ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. ТОМ 57, ВЫП. 2, 1993

УДК 539.3

© 1993 г. М.В.Долотов, И.Д. Килль

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА В СЛУЧАЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Получены простые аналитические выражения для напряжений в упругом полупространстве в моменты времени приложения нагрузки, близкие к начальному. Представлены асимптотические разложения напряжений при $t \to 0$ и оценки погрешностей главных членов асимптотик, основанные на ряде допущений. Предполагается, в частности, экспоненциальное убывание преобразования Ганкеля функции радиального распределения нагрузки.

Полученные результаты дополняют исследования других авторов [1–3] по построению асимптотических приближений решения данной задачи динамической теории упругости. В частности, при анализе осесимметричного варианта этой задачи [3] основное внимание было уделено построению и исследованию решений для источников возмущений типа дельта-функции по координатам и единичного скачка или дельта-функции по времени. Формы решения оказались достаточно сложными. Сравнительно простые выражения для перемещений получены [3] лишь для больших значений времени, а также на границе полупространства и на оси симметрии.

1. Рассмотрим в цилиндрических координатах r, φ, z упругое полупространство $z \geqslant 0$, которое до момента времени $t = 0$ находится в покое. С момента времени $t = 0$ на свободную границу полупространства действует нормальная осесимметричная нагрузка

$$T_z(r,t) = T_0 f(r) a(t) \tag{1.1}$$

где T_0 – постоянная, функция $f(r)$ допускает преобразование Ганкеля, $a(t)$ – оригинал. Требуется определить напряжения в полупространстве.

Перейдем к безразмерным переменным, полагая

$$r' = r / \delta, \quad z' = z / \delta, \quad t' = c_2 t / \delta \tag{1.2}$$

где c_2 – скорость распространения поперечных упругих волн, δ – некоторый характерный размер. В дальнейшем штрихи опускаем.

Потенциалы упругих перемещений $\Phi(r, z, t)$, $\Psi(r, z, t)$ определяются как решения краевых задач для волновых уравнений

$$\Delta\Phi - \gamma^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)\Psi - \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \gamma^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{1.3}$$

$$\Phi\big|_{t=0} = \frac{\partial\Phi}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \Psi\big|_{t=0} = \frac{\partial\Psi}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad |\Phi| < \infty, |\Psi| < \infty$$

(c_1 – скорость распространения продольных упругих волн, ν – коэффициент Пуассона).

Решения задач (1.3) определяются при помощи преобразования Лапласа и преобразований Ганкеля нулевого и первого порядка. Для изображений искомых потенциалов при этом получаем

$$\Phi^*(r,z,s) = L_s\{\Phi(r,z,t)\} = \int_0^\infty \lambda C(\lambda,s)e^{-zR_1}J_0(\lambda r)d\lambda$$

$$\Psi^*(r,z,s) = \int_0^\infty \lambda D(\lambda,s)e^{-zR_2}J_1(\lambda r)d\lambda \tag{1.4}$$

$$R_1 = \sqrt{\gamma^2 s^2 + \lambda^2}, \quad R_2 = \sqrt{s^2+\lambda^2}; \quad \arg R_1 = \arg R_2 = 0 \text{ при } s > 0$$

где L_s – оператор преобразования Лапласа, J_0, J_1 – функции Бесселя первого рода.

Определяя изображения напряжений, соответствующие Φ^* и Ψ^*, находим затем неизвестные функции $C(\lambda, s)$, $D(\lambda, s)$ из граничных условий

$$\sigma^*_{zz}\big|_{z=0} = -T_0 a^*(s)\int_0^\infty \lambda f^H(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda, \quad \sigma^*_{rz}\big|_{z=0} = 0$$

$$f^H(\lambda) = \int_0^\infty r f(r) J_0(\lambda r)dr, \quad a^*(s) = L_s\{a(t)\}$$

