случае напряжения на берегах трещин, вообще говоря, непериодические.

1. Постановка задачи. Пусть в упругой плоскости $z = x + iy$, склеенной из однородных изотропных верхней и нижней полуплоскостей с различными упругими характеристиками, имеется счетное множество закрытых трещин $L_n = [a_n, b_n]$, $n \in I$, расположенных на линии склеивания сред, сгущающихся на ∞ и удовлетворяющих условиям

$$b_n - a_n \leqslant D < \infty, \quad a_{n+1} - a_n \geqslant d > 0, \quad n \in I \tag{1.1}$$

где множество индексов $I = \{0, \pm 1, \ldots\}$ или $I = \{0, 1, \ldots\}$. В первом случае трещины сгущаются в точке ∞ с двух сторон, а во втором – в точке $+\infty$. Условиям (1.1) удовлетворяют, например, трещины, расположенные периодически на всей действительной оси или только на полуоси.

Пусть 1) на берегах $L_n^\pm$ трещин действуют заданные касательные напряжения $\tau_{xy}^\pm(t) = h^\pm(t)$, $t \in L_n$, непрерывные по Гельдеру на каждом отрезке L_n и убывающие при $t \to \infty$ как $O(t^{-\lambda})$, $\lambda > 1$, 2) нормальное напряжение σ_y и нормальное смещение υ при переходе с одного берега трещины L_n на другой берег меняются непрерывно, т.е. $\sigma_y^+(t) = \sigma_y^-(t)$, $\upsilon^+(t) = \upsilon^-(t)$, $t \in L_n$, и 3) вне трещин на линии склеивания сред имеет место полное сцепление.

В данном случае напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} вращение ω и частные производные u', υ' по x от компонент смещения выражаются через две кусочно-голоморфные функции $\Phi_{1,2}(z)$ с линией разрыва $L = \bigcup\limits_{n \in I} L_n$, называемые комплексными потенциалами, по формулам [5]:

$$\tfrac{1}{4}(\sigma_x+\sigma_y)+2i\mu_j(\kappa_j+1)^{-1}\omega=r_j\Phi_1(z)+r_{j+2}\Phi_2(z)$$

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=r_j\Phi_1(z)+r_{j+2}\Phi_2(z)+\Omega_j(z)$$

$$2\mu_j(u'+i\upsilon')=\kappa_j[r_j\Phi_1(z)+r_{j+2}\Phi_2(z)]-\Omega_j(z),\quad j=1,2 \tag{1.2}$$

$$\Omega_j(z)=r_j(z-\bar z)\overline{\Phi_1'(z)}+r_{3-j}(\bar z)+r_{j+2}[(z-\bar z)\overline{\Phi_2'(z)}-\Phi_2(\bar z)]$$

$$r_1=(\kappa_1+m)^{-1},\quad r_2=(1+m\kappa_2)^{-1},\quad r_3=m(1+\kappa_2),\quad r_4=1+\kappa_1,\quad m=\mu_1\mu_2^{-1}$$

где индекс j = 1 относится к верхней полуплоскости, а индекс j = 2 – к нижней полуплоскости. Здесь μ_j – модуль сдвига, $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$ в случае плоской деформации и $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ в случае плоского напряженного состояния, а ν_j – коэффициент Пуассона.

Задача. Найти напряженно-деформированное состояние плоскости с трещинами L_n, $n \in I$, определяемое формулами (1.2), когда комплексные потенциалы $\Phi_{1,2}(z)$ в вершинах трещин могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, в точках t линии L, кроме концов, удовлетворяют условию

$$\lim(z-\bar z)\Phi_{1,2}'(z)=0 \quad \text{при} \quad z\to t^{\pm} \tag{1.3}$$

и при больших z, расположенных вне любой фиксированной малой окрестности $U(L)$ линии L, удовлетворяют неравенствам

$$|\Phi_{1,2}(z)|\leq M|z|^{-\lambda},\quad |(z-\bar z)\Phi_{1,2}'(z)|\leq M|z|^{-\lambda},\quad M=\text{const},\quad \lambda>1 \tag{1.4}$$

Очевидно, этим же неравенствам будут удовлетворять при больших $z \notin U(L)$ и напряжения. В данном случае, как и в случае основных задач теории упругости для плоскости с конечным числом разрезов [6], можно показать, что рассматриваемая задача, если она разрешима, имеет единственное решение.

