ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. ТОМ 57, ВЫП. 2, 1993

УДК 539.3

© 1993 г. М.И. Летавин, Н.И. Шестаков

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ В СЕЧЕНИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА МЕТОДОМ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассматривается плоское напряженное состояние в сечении вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра, находящегося под термическим воздействием за счет конвективного и лучистого теплообмена с внешней средой. Используются уравнения для напряжений в приближении несвязной теории термоупругости. Построены асимптотические формулы для напряжений относительно малого параметра $1/\sqrt{\mathrm{Pd}}$ (Pd – критерий Предводителева). Они позволяют учитывать переменный по периметру цилиндра характер коэффициентов теплообмена, выявляют качественный характер распределения напряжений в приграничной полосе и в остальной области и показывают, что напряженное состояние определяется неосесимметричной частью температурного поля.

Ранее [1][1] были построены формулы для расчета температуры в сечении вращающегося с постоянной угловой скоростью ω цилиндра радиуса R, взаимодействующего с внешней средой по закону лучистого и конвективного теплообмена. Ниже выводятся асимптотические формулы термических напряжений, возникающих в цилиндре, в рамках несвязной теории термоупругости [2].

В лабораторной полярной системе координат (ρ, φ) в квазистационарном режиме температура $T(\rho, \varphi)$ в точке сечения с физическими координатами $(R\rho, \varphi)$ удовлетворяет уравнению [1]

$$\partial T / \partial\varphi = \varepsilon^2 \Delta_{\rho,\varphi} T, \quad 0<\rho<1, \quad \varphi\in[0,2\pi] \tag{0.1}$$

$$\Delta_{\rho,\varphi} = \rho^{-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\rho^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

граничному условию

$$\frac{\partial}{\partial\rho}T + b(\varphi)T+\sigma(\varphi)\beta(T) = f(\varphi), \quad \rho=1, \quad \varphi\in[0,2\pi] \tag{0.2}$$

и условию непрерывности при $\rho\to 0$:

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\frac{\partial T}{\partial\rho}=0, \qquad \varphi\in[0,2\pi]$$

Здесь

$$\varepsilon^2 = (\mathrm{Pd})^{-1} = a/(\omega R^2), \qquad b(\varphi)=\alpha_k(\varphi)R/\lambda$$

$$\sigma(\varphi)=\sigma_r(\varphi)R/\lambda, \quad \beta(T)=T^4$$

---

[1] *Летавин М.И.* О сингулярной задаче управления температурой вращающегося цилиндра в квазистационарном режиме. Вологда, 1989. 38 с. – Деп. в ВИНИТИ 9.02.89, № 895–В89.

$$f(\varphi) = b(\varphi)T_k(\varphi) + \sigma(\varphi)\beta(T_r(\varphi)) \tag{0.3}$$

где a – коэффициент температуропроводности, Pd – критерий Предводителева, $b(\varphi)$ – критерий Био, λ – коэффициент теплопроводности, $\alpha_k(\varphi)$ – коэффициент теплопередачи, $T_k(\varphi)$ – температура среды, с которой происходит конвективный теплообмен, $\sigma_r(\varphi)$ – коэффициент лучистого теплообмена, $T_r(\varphi)$ – температура среды, с которой происходит лучистый теплообмен.

Напряжения в сечении цилиндра определяем в приближении плоского деформированного состояния [2] при помощи функции напряжений $F(\rho, \varphi)$ по формулам

$$\sigma_\rho = \rho^{-1}\frac{\partial}{\partial\rho}F + \rho^{-2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}F, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}F, \quad \sigma_{\rho\varphi} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^{-1}\frac{\partial}{\partial\varphi}F \tag{0.4}$$

а саму функцию F – как решение уравнения несвязной квазистационарной теории термоупругости

$$\Delta^2_{\rho,\varphi}F + C\Delta_{\rho,\varphi}T = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \tag{0.5}$$

с граничными условиями свободной поверхности

$$F = \partial F / \partial\rho = 0, \quad \rho = 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{0.6}$$

и условиями ограниченности производных в выражениях (0.4).

В уравнении (0.5) $C = \alpha_T(1-\nu)^{-1}E$, α_T – коэффициент линейного теплового расширения, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга.

Коэффициент ε в уравнении (0.1) является малым параметром в случае валков и роликов металлургических машин [3]. Это и будет использовано при построении решения системы (0.1), (0.2), (0.5), (0.6).

Все функции в дальнейшем считаем 2π-периодическими по аргументу φ.

1. Построение формального асимптотического разложения. Согласно общей теории [4], ищем разложение функции T в виде

$$T(\varepsilon,\rho,\varphi) = U(\varepsilon,\rho,\varphi) + V(\varepsilon,r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n u_n(\rho,\varphi) + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n \upsilon_n(r,\varphi), \quad r = \frac{1-\rho}{\varepsilon} \tag{1.1}$$

где U и V – регулярная и погранслойная части разложения, так что $|\upsilon_n(r,\varphi)| < C_1\exp(-C_2 r)$, $r > 0$, C_1, $C_2 > 0$.