Окончательно для изображений искомых напряжений будем иметь:

$$\frac{\sigma^*_{jj}}{T_0} = \int_0^\infty \lambda^3 f^H(\lambda)U_j(V_1 - V_2)d\lambda - \frac{k_j}{2}\int_0^\infty \lambda f^H(\lambda)J_0(\lambda r)s^2 V_1 d\lambda, \quad j = r,\varphi,z$$

$$\frac{\sigma^*_{rz}}{T_0} = \int_0^\infty \lambda^2 f^H(\lambda)J_1(\lambda r)\left(\frac{R^2V_2}{R_2} - R_1V_1\right)d\lambda, R^2 = \frac{s^2}{2} + \lambda^2, P(\lambda,s) = R^4 - \lambda^2 R_1 R_2$$

$$U_\varphi = J_1(\lambda r)/(\lambda r), U_z = -J_0(\lambda r), U_r = -U_\varphi - U_z, k_r = k_\varphi = \nu/(1-\nu), k_z = 1 \tag{1.5}$$

$$V_1 = a^*(s)R^2 e^{-zR_1}/P(\lambda,s), \quad V_2 = a^*(s)R_1R_2e^{-zR_2}/P(\lambda,s)$$

Формулы для соответствующих оригиналов могут быть формально записаны по теореме обращения в виде контурных интегралов. Практическая ценность такого решения, очевидно, невелика.

2. При получении асимптотики при $t \to 0$ точного решения ограничимся функциями $f(r)$ и $a(t)$, удовлетворяющими следующим дополнительным условиям. Будем считать $f^H(\lambda)$ экспоненциально убывающей с ростом λ. Это, в частности, обеспечивает сходимость интегралов

$$A_{m,n}(r) = \int_0^\infty \lambda^m f^H(\lambda)J_n(\lambda r)d\lambda; \quad m = 1,2,\ldots; \quad n = 0,1. \tag{2.1}$$

Заметим, что указанному условию удовлетворяют часто используемые в теории упругости куполообразные распределения $f(r) = e^{-r^2/4}$, $f(r) = (r^2+1)^{-(2n+1)/2}$, $n = 0, 1\ldots$.

Предположим также, что функция $a^*(s)$ представима в окрестности $s = \infty$ абсолютно сходящимся рядом

$$a^*(s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\xi_n}{s^{\mu_n}}, \quad 0 < \mu_0 < \mu_1 < \ldots, \quad \lim_{n\to\infty}\mu_n = \infty \tag{2.2}$$

Метод получения асимптотических разложений продемонстрируем на примере σ_{zz}.

После простых преобразований, вводя очевидные обозначения, запишем

$$\frac{\sigma_{zz}^*}{T_0} = -\sigma_{zz}^{*(1)} - \sigma_{zz}^{*(2)} + \sigma_{zz}^{*(3)} \tag{2.3}$$

$$\sigma_{zz}^{*(k)} e^{\gamma_k zs} = \int_0^\infty \lambda f^H(\lambda) J_0(\lambda r) F_k(\lambda, z, s) d\lambda, \quad k = 1,2,3$$

$$F_1(\lambda, z, s) = a^*(s) e^{-z(R_1 - \gamma s)}, \quad F_k(\lambda, z, s) = a^*(s) \frac{\lambda^2 R_1 R_2 e^{-z(R_{k-1} - \gamma_k s)}}{P(\lambda, s)}, k = 2,3$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \quad \gamma_3 = 1$$

После преобразований получим представление

$$F_1(\lambda, z, s) = a^*(s) \exp\left[-\frac{z\lambda^2}{\gamma s\left(1 + \sqrt{1 + \lambda^2 / (\gamma^2 s^2)}\right)} \right]$$

из которого следует, что ряд

$$F_1(\lambda, z, s) = \sum_{n=0}^\infty \varphi_n^*(z, s) \lambda^{2n} \tag{2.4}$$

сходится при любом фиксированном значении λ и $|s| > M_1$.

Функции $\overset{*}{\varphi}_n(z, s)$ представимы при этом в окрестности $s = \infty$ в виде обобщенных степенных рядов. По теореме о разложении изображений в обобщенный степенной ряд [4] имеем

$$\varphi_n(z, t) = L_t^{-1}\{\varphi_n^*(z, s)\} = L_t^{-1}\left\{ \frac{d_n(z)}{s^{n+\mu_0}} + \ldots \right\} = \frac{d_n(z)}{\Gamma(n + \mu_0)} t^{n+\mu_0-1} + \ldots \tag{2.5}$$

$$\varphi_{n+1}(z, t) = o(\varphi_n(z, t)), \quad t \to 0, \quad n = 0,1,\ldots$$

где L_t^{-1} – оператор, обратный L_s.

