

УДК 539.3 : 534.1

© 1993 г. С.В. Сорокин

### АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХУРОВНЕВЫХ ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ГИДРОУПРУГОСТИ

Для двухуровневого варианта метода граничных интегральных уравнений применительно к анализу колебаний в акустической среде составных тонкостенных конструкций [1–4] в рамках плоской задачи проводится асимптотический анализ и упрощение уравнений в нескольких характерных диапазонах возбуждения. Полученные результаты сравниваются с результатами численного решения задачи.

Рассмотрим колебания пластины в условиях цилиндрического изгиба под действием нагрузки  $q(x, t)$ , не связанной с наличием акустической среды и являющейся источником вибрации. Зависимость внешней нагрузки  $q$  и всех других вводимых в рассмотрение функций от времени принята в виде  $e^{-i\omega t}$  и временной множитель опущен.

Граничное уравнение для контактного акустического давления записывается следующим образом [5, 6]:

$$p(x) = \frac{i}{2} \left( \frac{\omega l}{c} \right)^2 \frac{\rho_0}{\rho} \int_0^l H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x - \xi| \right) w(\xi) d\xi \quad (1)$$

Уравнение колебаний пластины имеет вид [5, 9]

$$w^{IV}(x) - \mu^4 w(x) = 12(1 - \nu^2) (l/h)^3 [q(x) + p(x)] \quad (2)$$

$$\mu^4 = 12(1 - \nu^2) \rho \omega^2 l^4 / (Eh^2)$$

Здесь  $h$  – толщина пластины,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль продольной упругости материала пластины,  $\rho$  – ее плотность,  $l$  – длина пластины (штрих означает производную по  $x$ ).

Граничные условия (по два в точках  $x = 0$  и  $x = l$ ) могут быть произвольными.

При применении метода граничных уравнений, кроме искомого состояния пластины, определенного уравнением (2) и граничными условиями, необходимо ввести в рассмотрение вспомогательное состояние. Выбор вспомогательного состояния в достаточной степени произволен и диктуется требованиями удобства и компактности решения. Наиболее простым является использование функции Грина, отвечающей сосредоточенному воздействию на бесконечную конструкцию [2]. В рассматриваемом случае такая функция должна быть решением уравнения (в безразмерном виде)

$$\partial^4 W(x, \xi) / \partial \xi^4 - \mu^4 W(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (3)$$

В методе граничных уравнений обычно в качестве фундаментальных используются решения, отвечающие отсутствию источников на бесконечности (удовлетворяющие принципу излучения). В данном случае, когда решение для бесконечной области используется лишь как фундаментальное при построении решения для пластины конечных размеров, удовлетворение принципу излучения не обязательно. Действительно, при помощи функции Грина для бесконечной пластины необходимо лишь удовлетворить неоднородным уравнениям в области. Удовлетворение краевым условиям

достигается за счет дополнительных однородных решений, обусловленных краевыми усилиями, причем суммарное решение независимо от выбора первой его части (решения, неоднородного в области) единственно. Это позволяет в качестве фундаментального решения использовать вещественную функцию

$$W(x, \xi) = -\frac{1}{4} \mu^{-3} [\sin(\mu |x - \xi|) + \exp(-\mu |x - \xi|)] \quad (4)$$

которая удовлетворяет неоднородному уравнению (3). Для задачи о колебаниях пластины в условиях цилиндрического изгиба граничные уравнения непосредственно следуют из формулировки теоремы Бетти [5]:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [M^0(x, \xi) w^h(\xi) + \rho h \omega^2 W(x, \xi) w(\xi)] d\xi = \\ & = \int_0^1 [M(\xi) \frac{\partial^2 W(x, \xi)}{\partial \xi^2} + \rho h \omega^2 w(\xi) W(x, \xi)] d\xi \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $D$  — цилиндрическая жесткость, функции  $M, w$  отвечают искомому состоянию пластины конечных размеров, а функции  $M^0, W$  — вспомогательному состоянию этой пластины, рассматриваемой как бесконечная.

Интегрируя (5) по частям и воспользовавшись формулами (3) и (4), получим следующее интегральное представление (формулу типа формулы Сомильяны в теории упругости):

$$\begin{aligned} w(x) = & 12(1-\nu^2) \left(\frac{l}{h}\right)^3 \int_0^1 [q(\xi) + \\ & + p(\xi, 0)] W(x, \xi) d\xi + [w''(\xi) \frac{\partial W(x, \xi)}{\partial \xi} - \\ & - w'''(\xi) W(x, \xi) - w'(\xi) \frac{\partial^2 W(x, \xi)}{\partial \xi^2} + \\ & + w(\xi) \frac{\partial^3 W(x, \xi)}{\partial \xi^3}] \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} \end{aligned} \quad (6)$$

Для построения решения уравнения колебаний пластины формулы (6) недостаточно — нужно располагать интегральным представлением для угла поворота [5]. Последнее: легко получить из (6) дифференцированием по координате точки наблюдения  $x$ :

$$\begin{aligned} w'(x) = & 12(1-\nu^2) \left(\frac{l}{h}\right)^3 \int_0^1 [q(\xi) + \\ & + p(\xi, 0)] \frac{\partial W(x, \xi)}{\partial x} d\xi + [w''(\xi) \frac{\partial^2 W(x, \xi)}{\partial x \partial \xi} - \\ & - w'''(\xi) \frac{\partial W(x, \xi)}{\partial x} - w'(\xi) \frac{\partial^3 W(x, \xi)}{\partial x \partial \xi^2} + \\ & + w(\xi) \frac{\partial^4 W(x, \xi)}{\partial x \partial \xi^3}] \Big|_{\xi=0}^{\xi=1} \end{aligned} \quad (7)$$

Если теперь в равенствах (6), (7) устремить точку наблюдения  $x$  на кромки  $\xi = 0$