Известно [1], что функции $u_n = \text{const}$, υ_n определяются из уравнений:

$$\langle b(\varphi)\rangle u_0 + \langle\sigma(\varphi)\rangle\beta(u_0) = \langle f(\varphi)\rangle \tag{1.2}$$

$$\langle b(\varphi) + \sigma(\varphi)\beta'(u_0)\rangle u_n = -\langle \upsilon_n(0,\varphi)(b(\varphi) + \sigma(\varphi)\beta'(u_0))\rangle + \langle P_n(\varphi)\rangle, \quad n = 1,2,\ldots \tag{1.3}$$

$$M\upsilon_n \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r^2}\right)\upsilon_n = -\sum_{k=1}^{n-1} r^{n-1-k}\frac{\partial}{\partial r}\upsilon_k +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-2}(n-2-k)r^{n-2-k}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\upsilon_k, \quad r > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial\upsilon_1}{\partial r} = b(\varphi)u_0 + \sigma(\varphi)\beta(u_0) - f(\varphi), \quad r = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial\upsilon_n}{\partial r} = (b(\varphi) + \sigma(\varphi)\beta'(u_0))(u_{n-1} + \upsilon_{n-1}) + P_{n-1}(\varphi), \quad r = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$P_n = \sum_{k=2}^{n} \beta^{(k)}(u_0) q_{n,k}, \quad \langle P_n(\varphi)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\varphi)d\varphi$$

где $q_{n,k}$ – многочлены по переменным $u_l + \upsilon_l(0,\varphi)(l = 1,\dots,n-1)$ степени k. В формуле (1.4) и везде в дальнейшем сумма по определению считается равной нулю, если нижний индекс суммирования больше верхнего.

При условиях

$$b(\varphi), \quad \sigma(\varphi) \geqslant 0, \quad \langle b(\varphi)\rangle + \langle \sigma(\varphi)\rangle > 0 \tag{1.6}$$

$$T_r(\varphi), \quad T_k(\varphi) > 0 \tag{1.7}$$

уравнение (1.2) имеет единственное положительное решение $u_0 > 0$, а тогда из условия (1.6) следует $\langle b(\varphi) + \sigma(\varphi)\beta(u_0)\rangle > 0$ и из уравнений (1.3) однозначно находятся $u_n (n = 1,2,\dots)$. Таким образом, члены асимптотического ряда (1.1) находятся последовательно: u_0 из (1.2), затем υ_1 из (1.4), (1.5); u_1 из (1.3), υ_2 из (1.4), (1.5) и т.д.

По аналогии с разложением (1.1) представим разложение функции $F(\rho, \varphi)$ в виде

$$F(\varepsilon,\rho,\varphi) = H(\varepsilon,\rho,\varphi) + G(\varepsilon,r,\varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n h_n(\rho,\varphi) + \sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon^n g_n(r,\varphi) \tag{1.8}$$

$$|g_n(r,\varphi)| < C_1 \exp(-C_2 r), \quad r > 0 \tag{1.9}$$

где H – регулярная, G – погранслойная части разложения.

Удовлетворяя уравнению (0.5) отдельно для регулярной части разложения H, получим уравнения для h_n

$$\Delta^2_{\rho,\varphi} h_n = 0, \quad 0 < \rho < 1, \quad \varphi \in [0,2\pi), \quad n = 2,3,\dots \tag{1.10}$$

Для погранслойной части разложения G перепишем уравнение (0.5) в виде $\Delta_{\rho,\varphi}(\Delta_{\rho,\varphi} G + CV) = 0$ и будем удовлетворять более простому уравнению $\Delta_{\rho,\varphi} G + CV = 0$, из которого получим уравнения для функций g_n:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} g_n = -C\upsilon_{n-2} - Q_n, \quad n = 3,4,\dots, \quad r > 0, \quad \varphi \in [0,2\pi) \tag{1.11}$$

$$Q_n = -\sum_{k=4}^{n} r^{n-k} \frac{\partial}{\partial r} g_{k-1} + \sum_{k=5}^{n} (n-k) r^{n-k} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} g_{k-2} \tag{1.12}$$

Решение уравнения (1.11), удовлетворяющее оценке вида (1.9), запишем в виде

$$g_n(r,\varphi) = -\int_r^{\infty} (\varsigma - r)[C\upsilon_{n-2}(\varsigma,\varphi) + Q_n(\varsigma,\varphi)]d\varsigma, \quad n = 3,4,\dots, r > 0, \quad \varphi \in [0,2\pi] \tag{1.13}$$

Подставляя разложение (1.8) в граничное условие (0.6), получим граничные условия для функций h_n:

$$h_2(1,\varphi) = 0, \quad h_n(1,\varphi) = -g_n(0,\varphi), \quad n = 3,4\dots, \quad \varphi \in [0,2\pi) \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} h_n(1,\varphi) = -\frac{\partial}{\partial r} g_{n+1}(0,\varphi), \quad n = 2,3,\dots, \quad \varphi \in [0,2\pi) \tag{1.15}$$

Последовательно находятся коэффициенты разложений (1.8): g_3 из (1.13), затем h_2 как ограниченное решение задачи (1.10), (1.14), (1.15); g_4 из (1.13), затем h_3 из (1.10), (1.14), (1.15) и т.д.