Подставляя (2.4) в (2.3) и интегрируя почленно по λ, получим формальное разложение

$$\sigma_{zz}^{*(1)} e^{\gamma zs} \approx \sum_{n=0}^\infty A_{2n+1,0}(r) \varphi_n^*(z, s)$$

Переходя в нем к оригиналам, находим при учете теоремы запаздывания

$$\sigma_{zz}^{(1)} \approx \sum_{n=0}^\infty A_{2n+1,0}(r) \varphi_n(z, t - \gamma z), \quad t \to 0, \quad t > \gamma z \tag{2.6}$$

Можно доказать, что (2.6) действительно является асимптотическим разложением $\sigma_{zz}^{(1)}$ при $t \to 0$.

Первое условие асимптотического разложения выполнено в силу (2.5).

Оценим порядок малости при $t \to 0$ величины $r_n(r, z, t)$, равной разности левой и $n + 1$ первых слагаемых правой части соотношения (2.6). Вследствие соотношений (2.1), (2.3) будем иметь

$$r_n(r, z, t + \gamma z) = \int_0^\infty \lambda f^H(\lambda) J_0(\lambda r) L_t^{-1}\{q_n^*(\lambda, z, s)\} d\lambda \tag{2.7}$$

$$q_n^*(\lambda,z,s)=F_1(\lambda,z,s)-\sum_{k=0}^{n}\varphi_k^*(z,s)\lambda^{2k}$$

причем возможность перехода к оригиналу под знаком интеграла обеспечивается равномерной сходимостью соответствующих интегралов, устанавливаемой в предположении экспоненциального убывания $f^H(\lambda)$.

Вследствие соотношений (2.4), (2.5) имеем при $|s|>M_1$ разложение

$$q_n^*(\lambda,z,s)=b_{n+1}(\lambda,z)/s^{n+\mu_0+1}+\ldots$$

используя которое получаем

$$r_n(r,z,t)=o(\varphi_n(z,t-\gamma z)),\quad t\to 0,\quad \gamma z<t \tag{2.8}$$

что означает выполнение второго условия асимптотического разложения.

Асимптотическое разложение для $\sigma_{zz}^{(2)}$ получается тем же путем, что и для $\sigma_{zz}^{(1)}$, поскольку корнями уравнения $P(\lambda, s)=0$ являются лишь $s=0$, $s=\pm i\lambda\vartheta$, $0<\vartheta<1$ [2] и потому при любом постоянном λ и $|s|>M_2$ функция $F_2(\lambda, z, s)$ обладает теми же свойствами, что и $F_1(\lambda, z, s)$. Аналогичным образом находятся асимптотические разложения $\sigma_{zz}^{(3)}$ и остальных напряжений.

Отметим, что, как следует из вывода соотношения (2.6), последнее справедливо для любых z и t, удовлетворяющих условию $t-\gamma z\to +0$.

Заметим также, что функции $\varphi_n^*(z, s)$ в (2.4) и других подобных разложениях являются при $n\geqslant 1$ произведениями $a^*(s)$ на правильные рациональные дроби от s и поэтому обращение их не представляет затруднений.

Асимптотические разложения напряжений, в которых сохранены члены порядка $1+\mu_0$ при $t\to 0$, имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sigma_{jj}}{T_0}\approx -k_jA_{10}a(t-\gamma z)+k_jA_{30}\left[\frac{z}{2\gamma}a_1(t-\gamma z)+2(1-2\gamma)a_2(t-\gamma z)\right]-\\
&-w_j[4\gamma a_2(t-z)-2a_2(t-\gamma z)]+\ldots,\quad j=r,\varphi,z\\
&\frac{\sigma_{rz}}{T_0}\approx -2\gamma A_{21}[a_1(t-\gamma z)-a_1(t-z)]+\ldots\\
&w_\varphi=A_{21}/r,\quad w_z=-A_{30},\quad w_r=-w_\varphi-w_z\\
&a_{k+1}(t)=\int_0^t a_k(\tau)d\tau,\quad a_0(t)=a(t),\quad k=0,1,\ldots
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Напомним, что функции $a_k(t)$ в (2.9) – оригиналы и потому обращаются в нуль при отрицательных значениях аргументов.

3. Удерживая в (2.9) конечное число слагаемых, получим приближенное решение задачи. Использование такого решения для практических расчетов представляется оправданным, если известна оценка погрешности.