и  $\xi = 1$ , получим четыре граничных уравнения относительно восьми алгебраических неизвестных:  $w(\xi)$ ,  $w'(\xi)$ ,  $w''(\xi)$ ,  $w'''(\xi)$ ;  $\xi = 0; 1$  и неизвестного контактного давления  $p(\xi, 0)$ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} w(0) - \frac{1}{4} \alpha_1 w(1) + \frac{1}{4\mu} w'(0) + \frac{1}{4\mu} w'(1) + \\
 & + \frac{1}{4\mu^3} w'''(0) - \frac{1}{4\mu^3} \alpha_3 w'''(1) + \frac{1}{4\mu^2} \alpha_4 w''(1) = \\
 & = - \frac{3(1-\nu^2)}{\mu^3} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \int_0^1 [q(\xi) + p(\xi, 0)] [\sin \mu \xi + \exp(-\mu \xi)] d\xi \\
 & - \frac{1}{4} \alpha_1 w(0) + \frac{1}{2} w(1) - \frac{1}{4\mu} \alpha_2 w'(0) - \frac{1}{4\mu} w'(1) + \\
 & + \frac{1}{4\mu^3} \alpha_3 w'''(0) - \frac{1}{4\mu^3} w'''(1) + \frac{1}{4\mu^2} \alpha_4 w''(0) = \\
 & = - \frac{3(1-\nu^2)}{\mu^3} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \int_0^1 [q(\xi) + p(\xi, 0)] [\sin \mu(1-\xi) + \exp(-\mu(1-\xi))] d\xi \\
 & \frac{1}{2} w'(0) - \frac{1}{4} \alpha_1 w'(1) + \frac{\mu}{4} w(0) - \\
 & - \frac{\mu}{4} \alpha_3 w(1) + \frac{1}{4\mu^2} \alpha_4 w'''(1) + \frac{1}{4\mu} w''(0) + \frac{1}{4\mu} \alpha_2 w''(1) = \\
 & = - \frac{3(1-\nu^2)}{\mu^2} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \int_0^1 [q(\xi) + p(\xi, 0)] [\cos \mu \xi - \exp(-\mu \xi)] d\xi \\
 & - \frac{1}{4} \alpha_1 w'(0) + \frac{1}{2} w'(1) + \frac{\mu}{4} \alpha_3 w(0) - \\
 & - \frac{\mu}{4} w(1) + \frac{1}{4\mu^2} \alpha_4 w'''(0) - \frac{1}{4\mu} \alpha_2 w''(0) - \\
 & - \frac{1}{4\mu} w''(1) = - \frac{3(1-\nu^2)}{\mu^2} \left(\frac{l}{h}\right)^3 \int_0^1 [q(\xi) + \\
 & + p(\xi, 0)] [\cos \mu(1-\xi) - \exp(-\mu(1-\xi))] d\xi
 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = \beta_1 + \beta_3, \quad \alpha_2 = \beta_2 - \beta_3, \quad \alpha_3 = \beta_2 + \beta_3, \quad \alpha_4 = \beta_1 - \beta_3 \quad (8)$$

$$\beta_1 = \cos \mu, \quad \beta_2 = \sin \mu, \quad \beta_3 = \exp(-\mu)$$

Система граничных уравнений (8) замыкается четырьмя граничными условиями и интегральным уравнением относительно контактного давления, которое получается

в результате подстановки формулы (6) в (1):

$$\begin{aligned}
 p(x, 0) = & \frac{i}{2} \left( \frac{\omega l}{c} \right)^2 \frac{\rho_0}{\rho} \left\{ 12(1-\nu^2) \left( \frac{l}{h} \right)^3 \int_0^1 \int_0^1 \times \right. \\
 & \times H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x-\xi| \right) W(\xi, u) [q(u) + p(u, 0)] d\xi du + \\
 & + [w''(u) \int_0^1 H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x-\xi| \right) \frac{\partial W(\xi, u)}{\partial u} d\xi - w'''(u) \times \\
 & \times \int_0^1 H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x-\xi| \right) W(\xi, u) d\xi - w'(u) \times \\
 & \times \int_0^1 H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x-\xi| \right) \frac{\partial^2 W(\xi, u)}{\partial u^2} d\xi + w(u) \int_0^1 H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x-\xi| \right) \times \\
 & \left. \times \frac{\partial^3 W(\xi, u)}{\partial u^3} d\xi \right|_{u=0}^{u=1} \} \quad (9)
 \end{aligned}$$

Соотношения (8), (9) представляют собой систему разрешающих уравнений двух-уровневого метода граничных интегральных уравнений применительно к плоской задаче о колебаниях пластины конечной длины, помещенной в жесткий экран и контактирующей с акустической средой. Простейший путь решения этой задачи состоит в кусочно-постоянной аппроксимации искомой функции  $p(x, 0)$  и численного обращения системы линейных алгебраических уравнений порядка  $N + 8$ , где  $N$  — число участков по длине пластины, в пределах которых амплитуды  $p_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  считаются постоянными.

Граничные уравнения первого уровня (уравнения колебаний пластины (8)) являются алгебраическими относительно краевых обобщенных усилий и перемещений, а также относительно интегралов от заданной внешней  $q(\xi)$  и реактивной акустической  $p(\xi, 0)$  нагрузок.

При этом для каждого конкретного способа закрепления концов пластины неизвестными остаются лишь четыре краевых усилия и (или) перемещения. Последнее дает возможность аналитически решить систему уравнений первого уровня и свести задачу к единственному интегральному уравнению (9) с исключенными из него параметрами изгиба пластины на кромках. Получение такого уравнения в точном аналитическом виде позволяет провести детальный асимптотический анализ взаимодействия пластины конечной длины с акустической средой в любых диапазонах возбуждения, в том числе и на частотах парциальных резонансов (резонансных частотах колебаний пластины в вакууме).

Для примера рассмотрим свободно опертую пластину. В силу симметрии закрепления движение пластины при действии произвольной нагрузки представляет собой сумму симметричной и кососимметричной относительно центра пластины компонент. Система уравнений (8) при этом распадается на две соответствующие системы второго порядка.

