УДК 539.3+624.074

© 1993 г. В.Д. Потапов

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО НЕСТАБИЛЬНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ СТОХАСТИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

В развитие результатов предыдущих исследований [1–4] по устойчивости вязкоупругих стержней, обладающих стабильными свойствами, при действии случайных продольных сил анализируется влияние нестабильности свойств материала, меняющихся детерминированным или случайным образом во времени. Основное внимание сосредоточено на учете влияния старения материала и случайного разброса характеристик вязкоупругости и внешнего демпфирования.

1. Устойчивость стержня из стареющего материала при действии случайной стационарной продольной силы. Движение стержня, находящегося под действием продольной силы F, описывается уравнением

$$E(t)Iw^{\mathrm{IV}}+[1+E(t)\mathbf{K}]P=0 \tag{1.1}$$

$$P=Fw''+m\ddot{w}+k\dot{w}$$

$$\mathbf{K}P=\int\limits_{t_0}^{t}K(t,\tau)P(\tau)d\tau,\quad K(t,\tau)=-\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right]$$

где k – коэффициент демпфирования, учитывающий внешнее сопротивление движению стержня, $C(t,\tau)$ – мера ползучести материала. Остальные обозначения общепринятые.

В дальнейшем будем считать [5], что

$$C(t,\tau)=\varphi(\tau)[1-e^{-\gamma(t-\tau)}] \tag{1.2}$$

Решение уравнения (1.1) должно, естественно, удовлетворять начальным и граничным условиям.

Введем функции

$$z_1=\mathbf{K}P$$

$$z_2=\int\limits_{t_0}^{t}\left[\gamma\varphi(\tau)+\frac{\partial\varphi(\tau)}{\partial\tau}\right]e^{-\gamma(t-\tau)}P(\tau)\,d\tau$$

которые являются решением уравнений

$$\dot{z}_1=\left[\frac{\dot{E}(t)}{E^2(t)}+\gamma\varphi(t)\right]P-\gamma z_2$$

$$\dot{z}_2=[\dot{\varphi}(t)+\gamma\varphi(t)]P-\gamma z_2 \tag{1.3}$$

Предположим, что прогиб стержня и скорость его изменения в начальный момент времени определяются выражениями

$$w(0,x)=w^0\sin\frac{\pi}{l}x,\quad \dot w(0,x)=\upsilon^0\sin\frac{\pi}{l}x$$

Будем искать решение уравнений (1.1), (1.3) в виде

$$w(t,x)=f(t)\sin\frac{\pi}{l}x$$

$$z_1(t,x)=f_3(t)\sin\frac{\pi}{l}x$$

$$z_2(t,x)=f_4(t)\sin\frac{\pi}{l}x$$

После подстановки этих выражений в уравнения (1.1), (1.3) получим

$$\begin{aligned}
&\ddot f+2\varepsilon\dot f+\omega^2\left[\frac{E(t)}{E_0}-\alpha(t)\right]f+\frac{E(t)}{m}f_3=0\\
&\dot f_3=m\left[\frac{\dot E(t)}{E^2(t)}+\gamma\varphi(t)\right][\ddot f+2\varepsilon\dot f-\omega^2\alpha(t)f]-\gamma f_4\\
&\dot f_4=m[\dot\varphi(t)+\gamma\varphi(t)][\ddot f+2\varepsilon\dot f-\omega^2\alpha(t)f]-\gamma f_4
\end{aligned}\qquad(1.4)$$

Здесь

$$2\varepsilon=\frac{k}{m},\quad \omega^2=\frac{\pi^4E_0I}{ml^4},\quad \alpha(t)=\frac{F(t)l^2}{\pi^2E_0I}$$

E_0 – некоторое (постоянное) значение модуля упругости (например, $E_0=\lim\limits_{t\to\infty}E(t)$, если такой предел существует).