Произведем оценку погрешности для асимптотического представления решения. Выделяя в (2.9) главные члены асимптотики, будем иметь

$$\begin{aligned}
&\sigma_{jj}=-k_jf(r)a(t-\gamma z)+\delta_{jj},\quad j=r,\varphi,z\\
&\sigma_{rz}=-2\gamma A_{21}(r)[a_1(t-\gamma z)-a_1(t-z)]+\delta_{rz}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Соотношения (3.1) представляют собой точные выражения для напряжений. Приближенное решение находим, отбрасывая в (3.1) погрешности δ_{jj}, δ_{rz}. Заметим, что нормальные напряжения в приближенном решении представляют собой умноженное на $f(r)$ решение соответствующей одномерной задачи.

Оценим δ_{zz}. Из (2.3), (3.1), вводя очевидные обозначения, получаем

$$\delta_{zz} = \delta_{zz}^{(1)} - \delta_{zz}^{(2)} = L_t^{-1}\left\{\int_0^\infty \lambda f^H(\lambda) J_0(\lambda r) a^*(s) \varphi^*(\lambda,z,s) d\lambda\right\} -$$

$$-L_t^{-1}\left\{\int_0^\infty \lambda^3 f^H(\lambda) J_0(\lambda r) a^*(s) \psi^*(\lambda,z,s) d\lambda\right\} \tag{3.2}$$

$$\varphi^*(\lambda,z,s) = e^{-\gamma zs} - e^{-zR_1}, \quad \psi^*(\lambda,z,s) = R_1 R_2 (e^{-zR_1} - e^{-zR_2}) / P(\lambda,s)$$

Согласно [5]

$$L_t^{-1}\{\varphi^*(\lambda,z,s)\} = \frac{\lambda^2 z}{\gamma} \frac{J_1(\lambda\gamma^{-1}\sqrt{t^2-\gamma^2 z^2})}{\lambda\gamma^{-1}\sqrt{t^2-\gamma^2 z^2}} \eta(t-\gamma z)$$

где $\eta(x)$ – единичная функция Хевисайда. Используя теорему свертывания и известные неравенства $|J_1(x)/x| \leqslant 1/2$, $|J_0(x)| \leqslant 1$ [6], находим

$$|\delta_{zz}^{(1)}| \leqslant \frac{z}{2\gamma}\beta_3 b_1(t-\gamma z), \quad \beta_k = \int_0^\infty \lambda^k |f^H(\lambda)| d\lambda, \quad b_1(t) = \int_0^t |a(\tau)| d\tau \tag{3.3}$$

Для оценки $\delta_{zz}^{(2)}$ используем теорему обращения. Оценим сначала

$$\psi(\lambda,z,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \psi^*(\lambda,z,s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(\lambda,z,s,t) ds \tag{3.4}$$

$$F(\lambda,z,s,t) = \frac{R_1 R_2 (e^{-zR_1}\eta_1 - e^{-zR_2}\eta_2)}{P(\lambda,s)} e^{st}, \quad \eta_1 = \eta(t-\gamma z), \eta_2 = \eta(t-z)$$

Введение η_1 и η_2 не меняет значение интеграла в (3.4), так как интегралы от функций, имеющих множители $\exp(-zR_1)$ и $\exp(-zR_2)$, обращаются в нуль при $t < \gamma z$ и $t < z$ соответственно.

На комплексной плоскости s с разрезами $(-i\infty, -i\lambda]$, $[i\lambda, i\infty)$ рассмотрим контур C, образованный прямой $\operatorname{Re} s = \sigma$ дугами окружности $|s| = R_0$, берегами разрезов $[-iR_0, -i(\lambda\gamma^{-1} + \rho_0)]$, $[-i(\lambda\gamma^{-1} - \rho_0), -i(\lambda + \rho_0)]$, $[i(\lambda + \rho_0), i(\lambda\gamma^{-1} - \rho_0)]$, $[i(\lambda\gamma^{-1} + \rho_0), iR_0]$ и окружностями $|s \pm i\lambda| = \rho_0$, $|s \pm i\lambda\gamma^{-1}| = \rho_0$. Применяя к интегралу функции $F(\lambda, z, s, t)$ по контуру C теорему Коши о вычетах, переходя к пределу при $R_0 \to \infty$, $\rho_0 \to 0$ и используя лемму Жордана, получим

$$\psi(\lambda,z,t) = \Sigma + I_\gamma$$

где Σ – сумма вычетов функции в особых точках $s = 0$, $s = \pm i\lambda\vartheta$, I_γ – совокупность интегралов по берегам разрезов.