Подставляя решение уравнений симметричных относительно центра пластины коле-

баний в (9), получим

$$\begin{aligned}
 p(x, 0) + \frac{i}{8} \frac{\rho_0}{\rho} \mu \frac{l}{h} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 [q(u) + p(u, 0)] H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x - \xi| \right) \times \right. \\
 \times [\sin \mu |u - \xi| + \exp(-\mu |u - \xi|)] du d\xi - \frac{1}{\sin \mu} \int_0^1 [q(u) + \\
 + p(u, 0)] \sin \mu u du \int_0^1 H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x - \xi| \right) [\sin \mu \xi + \sin \mu (1 - \xi)] d\xi - \\
 - \frac{1}{1 + \exp(-\mu)} \int_0^1 [q(u) + p(u, 0)] \exp(-\mu u) du \int_0^1 H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x - \xi| \right) \times \\
 \left. \times [\exp(-\mu \xi) + \exp(-\mu (1 - \xi))] d\xi \right\} = 0 \quad (10)
 \end{aligned}$$

Уравнение (10) определяет акустическое давление на поверхности свободноопертой пластины при действии произвольной симметричной нагрузки. Уравнение, которое описывает кососимметричные колебания пластины, имеет такую же структуру, как (10), поэтому ограничимся асимптотическим анализом последнего.

Если не учитывать взаимосвязь амплитуд вибрации пластины с величинами акустического давления на ее поверхности (опустить  $p(u, 0)$  в уравнении (10)), это уравнение превращается в простую расчетную формулу:

$$\begin{aligned}
 p(x, 0) = - \frac{i}{8} \frac{\rho_0}{\rho} \mu \frac{l}{h} \left\{ \int_0^1 \int_0^1 q(u) H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x - \xi| \right) \times \right. \\
 \times [\sin \mu |u - \xi| + \exp(-\mu |u - \xi|)] du d\xi - \frac{1}{\sin \mu} \int_0^1 q(u) \sin \mu u du \times \\
 \times \int_0^1 H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x - \xi| \right) [\sin \mu \xi + \sin \mu (1 - \xi)] d\xi - \\
 - \frac{1}{1 + \exp(-\mu)} \int_0^1 q(u) \exp(-\mu u) du \times \\
 \left. \times \int_0^1 H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x - \xi| \right) [\exp(-\mu \xi) + \exp(-\mu (1 - \xi))] d\xi \right\} \quad (11)
 \end{aligned}$$

Первый интеграл определяет давление, создающееся при колебаниях рассматриваемого участка неограниченной пластины, а второй и третий отвечают краевому эффекту — вкладу в суммарное давление углов поворота на концах пластины и опорных реакций.

Учет связанности задачи приводит (при кусочно-постоянной аппроксимации контактного давления) к тому, что матрица системы алгебраических уравнений относительно амплитуд  $p_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) перестает быть диагональной.

Внедиагональные члены, появляющиеся в этой матрице при использовании (10) также представляют собой сумму двух компонент: соответствующей взаимодействию с акустической средой рассматриваемого участка неограниченной пластины и интегра-

лов краевого эффекта:

$$I_1 = \frac{i}{8} \frac{\rho_0}{\rho} \mu \frac{l}{h} \int_0^1 \int_0^1 p(u, 0) H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x - \xi| \right) \times \\ \times [\sin \mu |u - \xi| + \exp(-\mu |u - \xi|)] du d\xi \quad (12)$$

$$I_2 = - \frac{i}{8} \frac{\rho_0}{\rho} \mu \frac{l}{h} \left\{ \frac{1}{\sin \mu} \int_0^1 p(u, 0) \sin \mu u du \int_0^1 H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x - \xi| \right) \times \right. \\ \times [\sin \mu \xi + \sin \mu (1 - \xi)] d\xi + \frac{1}{1 + \exp(-\mu)} \int_0^1 p(u, 0) \times \\ \times \exp(-\mu u) du \int_0^1 H_0^{(1)} \left( \frac{\omega l}{c_0} |x - \xi| \right) \times \\ \left. \times [\exp(-\mu \xi) + \exp(-\mu (1 - \xi))] d\xi \right\} \quad (13)$$

Величины этих слагаемых пропорциональны коэффициенту  $k = \frac{1}{8} (\rho_0/\rho)(l/h)\mu$ . Учитывая, что для пары сталь — вода  $\nu = 0,3$ ,  $\rho_0/\rho = 0,128$ , имеем  $k \sim 0,029 (l/h)^{3/2}$ . Таким образом, при  $l/h = 100$  имеем  $k = 29 \sqrt{\omega l/c}$ . Хотя зависимость величины (12), (13) от характерных параметров  $l/h$  и  $\omega l/c$  является более сложной (аргументы подынтегральных функций также содержат эти величины), такая оценка дает основание полагать, что расчет контактного давления по простейшей формуле (11) может во многих случаях приводить к большим погрешностям.

В интегралах (12), (13) выделены явным образом составляющие, соответствующие однородной и неоднородной волнам, существующим в бесконечной пластине, что позволяет оценивать их вклады в каждом конкретном случае.

В качестве характерных частот, масштабирующих деление всего диапазона возбуждения на основные части, выберем первую резонансную частоту колебаний изолированной (сухой) пластины  $\omega_r$ , при которой  $\mu_r^4 = \pi^4$  и так называемую частоту совпадения [7]  $\omega_g$ , при которой длина пластины равна длине волны в акустической среде:

$$\frac{\omega_r l}{c} = \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{l}\right)^2; \quad \frac{\omega_g l}{c} = 12(1-\nu^2) \left(\frac{c_0}{c}\right)^2 \left(\frac{l}{h}\right)$$

Таким образом, можно выделить четыре основных частотных диапазона:

1. предельно низкие частоты:

$$\omega l/c < (h/l)^2, \quad \mu < [12(1-\nu^2)]^{1/4} (h/l)^{1/2}$$

2) низкие частоты:

$$\omega l/c < h/l, \quad \mu < 1$$

3) средние частоты:

$$\omega l/c \sim 1, \quad \mu \sim (l/h)^{1/2}$$

4) высокие частоты:

$$\omega l/c > (l/h), \quad \mu > l/h$$

В диапазоне предельно низких частот функция Ганкеля может быть заменена своей

двучленной асимптотикой

$$H_0^{(1)}\left(\frac{\omega l}{c_0} |x - \xi|\right) = 1 + \frac{2i\gamma}{\pi} + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\omega l}{c_0} + \frac{2i}{\pi} \ln |x - \xi| \quad (14)$$

а функции, представляющие фундаментальное решение уравнения колебаний пластины, имеют вид

$$\sin \mu x = \mu x, \quad \exp(-\mu x) = 1 - \mu x \quad (15)$$

Подстановка формул (14), (15) в уравнение (11) приводит к точному равенству:  $p(x, 0) = 0$ . Это означает, что в рассматриваемом диапазоне акустическая среда не взаимодействует с пластиной при ее колебаниях: нагружение пластины является квазистатическим.

В низкочастотном диапазоне по-прежнему допустимо использование представления (14), а при описании колебаний пластины нужно удерживать квадратичные члены разложений (15).

Если проинтегрировать уравнение (11) по длине пластины, можно получить алгебраическое уравнение, связывающее интегралы

$$\int_0^1 p(u, 0) du \quad \text{и} \quad \int_0^1 p(u, 0) u^2 du$$

с аналогичными интегралами от внешней нагрузки. Второе уравнение такого же вида получится после такого же интегрирования уравнения (11), домноженного на  $x^2$ .

Таким образом, задача сводится к решению системы линейных уравнений второго порядка, коэффициенты которой вычислены в явном виде, но достаточно громоздки и здесь не приводятся. Подстановка решения этой системы в формулу (10) превращает последнюю в асимптотически точное выражение значений контактного акустического давления на поверхности пластины через внешнюю нагрузку. В указанном частотном диапазоне давление в жидкости определяется не конкретным способом приложения внешней нагрузки, а ее интегральными характеристиками — равнодействующей и вторым центральным моментом.

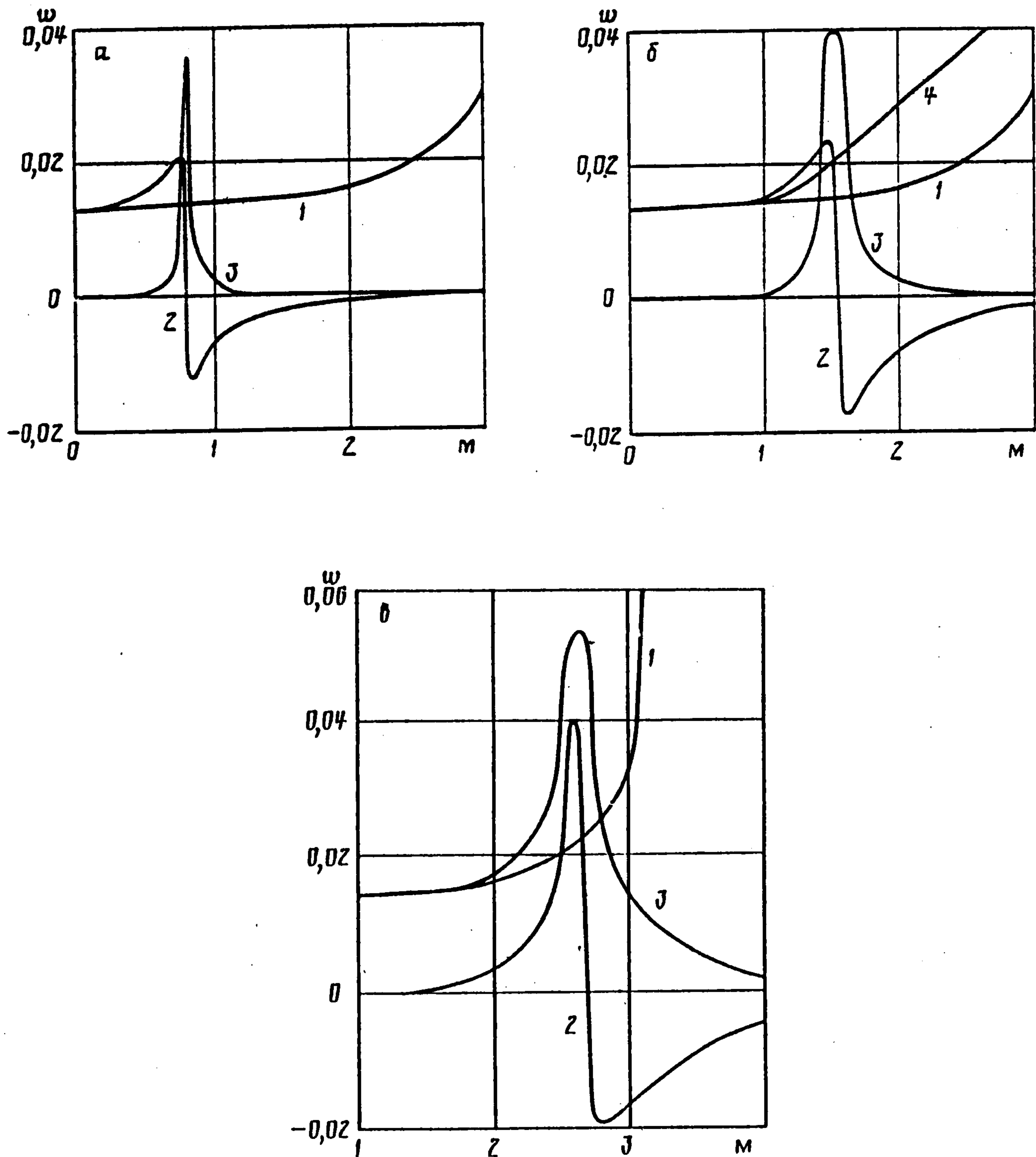
Использование этой формулы может иметь большое практическое значение, так как рассматриваемый диапазон близок к частоте, соответствующей максимуму мнимой части амплитуды перемещения и, следовательно, мощности излучения — частоте резонансных колебаний пластины в жидкости.