Представим систему уравнений (1.4) в виде системы уравнений первого порядка ($f_1=f$):

$$\begin{aligned}
&\dot f_1=f_2\\
&\dot f_2=-2\varepsilon f_2-\omega^2\left[\frac{E(t)}{E_0}-\alpha(t)\right]f_1-\frac{E(t)}{m}f_3\\
&\dot f_3=-\left[\frac{\dot E(t)}{E^2(t)}+\gamma\varphi(t)\right]\left[m\omega^2\frac{E(t)}{E_0}f_1+E(t)f_3\right]-\gamma f_4\\
&\dot f_4=-[\dot\varphi(t)+\gamma\varphi(t)]\left[m\omega^2\frac{E(t)}{E_0}f_1+E(t)f_3\right]-\gamma f_4
\end{aligned}$$

В частном случае, при $E(t)=E_0$, $\varphi(t)=K/E_0=\text{const}$, как видно из (1.2), $z_3=z_4$. Тогда из уравнений (1.4) следует

$$\begin{aligned}
&\dot f_1=f_2\\
&\dot f_2=-2\varepsilon f_2-\omega^2[1-\alpha(t)]f_1-\frac{E_0}{m}f_3\\
&\dot f_3=-\gamma\left[\frac{\pi^4I}{l^4}\cdot Kf_1+(1+K)f_3\right]
\end{aligned}$$

Далее предположим, что продольная сила является случайным стационарным процессом $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t)$ с математическим ожиданием $\langle\alpha(t)\rangle = \alpha_0 = \text{const}$ и случайной пульсацией $\alpha_1(t)$, пропорциональной "белому шуму" $\xi(t)$, т.е. $\alpha_1(t) = \beta\xi(t)$, $\beta = \text{const}$. Запишем уравнения относительно статистических моментов функций f_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Математическое ожидание этих функций находится из уравнений (угловыми скобками обозначена операция усреднения по множеству реализаций) [6, 7]:

$$\langle\dot{f}_1\rangle=\langle f_2\rangle$$

$$\langle\dot{f}_2\rangle=-2\varepsilon\langle f_2\rangle-\omega^2\left[\frac{E(t)}{E_0}-\alpha_0\right]\langle f_1\rangle-\frac{E(t)}{m}\langle f_3\rangle$$

$$\langle\dot{f}_3\rangle=-\left[\frac{\dot{E}(t)}{E^2(t)}+\gamma\varphi(t)\right]\left[m\omega^2\frac{E(t)}{E_0}\langle f_1\rangle+E(t)\langle f_3\rangle\right]-\gamma\langle f_4\rangle$$

$$\langle\dot{f}_4\rangle=-[\dot{\varphi}(t)+\gamma\varphi(t)]\left[m\omega^2\frac{E(t)}{E_0}\langle f_1\rangle+E(t)\langle f_3\rangle\right]-\gamma\langle f_4\rangle$$

Если функции $E(t)$, $\varphi(t)$ стремятся с увеличением времени к постоянным значениям E_0 и φ_0, то можно утверждать, что стержень будет устойчив по отношению к математическому ожиданию прогиба, если соблюдается условие

$$\alpha_0<(1+E_0\varphi_0)^{-1}$$

Заметим, что это соотношение совпадает с условием устойчивости вязкоупругого стержня из стареющего материала при детерминированной постановке задачи.

Уравнения относительно моментов второго порядка записываются следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\langle f_1^2\rangle=2\langle f_1f_2\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle f_1f_2\rangle=\langle f_2^2\rangle-2\varepsilon\langle f_1f_2\rangle-\omega^2\left[\frac{E(t)}{E_0}-\alpha_0\right]\langle f_1^2\rangle-\frac{E(t)}{m}\langle f_1f_3\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle f_1f_3\rangle=-\left[\frac{\dot{E}(t)}{E^2(t)}+\gamma\varphi(t)\right]\left[m\omega^2\frac{E(t)}{E_0}\langle f_1^2\rangle+\right.$$

$$\left.+E(t)\langle f_1f_3\rangle\right]-\gamma\langle f_1f_4\rangle+\langle f_2f_3\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle f_1f_4\rangle=-[\dot{\varphi}(t)+\gamma\varphi(t)]\left[m\omega^2\frac{E(t)}{E_0}\langle f_1^2\rangle+\right.$$

$$\left.+E(t)\langle f_1f_3\rangle\right]-\gamma\langle f_1f_4\rangle+\langle f_2f_4\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle f_2^2\rangle=2\left\{-2\varepsilon\langle f_2^2\rangle-\omega^2\left[\frac{E(t)}{E_0}-\alpha_0\right]\langle f_1f_2\rangle-\right.$$