По способу определения частей разложения (1.8) G – термоупругая часть, а H – упругая часть ряда для функции напряжений [2].

2. Обоснование асимптотического разложения. В декартовых координатах $x = (x_1, x_2)$, $x_1 = \rho\cos\varphi$, $x_2 = \rho\sin\varphi$ обозначим $\Omega = \{(x_1, x_2)\colon x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, $\Gamma = \overline{\Omega}/\Omega$. Асимптотические приближения для функций T, F возьмем в виде

$$T_N(\varepsilon, x) = T_N(\varepsilon, \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = U_N(\varepsilon) + \Psi(\rho)V_N(\varepsilon, r, \varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n u_n + \Psi(\rho)\sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n \upsilon_n(r, \varphi) \tag{2.1}$$

$$F_N(\varepsilon, x) = F_N(\varepsilon, \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = H_N(\varepsilon, \rho, \varphi) + \Psi(\rho)G_N(\varepsilon, r, \varphi) =$$

$$= \sum_{n=2}^{N+1} \varepsilon^n h_n(\rho, \varphi) + \Psi(\rho)\sum_{n=3}^{N+2} \varepsilon^n g_n(r, \varphi), \quad N = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

где $\Psi(\rho) \in C^\infty([0,1])$, $\Psi(\rho) = 0$ при $\rho \in [0, 1/3]$, $\Psi(\rho) = 1$ при $\rho \in [2/3, 1]$, $0 \leqslant \Psi(\rho) \leqslant 1$. Для невязок точных решений $T(\varepsilon, x)$, $F(\varepsilon, x)$ и их приближений (2.1), (2.2)

$$\delta T_N(\varepsilon, x) = T(\varepsilon, x) - T_N(\varepsilon, x), \quad \delta F_N(\varepsilon, x) = F(\varepsilon, x) - F_N(\varepsilon, x) \tag{2.3}$$

имеем уравнения

$$-\varepsilon^2 \Delta_x(\delta T_N) + b_i(\delta T_N)_{x_i} = -W_1, \quad x \in \Omega \tag{2.4}$$

$$b_1(x) = -x_2, \quad b_2(x) = x_1, \quad \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

$$\Delta_x^2(\delta F_N) + C\Delta_x(\delta T_N) = -W_2, \quad x \in \Omega \tag{2.5}$$

и граничные условия

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + \alpha(x) + \sigma(x)\beta'(u_0)\right)\delta T_N = -W_3, \quad x \in \Gamma \tag{2.6}$$

$$\delta F_N = -\varepsilon^{N+2} g_{N+2}, \quad \frac{\partial}{\partial \nu}(\delta F_N) = 0, \quad x \in \Gamma \tag{2.7}$$

Здесь

$$W_1(\varepsilon, x) = (\partial/\partial\varphi - \varepsilon^2 \Delta_{\rho,\varphi})(\psi(\rho)V_N(\varepsilon, r, \varphi))$$

$$W_2(\varepsilon, x) = \Delta_x^2(\psi(\rho)G_N(\varepsilon, r, \varphi)) + C\Delta_x(\psi(\rho)V_N(\varepsilon, r, \varphi))$$

$$W_3(\varepsilon, x) = W_3(\varepsilon, \cos\varphi, \sin\varphi) = \frac{\partial}{\partial \rho} T_N(\varepsilon, 1, \varphi) +$$

$$+\alpha(\varphi)T_N(\varepsilon, 1, \varphi) + \sigma(\varphi)\beta(u_0) - f(\varphi) + \sigma(\varphi)\{\beta(T_N(\varepsilon, 1, \varphi) +$$

$$+\omega^*) - \beta'(u_0)\omega^* - \beta(u_0)\}, \quad \omega^* = \delta T_N$$

$\nu = \nu(x)$ – единичный вектор внешней нормали к Γ в точке x.