Удержание следующих членов в разложении фундаментального решения  $W(x, \xi)$  при рассмотрении более высоких частот приводит к тому, что свертка

$$\int_0^1 H_0^{(1)}\left(\frac{\omega l}{c_0} |x - \xi|\right) W(|\xi - u|) d\xi$$

оказывается трансцендентной функцией не только аргументов  $x$  и  $u$ , но и расстояния  $|x - u|$ . Это не позволяет представить ее в виде суммы произведений  $f_1(x)f_2(u)$  и избежать решения интегрального уравнения.

В диапазоне средних частот использование асимптотических представлений фундаментальных решений невозможно. Единственным путем решения задачи оказывается кусочная аппроксимация контактного давления и численное решение уравнения (10). В этом частотном диапазоне может находиться (для достаточно коротких пластин)



Фиг. 1 а, б, в

первый сухой резонанс. Расчет при  $\mu = \pi$  с использованием (10) невозможен из-за появления нуля в знаменателе второго интегрального члена. Однако решение полной системы (8), (9) на этой частоте не вызывает затруднений.

В высокочастотной зоне возможно использование следующей асимптотики функции Гинкеля [8]:

$$H_0^{(1)}\left(\frac{\omega l}{c_0} |x-\xi|\right) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{(\omega l/c_0)} \sqrt{|x-\xi|}} \times \exp\left[\frac{\omega l}{c_0} |x-\xi| - \frac{\pi}{4}\right] i \quad (16)$$

Свертка (16) с теми слагаемыми в (12), (13), которые представляют собой однородные волны, выражается через интегралы Френеля. Учет неоднородной волны можно выполнить приближенно, воспользовавшись тем, что в рассматриваемом диапазоне

$\mu \gg 1$  и

$$\exp(-\mu |\xi - u|) = 1 - \mu |\xi - u| \quad (17)$$

При этом следует ограничить область интегрирования в (12), (13) участком  $\mu |\xi - u| < 1$ , в котором двучленное представление (17) положительно. Использование такого подхода позволяет представить вклад неоднородной волны — так же, как однородной, в виде интегралов Френеля.

Вычисления показали, что использование такой упрощенной модели эффективно лишь на достаточно высоких частотах, при которых допустимость неучета сдвигов и инерции вращения в пластине является спорной. Поскольку в статье используется фундаментальное решение (4) для пластины в рамках теории Кирхгофа, подробный анализ колебаний в жидкости в высокочастотном диапазоне возбуждения не проводился.

На фиг. 1, а-в представлены графики зависимости амплитуды колебаний пластины посередине пролета  $w(l/2)$  от частотного параметра  $\mu$  при  $h/l = 0,001; 0,01; 0,1$  при действии равномерно распределенной нагрузки. На всех графиках кривая 1 отвечает колебаниям в вакууме, кривая 2 представляет вещественную, а кривая 3 — мнимую части амплитуды колебаний в жидкости. Расчеты выполнены в низкочастотном диапазоне и показывают прохождение пластиной первого жидкостного резонанса. Этот резонанс фиксируется сменой знака вещественной части и максимумом мнимой части амплитуды колебаний, а также максимумом мощности излучения. Увеличение относительной толщины пластины приводит к расширению интервала частот, в котором существенна величина мнимой части амплитуды колебаний (а следовательно, и излучение в жидкость). Одновременно увеличивается размах вещественной части амплитуды при прохождении резонанса. Кроме того, с увеличением толщины расширяется диапазон частот, в котором допустимо использование формулы (11) традиционного акустического расчета контактного давления: обратная связь амплитуд колебаний пластины и контактного давления на ее поверхности незначительна.

На фиг. 1, б кривая 4 отвечает решению в низкочастотной асимптотике. Погрешность такого расчета остается небольшой даже в тех случаях, когда частота заметно больше верхней границы диапазона, для которого построено асимптотическое решение.

При возбуждении колебаний сосредоточенной посередине пролета силой амплитудно-частотные характеристики не имеют принципиальных отличий от представленных на фиг. 1.

Значения частотного параметра  $(\omega l/c) \times 10^3$ , соответствующие трем жидкостным резонансам, полученные при использовании предлагаемого варианта метода граничных уравнений, таковы: 21,6 (19,4 [4], 21,7 [9]), 202 (192 [4], 204 [9]), 527 (498 [4], 527 [9]). В скобках приведены значения, полученные разными численными методами [4, 9].

Анализ структуры системы уравнений, которая получается из (11) в результате кусочно-постоянной аппроксимации контактного давления, позволяет сделать следующие выводы.

В низкочастотном диапазоне пренебрежение влиянием краев пластины приводит к существенным ошибкам при определении контактного акустического давления: при совместном учете поправок (12) и (13) внедиагональные члены матрицы имеют порядок  $10^{-3}$ , в то время как по отдельности каждая вносит вклад порядка  $10^{-1}$ .