$$\left.-\frac{E(t)}{m}\langle f_2f_3\rangle\right\}+\omega^4\beta^2\langle f_1^2\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle f_2f_3\rangle=-2\varepsilon\langle f_2f_3\rangle-\omega^2\left[\frac{E(t)}{E_0}-\alpha_0\right]\langle f_1f_3\rangle-$$

$$-\frac{E(t)}{m}\left\langle f_3^2\right\rangle-\left[\frac{\dot{E}(t)}{E^2(t)}+\gamma\varphi(t)\right]\left[m\omega^2\frac{E(t)}{E_0}\left\langle f_1 f_2\right\rangle+\right.$$

$$\left.+E(t)\left\langle f_2 f_3\right\rangle\right]-\gamma\left\langle f_2 f_4\right\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\left\langle f_2 f_4\right\rangle=-2\varepsilon\left\langle f_2 f_4\right\rangle-\omega^2\left[\frac{E(t)}{E_0}-\alpha_0\right]\left\langle f_1 f_4\right\rangle-$$

$$-\frac{E(t)}{m}\left\langle f_1 f_3\right\rangle-[\dot{\varphi}(t)+\gamma\varphi(t)]\left[m\omega^2\frac{E(t)}{E_0}\left\langle f_1 f_2\right\rangle+E(t)\left\langle f_2 f_3\right\rangle\right]-\gamma\left\langle f_2 f_4\right\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\left\langle f_3^2\right\rangle=-2\left[\frac{\dot{E}(t)}{E^2(t)}+\gamma\varphi(t)\right]\left[m\omega^2\frac{E(t)}{E_0}\left\langle f_1 f_3\right\rangle+E(t)\left\langle f_3^2\right\rangle\right]-2\gamma\left\langle f_3 f_4\right\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\left\langle f_3 f_4\right\rangle=-\left[\frac{\dot{E}(t)}{E^2(t)}+\gamma\varphi(t)\right]\left[m\omega^2\frac{E(t)}{E_0}\left\langle f_1 f_4\right\rangle+\right.$$

$$\left.+E(t)\left\langle f_3 f_4\right\rangle\right]-\gamma\left\langle f_4^2\right\rangle-[\dot{\varphi}(t)+\gamma\varphi(t)]\times$$

$$\times\left[m\omega^2\frac{E(t)}{E_0}\left\langle f_1 f_3\right\rangle+E(t)\left\langle f_3^2\right\rangle\right]-\gamma\left\langle f_3 f_4\right\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\left\langle f_4^2\right\rangle=-2[\dot{\varphi}(t)+\gamma\varphi(t)]\left[m\omega^2\frac{E(t)}{E_0}\left\langle f_1 f_4\right\rangle+E(t)\left\langle f_3 f_4\right\rangle\right]-2\gamma\left\langle f_4^2\right\rangle$$

Если функции $E(t)$, $\varphi(t)$ при $t\to\infty$ стремятся к постоянным величинам, то условие устойчивости движения стержня в среднеквадратичном будет совпадать с условием устойчивости решения предельной системы уравнений (1.5), которая получается из (1.5) при $t\to\infty$ [4, 8].

Заметим, что характер устойчивости движения стержня из стареющего материала как по отношению к математическому ожиданию, так и в среднеквадратичном отличается от характера устойчивости стержня из нестареющего материала. Во втором случае устойчивость является асимптотической, что не имеет места в первом случае.

Выше был рассмотрен стержень, для которого мера ползучести материала определялась выражением (1.2). Более общим является выражение вида [5]

$$C(t,\tau)=\varphi(\tau)\sum_{k=0}^{\infty}B_k\exp[-\gamma_k(t-\tau)],\ B_k,\gamma_k-\text{const}$$

Можно показать, что и в этом случае путем расширения фазового пространства решение поставленной задачи может быть сведено к рассмотрению системы дифференциальных уравнений 1-го порядка, но более высокого порядка [4].

