УДК 539.3

© 1993 г. В.М. Александров

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Изложены регулярный и сингулярный асимптотические методы применительно к одномерным и двумерным интегральным уравнениям первого рода, возникающим при исследовании ряда плоских, осесимметричных и пространственных задач механики сплошной среды со смешанными граничными условиями.

Преимущества асимптотических методов перед другими методами состоят в их универсальности, в аналитической форме представления решения и простоте его последующего качественного и количественного исследования. Поскольку задачи со смешанными граничными условиями, как правило, сводятся к решению интегральных уравнений, то последние как раз и служат объектом изучения в данной работе с точки зрения использования для их исследования асимптотических методов. Далее рассмотрим несколько типичных интегральных уравнений (ИУ) [1–11].

1. Плоские задачи и ряд пространственных задач. Рассмотрим ИУ

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi f(x) \tag{1.1}$$

$$|x|\leqslant 1,\quad \lambda\in(0,\infty),\quad f(x)\in H_1^\alpha(-1,1),\quad \alpha>\frac{1}{2}$$

$$k(t)=\int_0^\infty\frac{L(u)}{u}\cos ut\,du \tag{1.2}$$

($H_m^\alpha(-\beta,\beta)$ – пространство функций, m-е производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем α при $|x|\leqslant\beta$). Функция $L(u)$ непрерывна и положительна при $u\in(0,\infty)$, причем для нее справедливы асимптотические равенства

$$\begin{aligned}&L(u)=Au+O(u^3)\quad (u\to 0,\quad A=\mathrm{const}>0)\\&L(u)=1+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{B_i}{u^i}+O\left(\frac{1}{u^N}\right)\quad (u\to\infty,\quad B_i=\mathrm{const})\end{aligned} \tag{1.3}$$

Кроме того, допустим, что $L(u)u^{-1}$ и $u[L(u)]^{-1}$ как функции комплексного переменного $w=u+iv$ соответственно регулярны в полосе $|v|\leqslant\gamma_1$ и полосе $|v|\leqslant\gamma_2$. Отсюда, в частности, следует, что ядро $k(t)$ убывает на бесконечности не слабее, чем $\exp(-\gamma_1|t|)$.

Введя в рассмотрение гильбертово пространство $H(-1,1)$ с нормой

$$\|\varphi\|_H^2=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi(x)\varphi(\xi)k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)dx\,d\xi=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(\alpha\lambda)}{\alpha}|\Phi(\alpha)|^2d\alpha \tag{1.4}$$

где $\Phi(\alpha)$ – преобразование Фурье функции $\varphi^*(x)$ ($\varphi^*(x)=\varphi(x)$ при $|x|\leqslant 1$, $\varphi^*(x)=0$

при $|x| > 1$), на основании теоремы Рисса о форме линейного и ограниченного функционала можно показать, что решение ИУ (1.1), (1.2) в $H(-1, 1)$ существует и единственно при любом $\lambda \in (0, \infty)$, причем оно имеет вид

$$\varphi(x) = \omega(x)(1-x^2)^{-1/2}, \quad \omega(x) \in C(-1,1) \tag{1.5}$$

и справедливо соотношение корректности

$$\|\omega\|_C \leqslant m\|f\|_{H_1^\alpha} \tag{1.6}$$

На основании (1.3) для ядра (1.2) можно установить представление

$$k(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{2i} + |t| \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^{2i} + \ln|t| \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{2i} \tag{1.7}$$

где $c_0 = -1$, и ряда равномерно сходятся при $|t| < \rho$, $\rho \leqslant \infty$. На основании структуры (1.7) ядра $k(t)$ можно заключить, что при достаточно больших значениях λ решение ИУ (1.1) имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{N-i} \sum_{j=0}^{i} \varphi_{ij}(x)\lambda^{-i}(\ln\lambda)^j + O[\lambda^{-N}(\ln\lambda)^N] \tag{1.8}$$

Подставляя (1.7) и (1.8) в (1.1), получим для последовательного определения функций $\varphi_{ij}(x)$ систему ИУ типа

$$-\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) \ln\left|\frac{\xi - x}{\lambda}\right| d\xi = \pi g(x) \quad (|x| \leqslant 1) \tag{1.9}$$

Такие уравнения для всякой функции $g(x) \in H_1^\alpha(-1, 1)$ решаются в замкнутом виде, поэтому регулярное асимптотическое разложение (1.8) реально может быть построено с любой желаемой точностью. Для практических целей обычно можно ограничиться удержанием членов порядка λ^{-4}, при этом решение ИУ (1.1) в форме (1.8) покрывает диапазон $\lambda \geqslant \sup(2, 2/\rho)$.