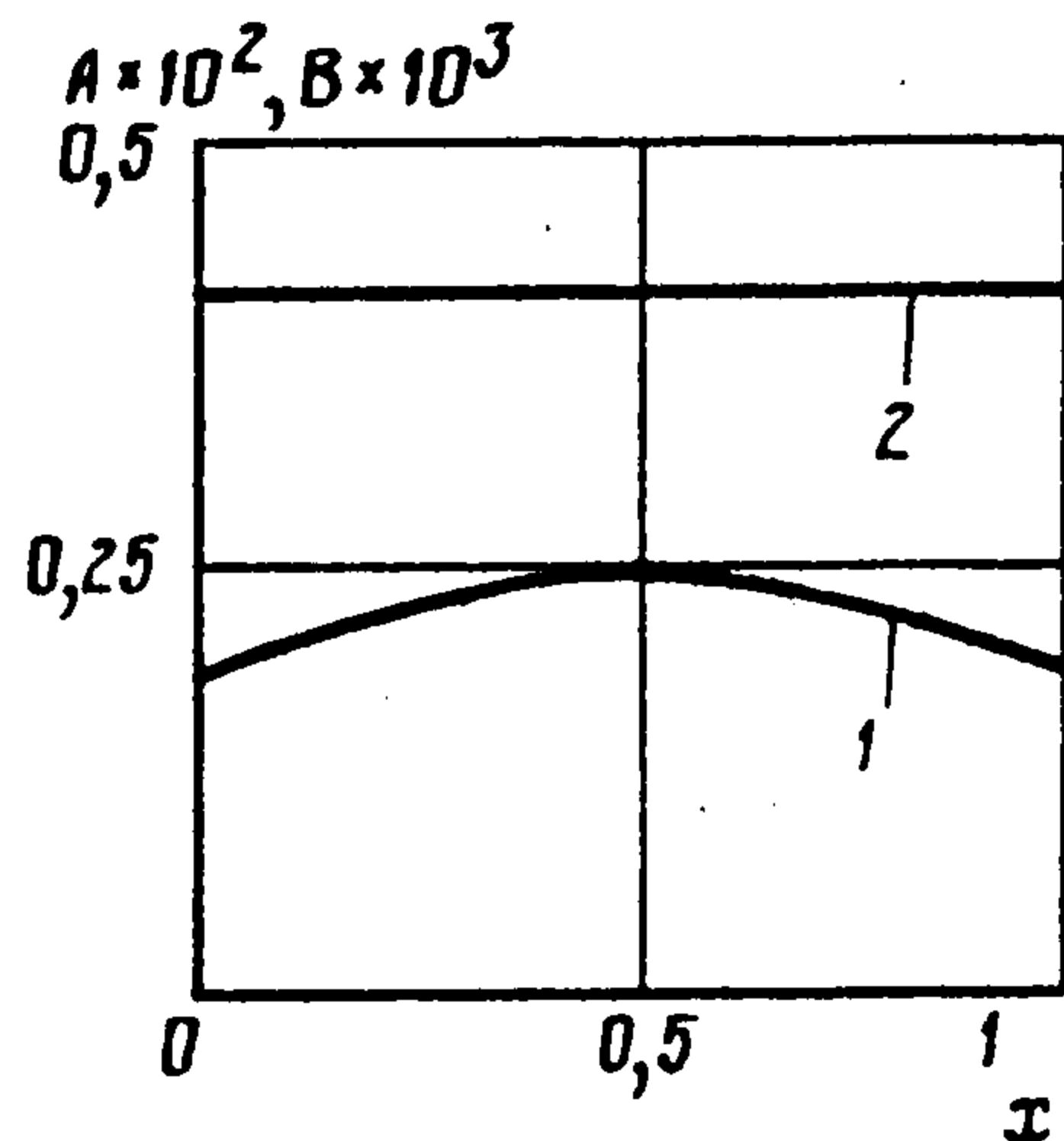
При частотах, близких к резонансному возбуждению, влияние акустической среды становится настолько большим, что величина поправок (12) и (13) превосходит величину диагональных членов. При этом обе поправки играют одинаково важную роль и ни одна из них не может быть опущена.

При средних частотах (выше первого сухого резонанса) влияние среды продолжает быть существенным, однако оно в основном определяется поправкой (12), а интегралы краевого эффекта (13) могут быть опущены. Этот вывод остается справедливым и при более высоких частотах.

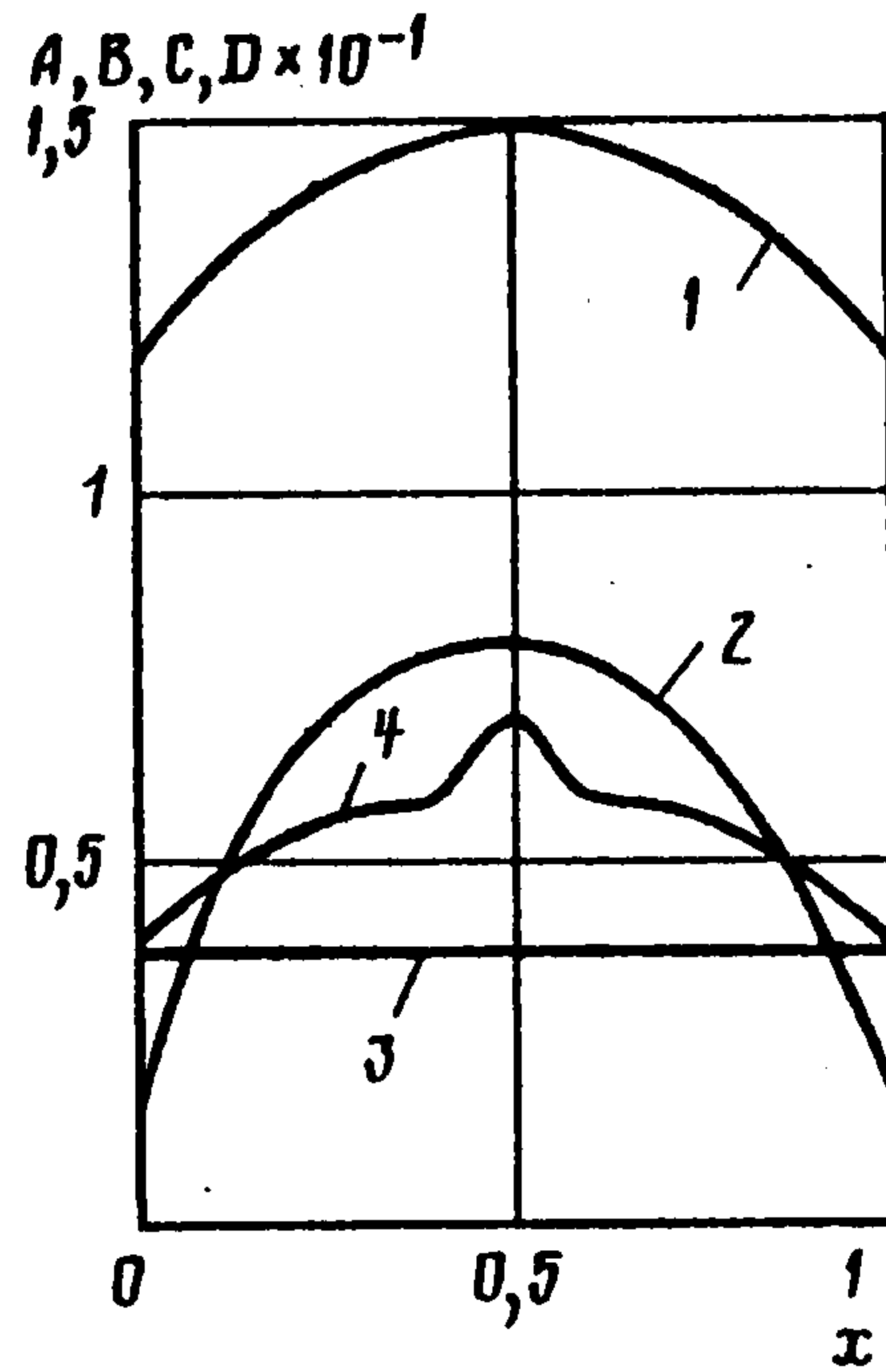
Перечисленные выводы не связаны с тем, какая нагрузка приложена к пластине, так как они сделаны на основе анализа левой части уравнения (11).