Введем вспомогательную функцию.

$$\overset{*}{g}_{N+2}(x) = \overset{*}{g}_{N+2}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = g_{N+2}(0, \varphi,)\Psi(\rho), \quad x \in \Omega \tag{2.8}$$

и положим

$$y(x) = \delta F_N + \varepsilon^{N-2} \overset{*}{g}_{N+2} \tag{2.9}$$

Тогда для $y(x)$ из (2.5) получим уравнение

$$\Delta_x^2 y = -C\Delta_x(\delta T_N) - W_2 + \varepsilon^{N+2}\Delta_x^2 g_{N+2}^*, \quad x \in \Omega \tag{2.10}$$

и нулевые граничные условия

$$y = 0, \quad \partial y / \partial \nu = 0, \quad x \in \Gamma \tag{2.11}$$

Выведем оценку для $\|y\|_{W_2^2(\Omega)}$. Домножая уравнение (2.10) на y, интегрируя по частям по Ω при условии (2.11) и используя вид функции W_2, запишем

$$\int_\Omega (\Delta_x y)^2 dx = \varepsilon^{N+2}\int_\Omega (\Delta_x y)(\Delta_x g_{N+2}^*)dx - C\int_\Omega (\Delta_x y)\delta T_N dx -$$
$$-\int_\Omega (\Delta_x y)(\Delta_x(\Psi G_N) + C\Psi V_N)dx \tag{2.12}$$

Из (2.12) при помощи неравенства Коши и неравенства [5]

$$\|y\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant A_1\left(\int_\Omega (\Delta_x y)^2 dx\right)^{1/2}$$

справедливого в силу условий (2.11), получим оценку

$$\|y\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant A_1(\varepsilon^{N+2}\|\Delta_x g_{N+2}^*\|_{L^2(\Omega)} + C\|\delta T_N\|_{L^2(\Omega)} +$$
$$+\|\Delta_x(\Psi G_N) + C\Psi V_N\|_{L^2(\Omega)}) = A_1(\varepsilon^{N+2}I_1 + CI_2 + I_3) \tag{2.13}$$

Приведем оценки I_1, I_2, I_3 в (2.13). Для оценки I_3, используя определения G_N, V_N в (2.1) (2.2), запишем

$$\Delta_x(\psi G_N) + C\Psi V_N = \Psi'(\rho)(\rho^{-1}G_N(\varepsilon,r,\varphi) + 2\frac{\partial}{\partial\rho}G_N(\varepsilon,r,\varphi) +$$
$$+\Psi''(\rho)G_N(\varepsilon,r,\varphi) + \varepsilon^{N+1}\Psi(\rho)\left[-\rho^{-1}\sum_{n=2}^{N+1} r^{N-n+1}\frac{\partial}{\partial r}g_{n+1} +\right.$$
$$\left.+\rho^{-2}\sum_{n=3}^{N+3} r^{N-n+1}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}g_n\right)(1+(N-n+1)\rho)\right] \tag{2.14}$$

Из (2.14), учитывая свойства функции $\Psi(\rho)$, найдем

$$I_3 \leqslant \varepsilon^{N+1}A_2\sum_{n=1}^{N+1}\left\|\Psi(\rho)r^{N-n}\left(r\frac{\partial}{\partial r}g_{n+1} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}g_{n+1}\right)\right\|_{L^2(\Omega)} +$$
$$+A_3\sum_{n=3}^{N+2}\left\{\|\Psi'(\rho)g_n(r,\varphi)\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\Psi'(\rho)\frac{\partial}{\partial r}g_n(r,\varphi)\right\|_{L^2(\Omega)} + \|\Psi''(\rho)g_n(r,\varphi)\|_{L^2(\Omega)}\right\} \tag{2.15}$$

Предполагая выполненными для функций g_n оценки

$$\int_0^{2\pi} g_n^2(r,\varphi) + \left(\frac{\partial}{\partial r}g_n(r,\varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}g_n(r,\varphi)\right)^2 d\varphi \leqslant A_4\exp(-A_5 r) \tag{2.16}$$

($r \geqslant 0,\ n = 3,\dots,N+2$), из (2.15) будем иметь

$$I_3 \leqslant \varepsilon^{N+1} A_6 + A_7 \exp\left(-A_5 (3\varepsilon)^{-1}\right) \leqslant \varepsilon^{N+1} A_8 \tag{2.17}$$

где A_6, A_7, A_8 зависят только от A_4, A_5, N.

Для оценки слагаемого I_1 заметим, что согласно (2.8)

$$\Delta_x g^*_{N+2} = \Delta_{\rho,\varphi}\left(g_{N+2}(0,\varphi)\Psi(\rho)\right) = g_{N+2}(0,\varphi)\rho^{-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\Psi(\rho)\right) +$$

$$+\rho^{-2}\Psi(\rho)\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} g_{N+2}(0,\varphi) \tag{2.18}$$

Поэтому

$$I_1 \leqslant A_9 \tag{2.19}$$

где A_9 зависит только от A_4 из (2.16).

Для оценки слагаемого I_2 и обоснования неравенств (2.16) приведем результат, вытекающий из разд. 5 работы, цитированный в первой сноске.