Для Σ, используя неравенства

$$|\sin x| \leqslant |x|, |\exp(-\lambda z\sqrt{1-\gamma^2\vartheta^2}) - \exp(-\lambda z\sqrt{1-\vartheta^2})| \leqslant \lambda z$$

(последнее получается с помощью формулы Тейлора), находим

$$|\Sigma|\leqslant \frac{2t}{1-\gamma^2}\eta_{12}+8\alpha t(\eta_{12}+\lambda z\eta_2) \tag{3.5}$$

$$\alpha=\frac{(1-\vartheta^2)(1-\gamma^2\vartheta^2)}{\vartheta^6-6\vartheta^4+(12-8\gamma^2)\vartheta^2-4(1-\gamma^2)},\quad \eta_{12}=\eta_1-\eta_2$$

Покажем, что величина α в (3.5) ограничена. Для этого уточним область возможных значений ϑ. Разрешая тождество $P(\lambda, i\lambda\vartheta) = 0$ относительно γ^2, получим с учетом условий $0 < \vartheta^2 < 1$, $0 < \gamma^2 \leqslant 0{,}5$ систему неравенств $8(\vartheta^2-1) \leqslant \vartheta^6 - 8\vartheta^4 + 24\vartheta^2 - 16 < 0$, решая которую, находим

$$3-\sqrt{5}=0{,}7639...\leqslant \vartheta^2<0{,}9126... \tag{3.6}$$

Ограниченность α на множестве (3.6) доказывается методами анализа.

Для I_γ, полагая $s = i\lambda y$ и вводя очевидные обозначения, получим

$$\frac{\lambda\pi}{8}I_\gamma=\sum_{k=1}^{5}I_k=-\eta_{12}\int_1^{1/\gamma}\rho_1\rho_3\rho^4e^{-\lambda\rho_1 z}\frac{\sin\lambda yt}{P_1(y)}dy+$$

$$+\eta_2\int_1^{1/\gamma}4\rho_1^2\rho_3^2\sin\lambda\rho_3 z\frac{\sin\lambda yt}{P_1(y)}dy-\eta_2\int_1^{1/\gamma}\rho_1\rho_3\rho^4(e^{-\lambda\rho_1 z}-\cos\lambda\rho_3 z)\frac{\sin\lambda yt}{P_1(y)}dy-$$

$$-\eta_{12}\int_{1/\gamma}^{\infty}\rho_2\rho_3\sin\lambda\rho_2 z\frac{\sin\lambda yt}{P_2(y)}dy-\eta_2\int_{1/\gamma}^{\infty}\rho_2\rho_3(\sin\lambda\rho_2 z-\sin\lambda\rho_3 z)\frac{\sin\lambda yt}{P_2(y)}dy$$

$$\rho_1=\sqrt{1-\gamma^2y^2},\quad \rho_2=\sqrt{\gamma^2y^2-1},\quad \rho_3=\sqrt{y^2-1},\quad \rho^2=1-\rho_3^2$$

$$P_1(y)=\rho^8+16\rho_1^2\rho_3^2,\quad P_2(y)=\rho^4+4\rho_1\rho_2$$

Значения радикалов выбраны из условий в (1.4) и непрерывности аргументов, подобно тому, как это выполнено в [3].

Используя соотношения

$$P_1(y)\geqslant 8\rho^4\rho_1\rho_3,\quad P_1(y)\geqslant 16\rho_1^2\rho_3^2,\quad |e^{-\lambda\rho_1 z}-\cos\lambda\rho_3 z|\leqslant \lambda z(1+\gamma^{-1})$$

находим

$$|I_1|\leqslant \frac{\lambda t}{16}\frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}\eta_{12},\quad |I_2|\leqslant \frac{\lambda^2 zt}{12}\frac{1-\gamma^3}{\gamma^3}\eta_2,\quad |I_3|\leqslant \frac{\lambda^2 zt}{16}\frac{(1-\gamma^2)(1+\gamma)}{\gamma^3}\eta_2 \tag{3.7}$$

Оценим I_4. Производя замену переменной интегрирования $x = \lambda z\sqrt{\gamma^2y^2-1}$, используя аддитивное свойство интеграла и оценивая подынтегральную функцию, получим

$$|I_4|\leqslant \lambda\gamma^2 z\eta_2\left[\int_0^h|\chi(x)|dx+\int_h^\infty|\chi(x)|dx\right],\quad 0<h<\infty \tag{3.8}$$

$$|\chi(x)|\leqslant t\gamma^{-1}z^{-1},\quad 0\leqslant x\leqslant h;\quad |\chi(x)|\leqslant x^{-2},\quad h\leqslant x<\infty$$

Из (3.8) получим оценку I_4, справедливую для любых значений h.