Анализ перераспределения давления по поверхности пластины, контактирующей с акустической средой, проведен в двух наиболее характерных случаях возбуждения колебаний: сосредоточенной силой, приложенной посередине пролета, и равномерно распределенной нагрузкой. При этом сопоставляются два варианта расчета: акустическое приближение, при котором используется формула (11) и гидроупругое решение, отвечающее точной формулировке контактной задачи.

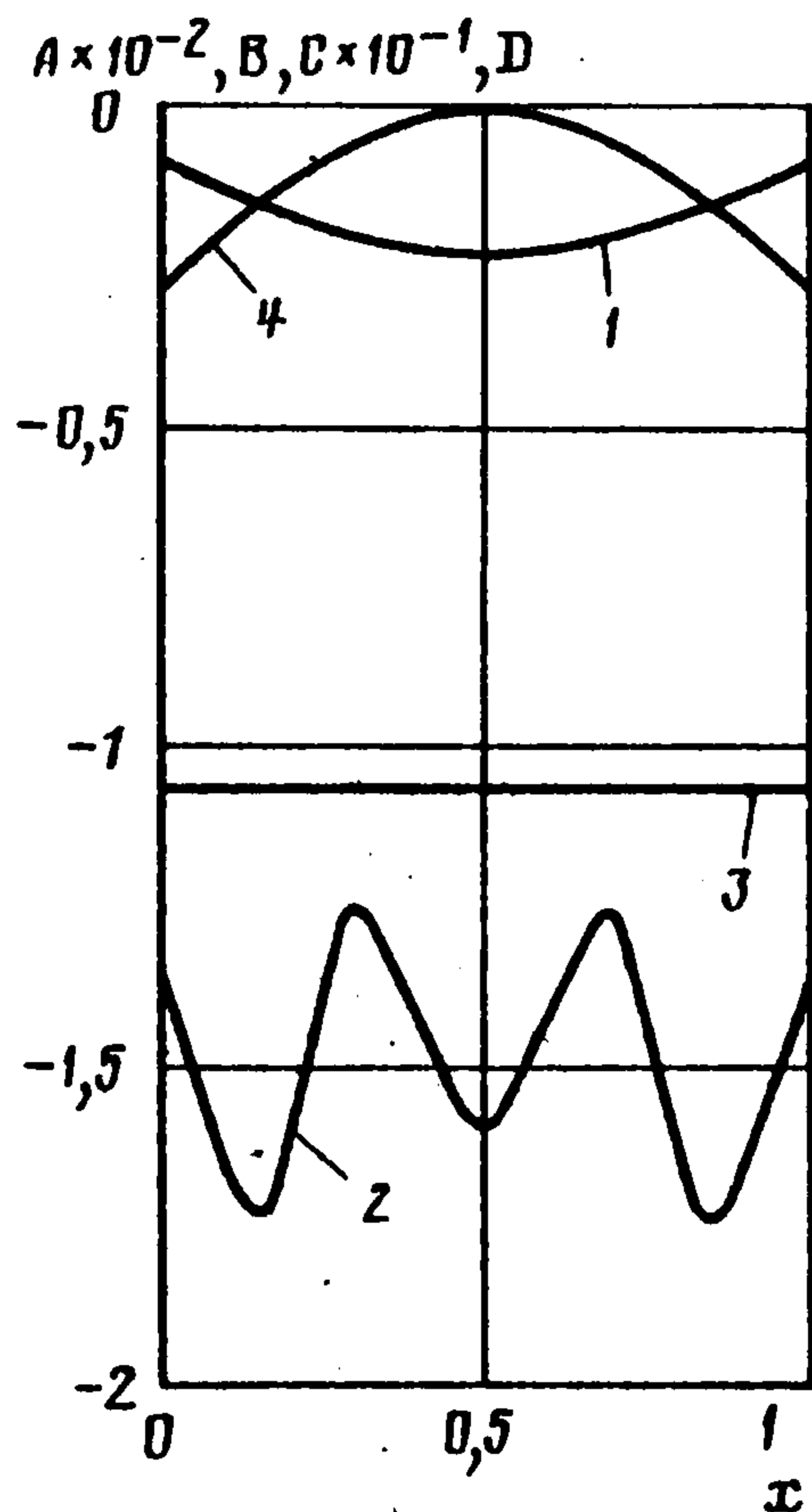
На фиг. 2 представлено распределение действительной  $A$  и мнимой  $B$  (кривые 1 и 2) частей амплитуд контактного давления при действии единичной сосредоточенной силы ( $\mu = 0,266$ ). Эти кривые имеют один и тот же вид при использовании акустической и гидроупругой постановок,