Рассмотрим систему двух ИУ

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{\infty} \varphi_1(\xi) k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f_1(x) + \int_{-\infty}^{-1} \varphi_2(\xi) k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi \quad (-1 \leqslant x < \infty) \\
&\int_{-\infty}^{1} \varphi_2(\xi) k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f_2(x) + \int_{1}^{\infty} \varphi_1(\xi) k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi \quad (-\infty < x \leqslant 1)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ таковы, что

$$\begin{aligned}
&f_1(x) = O(e^{-\alpha_1 x}) \quad (x \to \infty, \ \alpha_1 > 0) \\
&f_2(x) = O(e^{\alpha_2 x}) \quad (x \to -\infty, \ \alpha_2 > 0) \\
&f_1(x) + f_2(x) = f(x) \quad (|x| \leqslant 1)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

При выполнении последнего условия (1.11) решение ИУ (1.1) найдем как сумму решений ИУ (1.10), т.е.

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \quad (|x| \leqslant 1) \tag{1.12}$$

Отметим, что в силу первых двух условий (1.11), как можно показать, справедливы соотношения

$$\varphi_1(x) = O(e^{-\beta_1 x}) \quad (x \to \infty,\ \beta_1 > 0)$$
$$\varphi_2(x) = O(e^{\beta_2 x}) \quad (x \to -\infty,\ \beta_2 > 0) \tag{1.13}$$

Если функция $f(x)$ в ИУ (1.1) четная или нечетная, то

$$f_1(x) = \pm f_2(-x), \quad \varphi_1(x) = \pm\varphi_2(-x) \tag{1.14}$$

В обоих этих случаях система уравнений (1.10) очевидными заменами переменных сводится к одному ИУ

$$\int_0^\infty \psi(\tau)k(\tau - t)d\tau = \pi h(t) \pm \int_{2/\lambda}^\infty \psi(\tau)k\left(\frac{2}{\lambda} - t - \tau\right)d\tau \quad (0 \leqslant t < \infty)$$
$$\psi(t) = \varphi_1(\lambda t - 1), \quad h(t) = \lambda^{-1} f_1(\lambda t - 1) \tag{1.15}$$

Здесь и выше плюс берется для четного случая, минус – для нечетного.

Из разложения (1.7) видно, что ядро $k(t)$ имеет логарифмическую особенность в нуле. Кроме того, оно экспоненциально исчезает на бесконечности. С учетом этих факторов, а также первого соотношения (1.13) можно показать, что справедлива равномерная по t асимптотическая оценка

$$\int_{2/\lambda}^\infty \psi(\tau)k\left(\frac{2}{\lambda} - t - \tau\right)d\tau = O(e^{-2\beta_1/\lambda}) \tag{1.16}$$

Согласно (1.16) ИУ (1.15), можно решать при малых λ методом последовательных приближений, отбрасывая в нулевом приближении интеграл в его правой части. При этом на каждой итерации нужно искать решение ИУ типа

$$\int_0^\infty \psi(\tau)k(\tau - t)d\tau = \pi l(t) \quad (0 \leqslant t < \infty) \tag{1.17}$$

Такие ИУ в замкнутом виде решаются методом Винера–Хопфа, поэтому сингулярное асимптотическое разложение решения ИУ (1.1) при малых λ в форме

$$\varphi(x) = \psi\left(\frac{1+x}{\lambda}\right) \pm \psi\left(\frac{1-x}{\lambda}\right) \tag{1.18}$$

может быть реально построено с любой желаемой точностью. Для практических целей обычно можно ограничиться нулевым приближением, т.е. в (1.18) нужно взять в качестве $\psi(t)$ решение ИУ (1.17) при $l(t) \equiv h(t)$. Такое приближенное решение покрывает диапазон $\lambda \leqslant \sup(2, 2/\rho)$.

Итак, регулярный асимптотический метод при больших λ и сингулярный асимптотический метод малых λ покрывают весь диапазон изменения параметра λ, обеспечивая тем самым в совокупности полное аналитическое решение той или иной задачи, сводящейся к ИУ (1.1), (1.2).