Минимизируя эту оценку по h и выполняя аналогичные операции для I_5, находим

$$|I_4|\leqslant 2\gamma\lambda t\eta_{12},\quad |I_5|\leqslant 2\lambda\gamma\sqrt{zt}\eta_2 \tag{3.9}$$

Используя оценки (3.5), (3.7), (3.9), получаем подобно (3.3)

$$|\delta_{zz}^{(2)}| \le \beta_3 z\left(\frac{2}{1-\gamma^2}+8\alpha+\frac{1-\gamma^2}{2\pi\gamma^2}+\frac{2\gamma}{\pi}\right)[b_1(t-\gamma z)-b_1(t-z)]+$$

$$+\beta_4 zt\left[8\alpha+\frac{(1-\gamma^2)(1+\gamma)}{2\pi\gamma^3}+\frac{2(1-\gamma^3)}{3\pi\gamma^3}\right]b_1(t-z)+\beta_3\sqrt{zt}\,\frac{16\gamma}{\pi}b_1(t-z) \tag{3.10}$$

Оценки δ_{rr} и $\delta_{\varphi\varphi}$ проводятся аналогично.

Укажем путь получения оценки δ_{rz}. Из (1.5) и (3.1) после преобразований находим

$$\delta_{rz}=\delta_{rz}^{(1)}-\delta_{rz}^{(2)}=\int_0^\infty \lambda^4 f^H(\lambda)J_1(\lambda r)L_t^{-1}\left\{\frac{a^*(s)}{R_1}g_1^*(\lambda,z,s)\right\}d\lambda-$$

$$-2\gamma\int_0^\infty \lambda^2 f^H(\lambda)J_1(\lambda r)L_t^{-1}\{a^*(s)g_2^*(\lambda,z,s)\}d\lambda$$

$$g_1^*(\lambda,z,s)=\left[(1-2\gamma^2)\frac{R^2}{R_1R_2}+2\gamma^2\right]\psi^*(\lambda,z,s)$$

$$g_2^*(\lambda,z,s)=\frac{e^{-\gamma zs}-e^{-zs}}{s}-\gamma\frac{e^{-zR_1}-e^{-zR_2}}{R_1}$$

Оценка $\delta_{rz}^{(1)}$ получается тем же методом, что и $\delta_{zz}^{(2)}$ с использованием соответствия $L_t^{-1}\{R_1^{-1}\}=\gamma^{-1}J_0(\lambda\gamma^{-1}t)$ [5]. Для оценки $\delta_{rz}^{(2)}$ используем представление

$$g_2(\lambda,z,t)=L_t^{-1}\left\{\frac{e^{-\gamma zs}}{s}-\gamma\frac{e^{-zR_1}}{R_1}\right\}\eta_{12}+L_t^{-1}\left\{\gamma\frac{e^{-zR_2}-e^{-zR_1}}{R_1}\right\}\eta_2$$

известные оригиналы изображений $e^{-\gamma zs}/s$, e^{-zR_1}/R_1, теорему соответствия оригиналов изображений $g(s)$ и $g(\sqrt{s^2+\lambda^2})$ [5], а также теорему свертывания.

Объединяя полученные результаты, будем иметь:

$$|\delta_{jj}|\le\beta_3\left\{k_j\left[\alpha_3 t+\frac{16\gamma\sqrt{\gamma}}{\pi}\sqrt{zt}\right]+\frac{z}{2\gamma}[k_j(1+2\alpha_2)+\zeta_j\alpha_2]\right\}b_1(t-\gamma z)+$$

$$+\left\{\frac{\beta_3}{2}\left[\alpha_3 t+\frac{16\gamma\sqrt{zt}}{\pi}\right]+\beta_4\frac{1-\gamma^3}{\gamma^3}\frac{zt}{3\pi}\right\}\zeta_j b_1(t-z),\quad j=r,\varphi.$$