Из граничных условий на линии L

$$\tau_{xy}^{\pm}(t)=h^{\pm}(t),\quad \sigma_y^{+}(t)=\sigma_y^{-}(t),\quad \upsilon^{+}(t)=\upsilon^{-}(t)$$

на основании равенств (1.2), (1.3) получим краевые задачи

$$\operatorname{Im}\Phi_1^{+}(t)=g(t)+r_2h(t),\quad \operatorname{Im}\Phi_1^{-}(t)=g(t)-r_1h(t),\quad t\in L \tag{1.5}$$

$$\Phi_2^{+}(t)-\Phi_2^{-}(t)=if(t),\quad t\in L \tag{1.6}$$

$$f(t)=(h^{-}(t)-h^{+}(t))/(r_3+r_4),\quad g(t)=-(r_4h^{+}(t)+r_3h^{-}(t))/(r_3+r_4)$$

$$h(t)=m(1-\kappa_1\kappa_2)f(t)/(r_1+r_2)$$

Записав условие равновесия части плоскости с трещинами, расположенной в круге $|z|\leq R$, и взяв предел при $R\to\infty$, получим, что в рассматриваемом случае главный вектор P касательных усилий, действующих на берегах всех трещин, равен нулю, т.е.

$$\int_L f(t)dt=-(r_3+r_4)^{-1}P=0 \tag{1.7}$$

Это необходимое условие разрешимости задачи будем считать выполненным.

2. Решение задачи. Решение задачи (1.6) имеет вид [7]

$$\Phi_2(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{f(t)dt}{t-z}=\sum_{n\in I}\frac{1}{2\pi}\int_{L_n}\frac{f(t)dt}{t-z} \tag{2.1}$$

где несобственный интеграл по L и ряд в любой замкнутой ограниченной области, не содержащей точек линии L, сходятся абсолютно и равномерно по z. В силу (1.7) имеем

$$\Phi_2(z)=\frac{1}{2\pi z}\int_L\frac{tf(t)dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi z}\int_L f(t)dt=\frac{1}{2\pi z}\int_L\frac{tf(t)dt}{t-z} \tag{2.2}$$

Так как функция $tf(t)$ при $t\to\infty$ убывает как $O(t^{1-\lambda})$, $\lambda>1$, то при больших $z\notin U(L)$ функция $\Phi_2(z)$ удовлетворяет неравенствам (1.4).

Решение задачи (1.5) имеет вид [8] $\Phi_1(z)=\Psi_1(z)+\Psi_2(z)$, где функция $\Phi_1(z)$ удовлетворяет условиям

$$\Psi_1^+(t)+\Psi_1^-(t)=ip(t),\quad p(t)=2g(t)+(r_2-r_1)h(t),\quad t\in L \tag{2.3}$$

$$\overline{\Psi_1(\bar z)}=-\Psi_1(z),\quad z\notin L \tag{2.4}$$

а $\Psi_2(z)$ – решение задачи

$$\Psi_2^+(t)-\Psi_2^-(t)=im(1-\kappa_1\kappa_2)f(t),\quad t\in L$$

$$\overline{\Psi_2(\bar z)}=\Psi_1(z),\quad z\notin L$$

откуда $\Psi_2(z)=m(1-\kappa_1\kappa_2)\Phi_2(z)$. Следовательно,

$$\Phi_1(z)=\Psi_1(z)+m(1-\kappa_1\kappa_2)\Phi_2(z) \tag{2.5}$$

Возьмем частное решение задачи (2.3) в виде

$$\Psi_0(z)=X(z)F(z)$$

$$X(z)=\prod_{n\in I}\frac{z-c_n}{[(z-a_n)(z-b_n)]^{1/2}},\quad c_n=\frac{a_n+b_n}{2} \tag{2.6}$$

$$F(z)=\sum_{n\in I}F_n(z),\quad F_n(z)=\frac{1}{2\pi(z-c_n)}\int_{L_n}\frac{t-c_n}{X^+(t)}\frac{p(t)dt}{t-z} \tag{2.7}$$

где бесконечное произведение и ряд в любой замкнутой ограниченной области, не содержащей точек линии L, сходятся в силу (1.1) абсолютно и равномерно, а под $X(z)$ понимается ветвь, однозначная в плоскости с разрезом по линии L, имеющая при $z=$ $=iy\to\pm i\infty$ предел, равный единице. В точках c_n, $n\in I$ функция $X(z)$ обращается в нуль первого порядка. Вне окрестности $U(L)$ она удовлетворяет неравенствам

$$0<M_1\leqslant|X(z)|\leqslant M_2<\infty,\quad |(z-\bar z)X'(z)|\leqslant M_2$$