Лемма 1. Пусть функции $b(\varphi)$, $\sigma(\varphi)$, $T_k(\varphi)$, $T_r(\varphi)$ в формулах (0.2), (0.3) 2π-периодические, абсолютно непрерывные, их производных имеют ограниченную вариацию на $[0, 2\pi)$, и выполнены условия (1.6), (1.7). Тогда для любого целого $N_1 \geqslant 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$, такое, что при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ ($N = 0,1,\dots,N_1$) для невязки δT_N, определенной в (2.3) и удовлетворяющей уравнениям (2.4), (2.6) справедлива оценка

$$\|\delta T_N\|_{L^2(\Omega)} \leqslant A_{10}\varepsilon^{N+1} \tag{2.20}$$

а для функций $\upsilon_n(r,\varphi)(n = 1,2,\dots,N_1)$, определяемых уравнениями (1.4), (1.5), выполнены неравенства

$$\int_0^{2\pi} \upsilon_n^2(r,\varphi) + \left(\frac{\partial}{\partial r}\upsilon_n(r,\varphi)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} g_n(r,\varphi)\right)^2 d\varphi \leqslant A_{11}\exp(-A_{12}r),\quad r \geqslant 0 \tag{2.21}$$

Из оценки (2.21) леммы 1 и формул (1.12), (1.13), определяющих функции $g_n(r,\varphi)$, следуют оценки (2.16). Неравенства (2.17), (2.19), (2.20) примененные к (2.13), дают

$$\|y\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon^{N+1} A_{13},\quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0] \tag{2.22}$$

Используя равенство (2.9) и неравенство (2.22), получим

$$\|\delta F_N\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \|y\|_{W_2^2(\Omega)} + \varepsilon^{N+2}\|g^*_{N+2}\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant A_{13}\varepsilon^{N+1} + A_{14}\varepsilon^{N+2} \leqslant A_{15}\varepsilon^{N+1},\quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0] \tag{2.23}$$

где при оценке $\|g^*_{N+2}\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant A_{14}$ использовалось представление вида (2.18) для производных функции g^*_{N+2}.

Таким образом, можно сформулировать теорему об оценке.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для любого целого $N_1 \geqslant 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для функции напряжений $F(\varepsilon, x)$ справедливо асимптотическое представление (2.3), где $\delta F_N(\varepsilon, x)$ удовлетворяет неравенству (2.23) с постоянной A_{15}, не зависящей от $N = 0, 1,..., N_1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

3. Асимптотические формулы для напряжений. Используя формулы (0.4), выпишем главные члены асимптотических разложений для напряжений

$$\sigma_\rho(\rho,\varphi) = \varepsilon^2\left[\rho^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial\rho} + \rho^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)h_2(\rho,\varphi) - \frac{\partial}{\partial r}g_3(r,\varphi)\right] \tag{3.1}$$

$$\sigma_\varphi(\rho,\varphi) = \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial r^2}g_3(r,\varphi) + \varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}h_2(\rho,\varphi)\cdot \tag{3.2}$$

$$\sigma_{\rho\varphi}(\rho,\varphi) = \varepsilon^2\left[-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{-1}\frac{\partial}{\partial\varphi}h_2(\rho,\varphi)\right) + \frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}g_3(r,\varphi)\right] \tag{3.3}$$

где $r = (1-\rho)/\varepsilon$, формулы (3.1), (3.3) имеют точность $O(\varepsilon^3)$, а формулы (3.2) $O(\varepsilon^2)$ в приграничной полосе шириной порядка и $O(\varepsilon^3)$ в остальной части области Ω. Решение уравнений (1.4), (1.5) для функций υ_1 можно представить в виде [6]

$$\upsilon_1(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\upsilon_k^+(r)\cos k\varphi + \upsilon_k^-(r)\sin k\varphi$$

$$\upsilon_k^\pm(r) = \exp\left(-\sqrt{k/2}r\right)\left\{\pm\left(\varsigma_k^s \mp \varsigma_k^c\right)\cos\left(\sqrt{k/2}r\right) + \left(\varsigma_k^s \pm \varsigma_k^c\right)\sin\left(\sqrt{k/2}r\right)\right\}/\sqrt{2k}$$