$$|\delta_{zz}|\le|\delta_{zz}^{(1)}|+|\delta_{zz}^{(2)}|$$

$$|\delta_{rz}|\le\frac{r}{2}\left\{\beta_5 z\left(\frac{\gamma_1^2\alpha_2}{\gamma}+2\gamma\alpha_3+\frac{4\gamma^2}{\pi}\right)[b_2(t-\gamma z)-b_2(t-z)]+\right.$$

$$+2\beta_5 z^2\frac{1-\gamma}{\gamma}[b_1(t-\gamma z)-b_1(t-z)]+\beta_6 zt\left(\frac{16\gamma_1^2\alpha}{\gamma(2-\vartheta^2)}+\right. \tag{3.11}$$

$$+\frac{\gamma_1^2}{\pi\gamma^3}\left[\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)(\gamma_1+\alpha_1)+\frac{1}{6\gamma^2}(4\gamma_1^3+\gamma_2^3-3\gamma_1^2\gamma_2)\right]+2\gamma_1^2(2-\gamma^2)+$$

$$+2\gamma\left[8\alpha+\frac{\gamma_2^2(1+\gamma)}{2\pi\gamma^3}+\frac{2(1-\gamma^3)}{3\pi\gamma^3}\right]\Bigg)b_2(t-z)+8\beta_5\sqrt{zt}\left(\frac{\gamma_1^2\gamma_2\sqrt{2}}{\pi\gamma}+\frac{4\gamma^2}{\pi}\right)b_2(t-z)+$$

$$+\beta_5 zt\left(2\gamma+\gamma_2^2\frac{1+\sqrt{2}}{\gamma}\right)b_1(t-z)\Bigg\}$$

где $|\delta_{zz}^{(i)}|$ $(i = 1, 2)$ оценены в (3.3) и (3.10) и введены следующие обозначения:

$$\zeta_r = 1+\sqrt{2},\quad \zeta_\varphi = 1,\quad \gamma_1=\sqrt{1-2\gamma^2},\quad \gamma_2=\sqrt{1-\gamma^2},\quad \alpha_1=\frac{3\gamma^2-1}{2\gamma}\arcsin\frac{3\gamma^2-1}{\gamma_2^2}$$

$$\alpha_2 = 2/\gamma_2^2+16\alpha/(2-\vartheta^2)+\gamma_1/(\pi\gamma^2)+\alpha_1/(\pi\gamma)+8/\pi$$

$$\alpha_3 = 2/\gamma_2^2+8\alpha+\gamma_2^2/(2\pi\gamma^2),\quad b_2(t)=\int_0^t b_1(\tau)d\tau$$

4. Рассмотрим пример. Пусть в безразмерных переменных

$$f(r)=(r^2+1)^{-3/2},\quad a(t)=\eta(t)$$

Тогда $f^H(\lambda) = e^{-\lambda}$; A_{mn} выражаются в элементарных функциях [7], $\beta_k = k!$, $a_k = b_k = t^k/k!$. Для $\nu = 0{,}25$, $r = z = 0{,}01$ имеем при $t = 0{,}5(1 + \gamma)z = 7{,}887 \cdot 10^{-3}$:

$$\sigma_{rr}/T_0 = -0{,}3333\pm 3{,}0\cdot 10^{-3},\quad \sigma_{\varphi\varphi}/T_0 = -0{,}3333\pm 1{,}8\cdot 10^{-3}$$

$$\sigma_{zz}/T_0 = -0{,}9998\pm 1{,}1\cdot 10^{-3},\quad \sigma_{rz}/T_0 = 7{,}318\cdot 10^{-5}\pm 4{,}6\cdot 10^{-7}$$

и максимальная относительная погрешность составляет 0,9%; при $t = 1{,}1z = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$ максимальная относительная погрешность составляет 2,4%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В.* Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах: Метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики. Л.: Наука, 1982. 289 с.
2. *Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И.* О задаче Лемба в случае полупространства // Учен. зап. ЛГУ. 1960. № 135. Сер. мат. Вып. 21. С. 71–118.
3. *Огурцов К.И., Петрашень Г.И.* Динамические задачи для полупространства в случае осевой симметрии // Учен. зап. ЛГУ. 1951. № 149. Сер. мат. Вып. 24. С. 3–117.
4. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 343 с.
6. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978. 375 с.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.VI.1992