а функция $F(z)$ удовлетворяет неравенствам (1.4). Тогда функция $Q(z)=$ $=(\Psi_0(z)-\Psi_1(z))/(iX(z))$ мероморфна с простыми полюсами c_n, $n\in I$ и при больших $z\notin U(L)$ удовлетворяет неравенствам (1.4), поэтому [9]

$$Q(z)=\sum_{n\in I}A_n/(z-c_n) \tag{2.8}$$

где числа A_n таковы, что ряд в любой замкнутой ограниченной области, не содержащей точек c_n, сходится равномерно. Следовательно,

$$\Psi_1(z)=X(z)[F(z)-iQ(z)] \tag{2.9}$$

Так как $\overline{X(\bar{z})} = X(z)$, а функция $F(z)$, как функция $\Psi_1(z)$, удовлетворяет условию (2.4), то $\overline{Q(\bar{z})} = Q(z)$, для чего необходимо и достаточно, чтобы числа A_n были вещественными. Согласно равенствам (1.2), (1.6), (2.3), (2.5) однозначность смещений при обходе вокруг трещин выражается условиями

$$\operatorname{Re} \int_{L_n} \psi_1^+(t)dt = 0, \qquad n \in I$$

откуда, подставив вместо $\Psi_1^+(t)$ ее значение, получим для нахождения постоянных A_n бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k \in I} \delta_{nk} A_k = H_n, \qquad n \in I$$
$$\delta_{nk} = i \int_{L_n} X^+(t)(t - c_k)^{-1} dt, \qquad H_n = \int_{L_n} X^+(t) F(t) dt \tag{2.10}$$

где под $F(t)$ понимается главное значение интеграла (2.7). Так как функции $X^+(t)$, $F(t)$ на L_n принимают чисто мнимые значения, то числа δ_{nk}, H_n – вещественные, причем H_n при больших n удовлетворяют неравенству $|H_n| \leqslant M|n|^{-\lambda}$, $\lambda > 1$.

Решение системы (2.10) надо искать в классе П вещественных последовательностей A_n, $n \in I$ таких, что ряд (2.8) в любой замкнутой ограниченной области, не содержащей точек c_n, сходится равномерно и определяет функцию $Q(z)$, удовлетворяющую при больших $z \notin U(L)$ неравенствам (1.4). Из единственности решения задачи упругости следует, что если система (2.10) в указанном классе последовательностей разрешима, то ее решение единственно. Разрешимость этой системы в некоторых случаях расположения трещин удалось доказать методами функционального анализа, причем решение системы можно найти методом последовательных приближений или методом редукции и оно при больших n удовлетворяет неравенству $|A_n| \leqslant M|n|^{-\lambda}$, $\lambda > 1$. Это имеет место, например, в следующих случаях [10, 11]:

А. $L_n = [n\pi - a, n\pi + a]$, $n = 0, \pm 1, \dots$, т.е. трещины расположены периодически на всей действительной оси. В этом случае

$$X(z) = (\sin^2 z - \sin^2 a)^{-1/2} \sin z \tag{2.11}$$

а система (2.10) имеет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{n-k} A_k = H_n, \qquad n = 0, \pm 1, \dots$$

$$\delta_n = \int_0^a \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} \frac{\sin x \; dx}{(\sin^2 a - \sin^2 x)^{1/2}}$$

откуда [12, 13]

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{H(t)}{\delta(t)} \frac{dt}{t^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{n-k} H_k$$

$$H(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n t^n, \qquad \delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n t^n$$

где ξ_n – коэффициенты Фурье функции $1/\delta(t)$.

Б. $L_n = [n - a, n + a]$, $n = 0, 1, \dots$, т.е. трещины расположены периодически только на полуоси. В этом случае

$$X(z) = (\Gamma(a-z)\Gamma(-a-z))^{1/2} / \Gamma(-z) \tag{2.12}$$

В. Часть трещин расположена периодически с одним периодом на действительной отрицательной полуоси, другая часть – периодически с другим периодом на положительной полуоси, а третья часть, состоящая не более чем из конечного числа трещин, является непериодической. В этом случае функция $X(z)$ также выражается через Г-функцию.

Г. Трещины таковы, что при больших положительных n выполняются неравенства $a_{n+1} \geqslant da_n$, $a_{-n-1} \leqslant da_{-n}$, $d = \text{const} > 1$.

В общем случае расположения трещин вопрос о разрешимости системы (2.10) в указанном классе последовательностей П остается открытым.