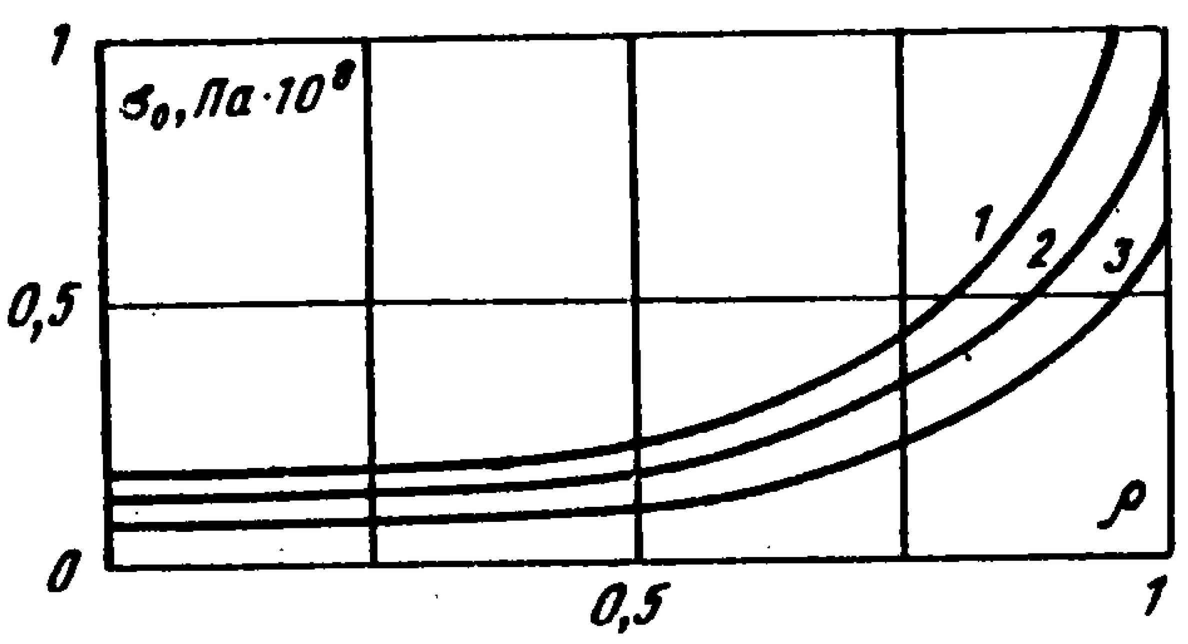
где $\varsigma_k^c, \varsigma_k^s$ – коэффициенты Фурье функции $\zeta(\varphi) = b(\varphi)u_0 + \sigma(\varphi)\beta(u_0) - f(\varphi)$. Выражая функцию g_3 по формуле (1.13) и определяя функцию h_2 из уравнений (1.10), (1.14), (1.15), представим напряжения (3.1)–(3.3) в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho(\rho,\varphi) = \varepsilon^2 C\Big\{&\rho\varsigma_1^c(\cos\varphi - \sin\varphi) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}k^{-1}\varsigma_k^c\rho^{k-2}\times \\ &\times\left(k(k-1)\left(1-\rho^2\right) + 2\rho^2\right)(\cos k\varphi - \sin k\varphi) - \\ &-\sum_{k=1}^{\infty}g_k^+(r)\cos k\varphi + g_k^-(r)\sin k\varphi\Big\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

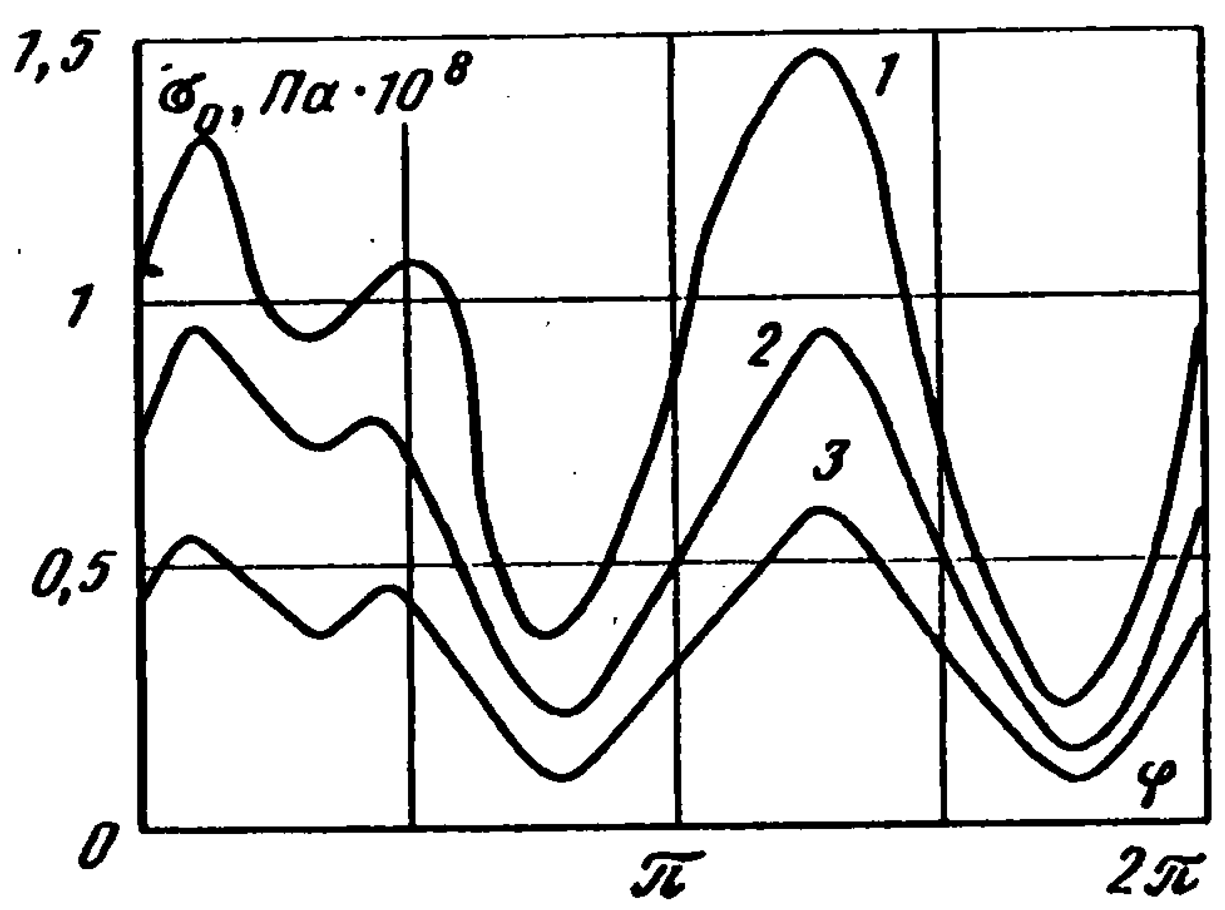
$$\begin{aligned}\sigma_\varphi(\rho,\varphi) = &-\varepsilon C\upsilon_1(r,\varphi) + \varepsilon^2 2^{-1}C\Big\{6\rho\varsigma_1^c(\cos\varphi - \sin\varphi) + \\ &+\sum_{k=2}^{\infty}\varsigma_k^c k^{-1}\rho^{k-2}((k+2)(k+1)\rho^2 - k(k-1))(\cos k\varphi - \sin k\varphi)\Big\}\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\varphi}(\rho,\varphi) = \varepsilon^2 C\Big\{&\rho\varsigma_1^c(\cos\varphi + \sin\varphi) + 2^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}\varsigma_k^c\rho^{k-2}((k+1)\rho^2 - k + 1)\times \\ &\times(\cos k\varphi + \sin k\varphi) + \sum_{k=1}^{\infty}k(g_k^-(r)\cos k\varphi - g_k^+(r)\sin k\varphi)\Big\}\end{aligned}$$