2. Осесимметричные задачи и первая гармоника. Рассмотрим ИУ

$$\int_0^1 \varphi(\rho)k_n\left(\frac{\rho}{\lambda}, \frac{r}{\lambda}\right)\rho d\rho = \lambda f(r) \tag{2.1}$$

$$0 \leqslant r \leqslant 1; \quad \lambda \in (0, \infty); \quad n = 0,1; \quad f(r) \in H_1^{1-0}(S)$$

$$k_n(\mu, \nu) = \int_0^\infty L(u)J_n(\mu u)J_n(\nu u)du \tag{2.2}$$

Здесь S – круг единичного радиуса, $J_n(x)$ – функция Бесселя, функция $L(u)$ обладает описанными выше свойствами.

Введя в рассмотрение гильбертово пространство $H(S)$ с нормой

$$\|\varphi\|_H^2 = \frac{1}{\lambda}\int_0^1\int_0^1 \varphi(r)\varphi(\rho)k_n\left(\frac{\rho}{\lambda},\frac{r}{\lambda}\right)r\rho dr d\rho = \int_0^\infty L(\alpha\lambda)\Phi^2(\alpha)d\alpha \tag{2.3}$$

где $\Phi(\alpha)$ – преобразование Ганкеля функции $\varphi^*(r)$ ($\varphi^*(r) = \varphi(r)$ в S, $\varphi^*(r) = 0$ вне S), на основании теоремы Рисса можно показать, что решение ИУ (2.1), (2.2) в $H(S)$ существует и единственно при любом $\lambda \in (0, \infty)$, причем оно имеет форму

$$\varphi(r) = \omega(r)(1-r)^{-1/2}, \quad \omega(r) \in C(S) \tag{2.4}$$

и справедливо соотношение корректности типа (1.6).

ИУ (2.1), (2.2) при $n = 0$ может быть приведено к эквивалентному ИУ вида

$$\int_{-1}^1 \psi(\xi)m\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)d\xi = \pi\lambda g(x) \quad (|x| \le 1) \tag{2.5}$$

$$m(t) = \int_0^\infty L(u)\cos ut du \tag{2.6}$$

где четные функции $\psi(x)$ и $g(x)$ связаны с $\varphi(r)$ и $f(r)$ соотношениями

$$\varphi(r) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dr}r\int_r^1 \frac{\psi(\xi)d\xi}{\xi\sqrt{\xi^2 - r^2}}, \quad g(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\rho f(\rho)d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} \tag{2.7}$$

При $n = 1$ ИУ (2.1), (2.2) также может быть приведено к эквивалентному ИУ (2.5), (2.6), причем теперь уже нечетные функции $\psi(x)$ и $g(x)$ связаны с $\varphi(r)$ и $f(r)$ соотношениями

$$\varphi(r) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{dr}\int_r^1 \frac{\psi(\xi)d\xi}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}, \quad g(x) = \frac{d}{dx}x\int_0^x \frac{f(\rho)d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} \tag{2.8}$$

Построение асимптотических решений ИУ (2.5), (2.6) при больших и малых значениях λ, покрывающих в совокупности весь диапазон изменения λ, может быть произведено так же, как это описано для ИУ (1.1), (1.2). В частности, заметим, что при учете (1.3) для ядра (2.6) может быть получено представление

$$m(t) = \pi\delta(t) + \sum_{i=0}^\infty \tilde{a}_i t^{2i} + |t|\sum_{i=0}^\infty \tilde{b}_i t^{2i} + \ln|t|\sum_{i=0}^\infty \tilde{c}_i t^{2i} \tag{2.9}$$

где ряды равномерно сходятся при $|t| < \rho$, $\rho \le \infty$, $\delta(t)$ – дельта-функция. Из (2.9) видно, что в случае больших λ решение ИУ (2.5) по-прежнему нужно искать в форме (1.8); вместе с тем нет необходимости в решении ИУ типа (1.9).

Заметим еще, что согласно теореме 41.2 [3] решение ИУ (2.1) при любом $n \ge 2$ может быть построено, если известно решение этого же ИУ при $n = 0$.