2. Устойчивость вязкоупругого стержня, характеристики вязкоупругости которого являются случайными функциями. Запишем уравнение движения стержня

$$EI(1-\mathbf{R})w^{\mathrm{IV}}+Fw''+m\ddot{w}+k\dot{w}=0 \tag{2.1}$$

$$\mathbf{R}w=\int_0^t R(t,\tau)\,w(\tau,x)\,d\tau$$

где $R(t,\tau)$ – ядро релаксации материала, которое примем в виде

$$R(t,\tau)=M(\tau)\exp\left[-\int_\tau^t \kappa(y)\,dy\right]$$

Вновь разыскивая решение уравнения (2.1) в виде одной полуволны синусоиды, запишем уравнение относительно ее амплитуды f

$$\ddot{f} + 2\varepsilon\dot{f} + \omega^2[(1-\mathrm{R})-\alpha]\,f = 0 \tag{2.2}$$

Обозначим

$$f_3 = \int\limits_0^t M(\tau)\exp\left[-\int\limits_\tau^t \kappa(y)\,dy\right] f(\tau)\,d\tau \tag{2.3}$$

Тогда уравнения (2.2), (2.3) можно представить в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{f}_1 = f_2,\quad \dot{f}_2 = -2\varepsilon f_2 - \omega^2[(1-\alpha)\,f_1 - \alpha f_3],\quad \dot{f}_3 = Mf_1 - \kappa f_3 \tag{2.4}$$

В дальнейшем будем считать, что $\alpha, \varepsilon, M, \kappa$ – стационарные процессы, математическое ожидание которых постоянно, а случайные пульсации пропорциональны белым шумам

$$\alpha = \alpha_0 + \beta\xi_1,\quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\xi_2$$

$$M = M_0 + M_1\xi_3,\quad \kappa = \kappa_0 + \kappa_1\xi_4$$

$$\alpha_0 = \langle\alpha\rangle,\quad \varepsilon_0 = \langle\varepsilon\rangle,\quad M_0 = \langle M\rangle,\quad \kappa_0 = \langle\kappa\rangle$$

где ξ_i ($i = 1, ..., 4$) – некоррелированные белые шумы.

Запишем систему (2.4) как систему уравнений Ито [6]

$$df_1 = f_2dt,\quad df_2 = \{-2\varepsilon_0 f_2 - \omega^2[(1-\alpha_0)\,f_1 - f_3]\}\,dt - 2\varepsilon_1 f_2 d\xi_2 + \omega^2\beta f_1 d\xi_1$$

$$df_3 = (M_0 f_1 - \kappa_0 f_3)\,dt + M_1 f_1 d\xi_3 - \kappa_1 f_3 d\xi_4 \tag{2.5}$$

Если под ξ_i понимаются белые шумы в смысле Стратоновича [6], то в двух последних уравнениях системы (2.5) следует заменить ε_0 на $\varepsilon_0 - \varepsilon_1^2$, а κ_0 на $\kappa_0 - \kappa_1^2/2$.

Из (2.5) следуют уравнения статистических моментов первого и второго порядков [6, 7].

Используя условия Рауса–Гурвица, можно показать, что движение стержня устойчиво по отношению к моментам первого порядка, если соблюдается условие

$$\alpha_0 < 1 - M_0/\kappa_0 \quad (\xi_4 \text{ — белый шум Ито})$$

$$\alpha_0 < 1 - M_0[\kappa_0(1-\rho)]^{-1} \quad (\xi_4 \text{ — белый шум Стратоновича})$$

$$\rho = \kappa_1^2/(2\kappa_0)$$

Первое из условий совпадает с условием устойчивости стержня при детерминированной постановке задачи. Второе условие оказывается более жестким (при $\kappa_1^2/2 < \kappa_0$). В соответствии со вторым неравенством начиная с некоторых значений κ_1 стержень устойчив только тогда, когда продольная сила в среднем является растягивающей.

Условия устойчивости движения стержня по отношению к моментам второго порядка записываются более громоздко. Понимая белые шумы в смысле Ито, получим

$$
\begin{aligned}
&-[\omega^2\beta^2 M_0-2(\varepsilon_0-\varepsilon_1^2)M_1^2-4(1-\alpha_0)(\varepsilon_0-\varepsilon_1^2)M_0]+\\
&+(1-\alpha_0)(2\kappa_0-\kappa_1^2)[\omega^2\beta^2/2+2(1-\alpha_0)(\varepsilon_0-\varepsilon_1^2)-M_0]+\\
&+(2M_0^2+M_1^2\kappa_0)+(2\varepsilon_0+\kappa_0)(2\kappa_0-\kappa_1^2)\times\\
&\times[-2(1-\alpha_0)\kappa_0(\varepsilon_0-\varepsilon_1^2)/\omega^2+\beta^2\kappa_0/2+2M_0(\varepsilon_0-\varepsilon_1^2)/\omega^2]<0 \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Анализ этого соотношения в общем случае затруднителен. Поэтому рассмотрим несколько частных случаев, представляющих практический интерес.