Из формул (1.2), (2.1), (2.5)–(2.9) видно, что интенсивность напряжений вблизи вершины $g_n = a_n$ или $g_n = b_n$ трещины L_n определяется с точностью до $\ln|z - g_n|$ функцией $\Phi_1(z)$, которая имеет вид [8]

$$\Phi_1(z) = -iK_n^{\pm}(r_1 + r_2)^{-1}[\pm 2\pi(z - g_n)]^{-1/2} + O(1) \tag{2.13}$$

$$K_n^{\pm} = (r_1 + r_2)\sqrt{\pi}\eta_n^{\pm}[iF(g_n) + Q(g_n)] \tag{2.14}$$

$$\eta_n^{\pm} = \lim_{z \to g_n} [\pm 2(z - g_n)]^{1/2} X(z)$$

где верхний знак относится к правой вершине $g_n = b_n$, а нижний – к левой вершине $g_n = a_n$. Действительное число $K_n^{\pm}$ в равенстве (2.13) есть коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в форме [4]. В частности, в случаях *А* и *Б* согласно (2.11) и (2.12)

$$K_n^{\pm} = (r_1 + r_2)(\pi \operatorname{tg} a)^{1/2}[iF(n\pi \pm a) + Q(n\pi \pm a)] \tag{2.15}$$

и

$$K_n^{\pm} = (r_1 + r_2)\Gamma(n + 1 \pm a)\left(\frac{\operatorname{tg} \pi a}{n!\,\Gamma(n + 1 \pm 2a)}\right)^{1/2}[iF(n \pm a) + Q(n \pm a)] \tag{2.16}$$

соответственно.

Так как числа $F(g_n)$, $Q(g_n)$ при $n \to \infty$ убывают как $O(n^{-\lambda})$, $\lambda > 1$, а числа $\eta_n^{\pm}$ ограничены одной и той же постоянной, то КИН $K_n^{\pm}$ при $n \to \infty$ также убывают, как $O(n^{-\lambda})$, $\lambda > 1$.

Итогом исследований данного разд. является следующая

Теорема 1. Разрешимость задачи упругости, поставленной в разд. 1, равносильна разрешимости системы (2.10) в классе вещественных последовательностей П. В случае разрешимости задачи (например, в случаях *А*–*Г*) ее решение единственно и определяется функциями $\Phi_{1,2}(z)$, которые находятся по формулам (2.1), (2.5)–(2.9), а КИН вблизи вершин $g_n = a_n$ и $g_n = b_n$ трещины L_n находятся по формулам (2.14)–(2.16)и при $n \to \infty$ убывают как $O(n^{-\lambda})$, $\lambda > 1$.

3. Расширение класса решений задачи. Пусть главный вектор P касательных усилий, действующих на берегах всех трещин, вообще говоря, отличен от нуля. Тогда согласно первому равенству (1.7) и равенству (2.2) при больших $z \notin U(L)$ функция $\Phi_2(z) = Az^{-1} + O(z^{-\lambda})$, а функция $\Psi_1(z) = O(z^{-\lambda})$, где $A = P/(2\pi(r_3 + r_4))$ и $\lambda > 1$. В соответствии со сказанным выше и результатами разд. 2 рассмотрим напряженно-деформированное состояние, определяемое по формулам (1.2) функциями $\Phi_{1,2}(z)$, которые при больших $z \notin U(L)$ имеют вид

$$\Phi_1(z) = \alpha - i\beta X(z) + m(1-\kappa_1\kappa_2)Az^{-1} + O(z^{-\lambda}) \tag{3.1}$$

$$\Phi_2(z) = B + Az^{-1} + O(z^{-\lambda}), \quad \lambda > 1$$

где α, β – действительные, B – комплексная постоянные. На основании формул (1.2) найдем

$$\alpha = \sigma_y^\infty / (r_1 + r_2), \quad \beta = \tau_{xy}^\infty / (r_1 + r_2) \tag{3.2}$$

$$B = [\tfrac{1}{4}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + 2i\mu_1(\kappa_1+1)^{-1}\omega^\infty - r_1(r_1+r_2)^{-1}(\sigma_y^\infty - i\tau_{xy}^\infty)] / r_3$$

где $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty, \omega^\infty$ – значения напряжений и вращения при $z = iy \to +i\infty$, которые должны быть заданы. Они задаются независимо от способа расположения трещин. В данном случае решение задачи упругости, если она разрешима, также единственно и определяется функциями

$$\Phi_1(z) = \alpha + X(z)[F(z) - iQ(z) - i\beta] + m(1-\kappa_1\kappa_2)F_0(z) \tag{3.3}$$

$$\Phi_2(z) = B + F_0(z), \quad F_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{f(t)dt}{t-z}$$