3. Пространственные задачи. Рассмотрим ИУ

$$\iint_\Omega \varphi(\xi,\eta)k\left(\frac{R}{\lambda}\right)d\xi d\eta = 2\pi\lambda f(x,y) \tag{3.1}$$

$$(x,y)\in\Omega, \quad R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}, \quad \frac{1}{2}\max_\Omega R = 1, \quad f(x,y) \in H_1^{1-0}(\Omega)$$

$$k(t) = \int_0^\infty L(u)J_0(ut)du \tag{3.2}$$

Функция $L(u)$ обладает описанными выше свойствами, область Ω односвязна, а контур L области Ω имеет непрерывную кривизну.

Введя в рассмотрение гильбертово пространство $H(\Omega)$ с нормой

$$\|\varphi\|_H^2 = \frac{1}{\lambda}\iint_\Omega\iint_\Omega \varphi(x,y)\varphi(\xi,\eta)k\left(\frac{R}{\lambda}\right)dxdyd\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(\gamma\lambda)}{\gamma}|\Phi(\alpha,\beta)|^2 d\alpha d\beta \quad (\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}) \tag{3.3}$$

где $\Phi(\alpha, \beta)$ – двумерное преобразование Фурье функции $\varphi^*(x, y)$ ($\varphi^*(x, y) = \varphi(x, y)$ в Ω, $\varphi^*(x, y) = 0$ вне Ω), на основании теоремы Рисса можно показать, что решение ИУ (3.1), (3.2) в $H(\Omega)$ существует и единственно при любом $\lambda \in (0, \infty)$, причем оно имеет форму

$$\varphi(x,y) = \omega(x,y)[N(x,y)]^{-1/2}, \quad \omega(x,y) \in C(\Omega) \tag{3.4}$$

где $N(x, y) = 0$ – нормированное уравнение [12] контура L, $N(x, y) > 0$ в Ω. Кроме того, справедливо соотношение корректности типа (1.6).

На основании (1.3) для ядра (3.2) можно установить представление

$$k(t) = t^{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i^* t^{2i} + t\sum_{i=0}^{\infty} b_i^* t^{2i} + \ln t\sum_{i=0}^{\infty} c_i^* t^{2i} \tag{3.5}$$

где ряды равномерно сходятся при $t < \rho$, $\rho \leqslant \infty$. Подставляя (3.5) в (3.1), придем к выводу, что при достаточно больших значениях λ решение $\varphi(x, y)$ ИУ (3.1) будет иметь вид, отличающийся от (1.8) заменой $\varphi_{ij}(x)$ на $\varphi_{ij}(x, y)$, если для данной области Ω может быть найдено решение (хотя бы приближенное) более простого, нежели (3.1), ИУ

$$\iint_\Omega \frac{\varphi(\xi,\eta)}{R}d\xi d\eta = 2\pi g(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \quad g(x,y)\in H_1^{1-0}(\Omega) \tag{3.6}$$

Для практических целей в выражении для $\varphi(x, y)$ обычно можно ограничиться членами порядка λ^{-4}, при этом покрывается диапазон $\lambda \geqslant \sup(2, 2/\rho)$.

Случай малых λ для уравнения (3.1) непосредственно не может быть рассмотрен, ибо должен быть мал не сам параметр λ, а некоторый параметр μ ($\mu \geqslant \lambda$), связанный с геометрией области Ω. Пусть область Ω – выпуклая (случай невыпуклой области Ω более сложен и нужно воспользоваться результатами работы [2]) и a – минимальный радиус кривизны ее контура L. Тогда введем μ соотношением $\mu = \lambda/a$. Заметим, что $\mu = \lambda$ только в случае круговой области Ω.

Введем в рассмотрение области Ω_0 и Ω_ε, являющиеся геометрическим местом точек, лежащих в области Ω и отстоящих от ее контура по нормали соответственно не менее, чем на $a(1–0)$ и $a(1–\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. При малых значениях μ может быть построено вырожденное решение ИУ (3.1) в форме

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\lambda^3}\left\{\iint_\Omega f(\xi,\eta)l\left(\frac{R}{\lambda}\right)d\xi d\eta + O\left[\exp\left(-\frac{1-\varepsilon}{\mu}\gamma_2\right)\right]\right\} \tag{3.7}$$

$$(x,y)\in\Omega_\varepsilon, \quad l(t) = \int_0^\infty \frac{u^2}{L(u)}J_0(ut)du$$

Последний интеграл понимается в обобщенном смысле.