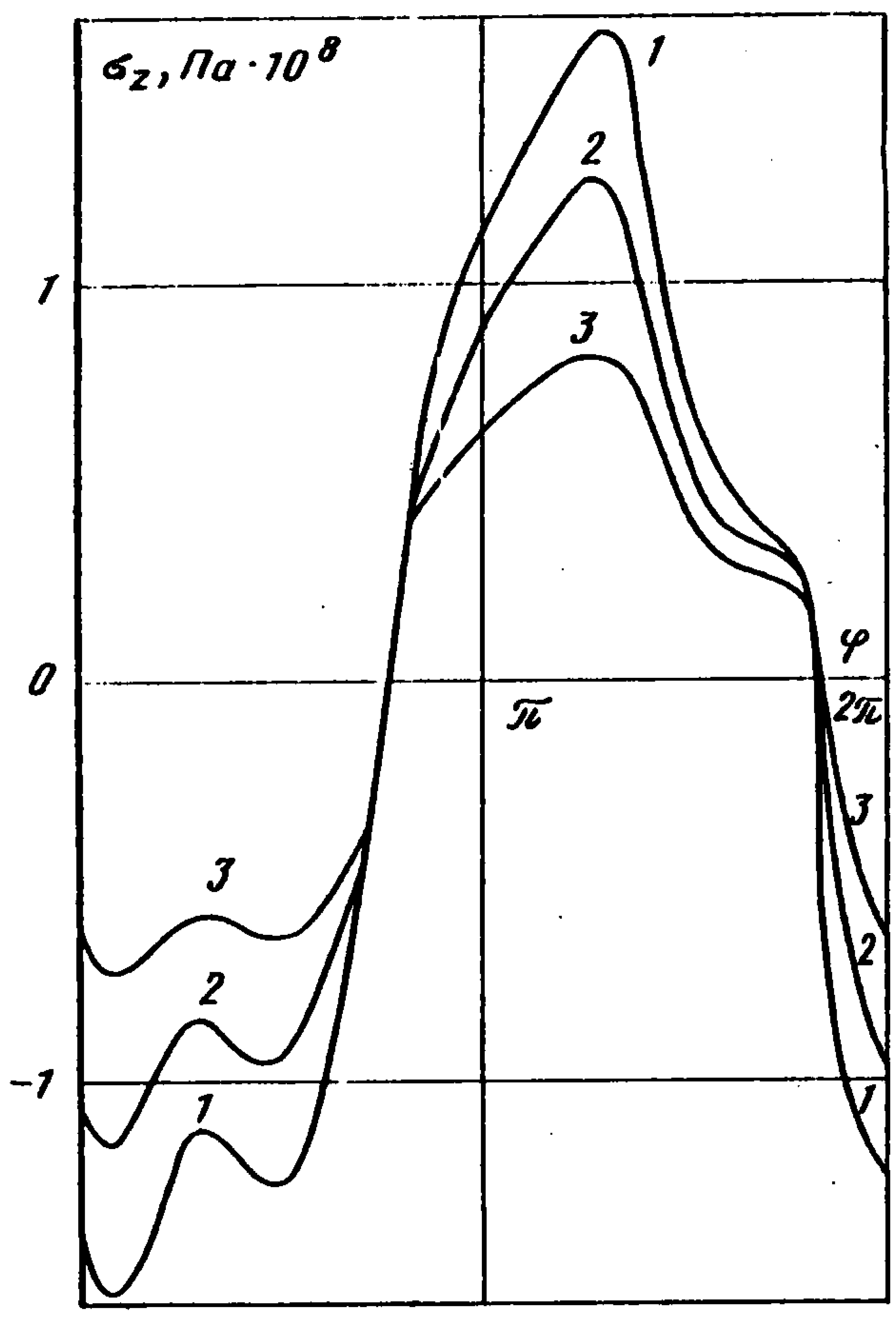
$$g_k^\pm(r) = k^{-1}\exp(-\sqrt{k/2}r)\left\{\pm\varsigma_k^c\cos\left(\sqrt{k/2}r\right) + \varsigma_k^s\sin\left(\sqrt{k/2}r\right)\right\} \tag{3.6}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Согласно принципу Сен-Венана, при условии свободной от нагрузок торцевой поверхности цилиндра [2] получим следующее выражение для осевых напряжений $\sigma_z(\rho,\varphi)$ в сечении цилиндра с точностью до ε^2:

$$\sigma_z = -\varepsilon C \upsilon_1(r,\varphi) \qquad (3.7)$$

4. Расчет термических напряжений в ролике непрерывного литья заготовок. Соприкасаясь с раскаленным металлом и получая от него мощный тепловой поток как вследствие непосредственного контакта, так и в результате излучения, ролики машины непрерывного литься заготовок испытывают значительные термические напряжения.

Применим полученные расчетные зависимости для вычисления термоупругих напряжений в сплошном ролике диаметром 0,38 м применительно к машине, работающей в конверторном цехе Череповецкого металлургического комбината, где и выполнены необходимые натурные замеры.

На фиг. 1 показано распределение эквивалентных напряжений, найденных в соответствии с третьей гипотезой прочности [7] в поперечном сечении, проходящем через середину зоны контакта ролика со слитком ($\varphi = 0$), а на фиг. 2 – изменение эквивалентных напряжений по периметру ролика в его поверхностных слоях. Как следует из графиков, значительной величины эквивалентные напряжения достигают лишь в поверхностных слоях толщиной 0,1–0,15 радиуса сплошного ролика, во внутренних же слоях эти напряжения невелики. На поверхности ролика локального максимума напряжения достигают как в области самых высоких, так и в зоне наинизших температур. Однако нигде эти напряжения не приближаются к предельно допустимым значениям.

Наибольшими по абсолютной величине и диапазону изменений являются осевые напряжения, распределение которых показано на фиг. 3. В конце зоны контакта ролика со слитком осевые напряжения на поверхности ролика достигают $1.4 \cdot 10^8$ Па. Независимо от частоты вращения ролика смена знака осевых напряжений происходит в зонах, соответствующих угловым координатам 140° и 330°.

Величина осевых напряжений и диапазон их изменений в значительной мере зависят от частоты вращения ролика, так увеличение скорости разливки в 6 раз ведет к уменьшению максимальных осевых напряжений в 2 раза.

В пределах рассмотренных технологических режимов термоупругие напряжения не достигают предельно допустимых значений, следовательно, неравномерность температурного поля не может быть причиной разрушения роликов.

Разделы 1–3 написаны М.И. Летавиным, 4 – Н.И. Шестаковым, введение написано совместно.

Авторы благодарят рецензента за обсуждение статьи, способствовавшее улучшению ее содержания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Летавин М.И.* О пограничном слое в задаче нагрева вращающегося цилиндра // Дифференц. ур-ния с частными производными: Межвуз. сб. науч. трудов. Л.: ЛГПИ, 1989. с. 58–66.
2. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970. 307 с.
3. *Тылкин М.А., Яловой Н.Н., Полухин П.И.* Температура и напряжения в деталях металлургического оборудования. М.: Высшая школа, 1970. 428 с.
4. *Бутузов В.Ф.* Сингулярные возмущения. Математика, Кибернетика. 1988/1 М.: Знание, 1988. 48 с.
5. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
6. *Запенкова Г.И., Летавин М.И., Шестаков Н.И.* Температурное поле вращающегося цилиндра // Инженерно-физический журн. 1990. т. 59. № 1. с. 169–170.
7. *Бригер И.А., Шор Б.Ф., Иосилевич Г.Б.* Расчет на прочность деталей машин: Справочник. М.: Машиностроение, 1979. 702 с.

Череповец

Поступила в редакцию
5.VIII.1991