1°. Внешнее сопротивление и характеристики вязкоупругости материала детерминированные ($\varepsilon_1 = M_1 = \kappa_1 = 0$). Из неравенства (2.6) следует условие устойчивости, совпадающее с полученным ранее [4]. Ограничение для β^2 оказывается одинаковым, независимо от того, какой смысл вкладывается в белый шум ξ_1 (по Ито или по Стратоновичу).

2. Внешнее сопротивление и разброс функции M не учитываются ($\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = M_1 = 0$). Из (2.6) следует

$$
\omega^2\beta^2 < 2M_0\left\{1+\frac{\kappa_0^2}{\omega^2}\left[1-\alpha_0-\frac{M_0}{\kappa_0}\left(1-\frac{\kappa_1^2}{2\kappa_0}\right)^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-1} \qquad (2.7)
$$

Можно убедиться, что при $\rho < 1$ в рассматриваемом случае на разброс продольной силы накладываются более жесткие ограничения по сравнению с предыдущим случаем (при $\varepsilon_0 = 0$).

Если под ξ_3 понимается белый шум Стратоновича, то в неравенство (2.7) вместо κ_0 должна быть подставлена разность $\kappa_0 - \kappa_1^2/2$.

3°. Внешнее трение и разброс функции κ не учитываются ($\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \kappa_1 = 0$). Соотношение (2.6) принимает вид

$$
\omega^2\beta^2 < 2M_0[\delta - M_1^2/(2M_0)](\delta+\kappa_0^2/\omega^2)^{-1} \qquad (2.8)
$$

$$
\delta = 1-\alpha_0-M_0/\kappa_0
$$

Очевидно, что в этом случае ограничение сверху на величину β^2 оказывается более жестким по сравнению со случаем 1° (при $\varepsilon_0 = 0$).

Условие (2.8) сохраняется независимо от того, понимается ли белый шум ξ_3 в смысле Ито или Стратоновича.

4°. Характеристики вязкоупругости материала детерминированные ($M_1 = \kappa_1 = 0$). Из неравенства (2.6) имеем

$$
\begin{aligned}
&\omega^2\beta^2 < 2\delta[\delta+\kappa_0(2\varepsilon_0+\kappa_0)/\omega^2]^{-1}\times\\
&\times[2(1-\alpha_0)(\varepsilon_0-\varepsilon_1^2)+M_0+2\kappa_0(2\varepsilon_0+\kappa_0)(\varepsilon_0-\varepsilon_1^2)/\omega^2]
\end{aligned}
$$

и вновь заключаем, что устойчивость стержня в среднеквадратичном возможна при меньших значениях коэффициента интенсивности β по сравнению со случаем 1°.

Если под ξ_2 понимается белый шум по Стратоновичу, то вместо ε_0 следует подставить $\varepsilon_0 - \varepsilon_1^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапов В.Д.* Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1985. 312 с.
2. *Tylikowski A.* Stability and Bounds on Motion of Viscoelastic Columns with Imperfections and Time-dependent Forces. Creep in Structures//IUTAM Symposium. Cracow. Poland. 1990; Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 1991. С. 609–614.
3. *Дроздов А.Д., Колмановский В.Б.* Устойчивость вязкоупругих стержней при случайной продольной нагрузке.//ПМТФ. 1991. № 5. С. 124–131.
4. *Потапов В.Д.* Устойчивость вязкоупругого стержня, находящегося под действием случайной стационарной продольной силы.//ПММ. 1992. Т. 55. Вып. 1. С. 105–110.
5. *Арутюнян Н.Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.; Л.: Гостехиздат, 1952. 324 с.
6. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 368 с.
7. *Диментберг М.Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. М.: Наука, 1989. 175 с.
8. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.XII.1991