Для построения решения типа пограничного слоя в области $\Omega - \Omega_0$ перепишем ИУ

(3.1) в виде

$$\iint_{\Omega-\Omega_0} \varphi(\xi,\eta)k\left(\frac{R}{\lambda}\right)d\xi d\eta + \iint_{\Omega_0} \varphi(\xi,\eta)k\left(\frac{R}{\lambda}\right)d\xi d\eta = 2\pi\lambda f(x,y) \qquad (3.8)$$

и рассмотрим точки $(x, y) \in \Omega - \Omega_\varepsilon$. Тогда для последнего интеграла в (3.8) получим

$$\iint_{\Omega_0} \varphi(\xi,\eta)k\left(\frac{R}{\lambda}\right)d\xi d\eta = O\left[\frac{1}{\mu}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{\mu}\gamma_1\right)\right] \qquad (3.9)$$

Проведем из точки $A(x, y) \in \Omega - \Omega_0$ нормаль к контуру L. Пусть длина этой нормали n, а точка пересечения ее с контуром $B(x_1, y_1)$. Выберем на контуре L какую-либо точку $O(x_0, y_0)$ в качестве начала отсчета и измерим расстояние s между точками O и B по контуру L. Величины n и s примем за новые координаты точки A в криволинейной системе координат (n, s). При условии $-l/2 < s \leqslant l/2$ (l – периметр контура L) каждой паре чисел (x, y) в области $\Omega - \Omega_0$ будет соответствовать только одна пара чисел (n, s), и наоборот.

В системе координат (n, s) ИУ (3.8) при учете (3.9) запишем в виде

$$\int_0^{1/\mu} d\beta \int_{-k/\mu}^{k/\mu} \varphi(\beta,\gamma)k(r)d\gamma + O\left[\frac{1}{\mu^3}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{\mu}\gamma_1\right)\right] = \frac{2\pi}{\lambda} f(b,c) \qquad (3.10)$$

$$0 \leqslant b \leqslant 1/\mu, \quad |c| \leqslant k/\mu$$

$$b = n/\lambda, \quad c = s/\lambda, \quad r = \sqrt{(\beta-b)^2 + (\gamma-c)^2}, \quad k = l/(2a)$$

$$\varphi(\beta,\gamma) \equiv \varphi(\xi,\eta), \quad f(b,c) \equiv f(x,y)$$

Устремим теперь в ИУ (3.10) μ к нулю и получим следующее ИУ для определения решения типа пограничного слоя:

$$\int_0^{\infty} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\beta,\gamma)k(r)d\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} f(b,c) \quad (0 \leqslant b < \infty, \ |c| < \infty) \qquad (3.11)$$

ИУ (3.11) решается в замкнутом виде путем применения преобразования Фурье по c с последующим использованием метода Винера–Хопфа.

Введем относительную толщину пограничного слоя $H = b_0/\lambda$, где b_0 можно, например, определить из условия

$$\max_c \{|\varphi(b_0,c) - \varphi^*(b_0,c)||\varphi^*(b_0,c)|^{-1}\} = 0{,}025 \qquad (3.12)$$

причем $\varphi^*(b, c)$ – главная часть функции $\varphi(b, c)$ при $b \to \infty$, совпадающая с $\varphi(x, y)$ вида (3.7). Очевидно, пограничный слой должен полностью укладываться в области $\Omega - \Omega_0$, отсюда для диапазона изменения μ получим следующее ограничение: $\mu < H^{-1}$.

В заключение отметим, что асимптотические методы были успешно использованы и при исследовании ряда нелинейных задач механики со смешанными граничными условиями, например, можно отметить работу [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В.М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости // ПММ. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 672–683.
2. *Александров В.М.* Асимптотическое решение контактной задачи для тонкого упругого слоя // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 1. С. 61–73.
3. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.

4. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
5. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
6. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
7. *Александров В.М., Коваленко Е.В., Чебаков М.И. и др.* Статические и динамические смешанные задачи теории упругости. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1983. 263 с.
8. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
9. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 329 с.
10. *Александров В.М., Ромалис Б.Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
11. *Александров В.М.* Асимптотические методы в задачах вязкоупругости со смешанными граничными условиями // Математические методы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1986. С. 4–9.
12. *Рвачев В.Л.* Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 551 с.
13. *Александров В.М., Кудиш И.И.* Асимптотические методы в задаче Гриффитса // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 665–671.

Поступила в редакцию
19.III.1992

Москва