Функции X, F, Q находятся по формулам (2.6)–(2.10), где в системе (2.10) надо брать

$$H_n = \int_{L_n} X^+(t)(F(t) - i\beta)dt \tag{3.4}$$

При этом в формулах (2.14)–(2.16) для КИН надо в квадратных скобках добавить еще слагаемое β. Так как числа $\eta_n^\pm$ ограничены одной и той же постоянной, то КИН $K_n^\pm$ также ограничены одной и той же постоянной. Заметим, что они от значений σ_x^∞, $\sigma_y^\infty, \omega^\infty$ не зависят.

Итогом исследований данного разд. является следующая

Теорема 2. Напряженно-деформированное состояние плоскости с закрытыми трещинами L_n, $n \in I$, определяемое по формулам (1.2) функциями $\Phi_{1,2}(z)$, имеющими при больших $z \notin U(L)$ вид (3.1), существует тогда и только тогда, когда система (2.10) с правыми частями (3.4) в классе вещественных последовательностей П разрешима. В случае разрешимости задачи (например, в случаях *А*–*Г* из разд. 2) ее решение единственно и определяется функциями (3.3), а КИН находятся по формулам (2.14)–(2.16), где в квадратных скобках надо добавить еще слагаемое $\tau_{xy}^\infty / (r_1 + r_2)$, и они ограничены в совокупности.

В частности, если на ∞ при $y \to +\infty$ действуют напряжения $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$, вращение ω^∞ и $h^\pm(t) \equiv 0$, т.е. берега трещин проскальзывают без трения, то решение задачи в случае ее разрешимости определяется функциями

$$\Phi_1(z) = \alpha - i\beta X(z)\left[1 - \sum_{n\in I} A_n / (z - c_n)\right], \quad \Phi_2(z) = B$$

причем функция X и постоянные α, β, B находятся по формулам (2.6) и (3.2) соответственно, а A_n, $n \in I$ – решение системы (2.10) в частном случае, когда

$$H_n = i \int_{L_n} X^+(t)dt \tag{3.5}$$

В данном случае КИН вблизи вершин $g_n = a_n$ и $g_n = b_n$ таковы

$$K_n^{\pm} = \gamma(r_1 + r_2)^{-1} \tau_{xy}^{\infty} \left[1 - \sum_{k \in I} A_k (g_n - c_k)^{-1} \right]$$

где γ – коэффициент перед квадратной скобкой в формуле (2.14).

В случаях A и $Б$, описанных в разд. 2, КИН при $n \to \infty$ имеют асимптотическое представление

$$K_n^{\pm} = (\xi \operatorname{tg}(\pi a / \xi))^{1/2} \tau_{xy}^{\infty} + O(n^{-\lambda}), \quad \lambda > 1$$

где $\xi = \pi$ в случае A и $\xi = 1$ в случае $Б$.

4. Взаимодействие макротрещины с бесконечным рядом микротрещин. Пусть в плоскости z, кроме закрытых трещин $L_n = [a_n, b_n]$ (n = 0, 1,...), удовлетворяющих условиям (1.1), имеется еще одна закрытая полубесконечная трещина $L_{-1} = (-\infty, b]$, $b < a_0$, на берегах которой заданы касательные усилия $\tau_{xy}^{\pm}(t) = h^{\pm}(t)$, непрерывные по Гельдеру и убывающие при $t \to \infty$ как $O(t^{-\lambda})$, $\lambda > 1$. В данном случае при ограничениях, наложенных на искомое решение в разд. 1, справедливы все результаты разд. 1.2, кроме формул (2.6), (2.7), которые надо заменить на следующие:

$$X(z) = (z-b)^{-1/2} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{z - c_n}{[(z-a_n)(z-b_n)]^{1/2}} \tag{4.1}$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{b} \frac{p(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{t-z} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) \tag{4.2}$$

При этом во всех остальных формулах надо брать $L = L_{-1} \cup L_0 \cup L_1 \cup \dots$, а решение системы (2.10) надо искать в классе вещественных последовательностей A_n, $n \in I$, $I = \{0,1,\dots\}$ таких, что ряд (2.8) в любой замкнутой ограниченной области, не содержащей точек c_n, сходится равномерно и определяет функции $Q(z)$, $(z - \bar{z})Q'(z)$, которые при $z \to \infty$ вне $U(L)$ убывают как $O(z^{-\nu})$, $\nu > 1/2$.

Как и в разд. 3, расширим класс решений задачи, потребовав, чтобы функции $\Phi_{1,2}(z)$ при больших $z \notin U(L)$ имели вид (3.1). Тогда единственное решение задачи, если она разрешима, будет определяться по формулам (3.3), где надо брать $L = L_{-1} \cup \cup L_0 \cup L_1 \cup \dots$. При больших z, расположенных в верхней полуплоскости на луче $\arg z = \theta$ согласно (1.2), (3.1), (4.1) имеем

$$\tfrac{1}{4}(\sigma_x + \sigma_y) + 2i\mu_1(\kappa_1 + 1)^{-1}\omega = r_1\alpha + r_3 B - i\beta r_1 \rho^{-1/2} e^{-i\theta/2} + O(\rho^{-1})$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \alpha(r_1 + r_2) - i\beta\rho^{-1/2}(r_1 e^{-i\theta/2} + r_2 e^{i\theta/2}) + O(\rho^{-1}), \quad \rho = |z|$$

откуда следует, что напряжение τ_{xy} на ∞ исчезает, постоянные α, B находятся по формулам (3.2), где $\tau_{xy}^{\infty} = 0$, а для нахождения действительной постоянной β надо задать с точностью до $\rho^{-1/2}$ включительно поведение одного из напряжений τ_{xy}, σ_y, $\sigma_x + \sigma_y$ при $z \to \infty$ по какому-нибудь лучу.

Пусть, например, на мнимой оси $\arg z = \pi/2$ при больших $\rho = |z|$ напряжение τ_{xy} =

$= \tau^0_{xy}\rho^{-1/2} + O(\rho^{-1})$, где τ^0_{xy} – заданное действительное число. Тогда $\beta = \sqrt{2}\tau^0_{xy}/(r_1 + r_2)$.

В данном случае задача имеет ненулевое исчезающее на ∞ решение, даже если напряжения на берегах всех трещин равны нулю, т.е. является задачей класса N [1]. Это решение, зависящее от одного действительного параметра β, характеризующего интенсивность напряжений в окрестности ∞, определяется функциями

$$\Phi_1(z) = -i\beta X(z)[1 - Q(z)], \quad \Phi_2(z) = 0$$

где X и Q находятся по формулам (4.1) и (2.8), (2.10), в которых H_n надо брать в виде (3.5).

Замечание. 1°. Полученные выше результаты остаются в силе и в случае, когда множество I конечно, т.е. число трещин конечно. В этом случае произведения (2.6), (4.1), ряды (2.7), (2.8), (4.2) и система (2.10) будут конечными.

2°. Результаты не изменятся, если потребовать, чтобы неравенства (1.4) выполнялись при больших z не во всей внешности окрестности $U(L)$ линии L, а лишь на некоторой системе $C = \{C_j\}$, $j = 1, 2,...$ вложенных друг в друга гладких кривых таких, что расстояние от вершин трещин до точек системы C не меньше некоторой положительной постоянной и для всех j отношение длины кривой C_j к наименьшему расстоянию от ее точек до начала координат ограничено одной и той же постоянной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. *Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М., Рывкин М.Б.* Деформация составной упругой плоскости, ослабленной периодической системой произвольно нагруженных щелей // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1088–1094.
3. *Нахмейн Е.Л., Нуллер Б.М.* О квазипериодических краевых задачах и их приложениях в теории упругости // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 821–830.
4. *Черепанов Г.П.* Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с.
5. *Храпков А.А.* Приведение некоторых типовых воздействий на гидросооружения и их основания к поверхностным нагрузкам // Сборник докладов по гидротехнике. Л.: Госэнергоиздат, 1963. Вып. 5. С. 140–157.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
7. *Чибрикова Л.И.* Основные граничные задачи для аналитических функций. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. 302 с.
8. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
9. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.
10. *Сильвестров В.В.* Эффективное решение основных квазипериодических задач теории упругости для плоскости с разрезами по прямой // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 519–531.
11. *Сильвестров В.В.* Основные задачи теории упругости для плоскости с полубесконечной периодической системой разрезов // Исследования по краевым задачам и их приложениям. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1992. С. 20–37.
12. *Гохберг И.Ц., Фельдман И.А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971. 352 с.
13. *Гахов Ф.Д., Черский Ю.И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.

Чебоксары

Поступила в редакцию
18.II.1991