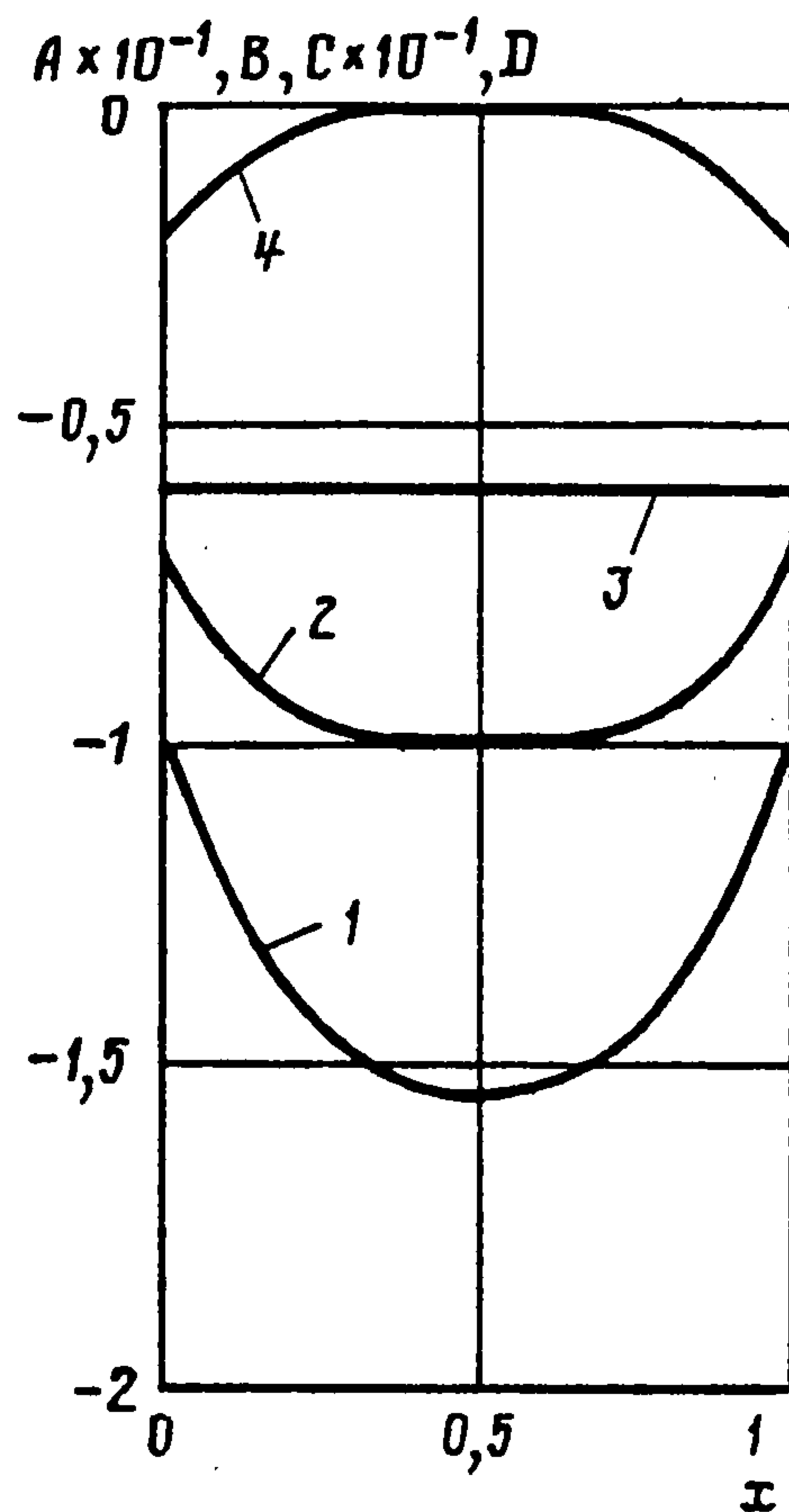
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

что обусловлено несвязанностью задачи определения амплитуд вибрации. При этом сосредоточенная сила перераспределяется достаточно равномерно по длине пластины.

На фиг. 3 представлено распределение давления при действии сосредоточенной силы на частоте  $\mu = 1,456$ , близкой к первому жидкостному резонансу. Аналогичные кривые при  $\mu = 4,729$  построены на фиг. 4. Кривые фиг. 5 относятся к возбуждению колебаний равномерно распределенной нагрузкой единичной интенсивности на той же частоте  $\mu = 4,729$ . На всех графиках фиг. 3–5 кривые A (1) соответствуют вещественной части давления в акустическом приближении, а кривые B (2) отвечают вещественной части давления при гидроупругой формулировке задачи. Мнимые части представлены соответственно кривыми C (3) и D (4).

Видно, что использование акустического приближения недопустимо, так как это приводит к очень большим ошибкам в определении контактного давления, которое достаточно сложным образом распределено на поверхности пластины, особенно при возбуждении на средних частотах ( $\mu = 4,729$ ). Вещественная часть оказывается осциллирующей, а мнимая часть локализована вблизи краев пластины (см. фиг. 4). При действии равномерной внешней нагрузки распределение контакт-

ного давления более равномерно. При этом обращает на себя внимание почти полная компенсация внешней нагрузки в средней части пластины (кривая 2) и локализация мнимой части давления в окрестности краев пластины (кривая 4).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Слепян Л.И., Сорокин С.В. Метод граничных интегральных уравнений в гидроупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 166–176.
2. Слепян Л.И., Сорокин С.В. Система граничных интегральных уравнений динамики составных тонкостенных конструкций, взаимодействующих с жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 4. С. 113–121.
3. Сорокин С.В. Колебания соосных цилиндрических оболочек конечной длины в акустической среде. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Гос. ун-т, 1990. С. 79–84.
4. Сорокин С.В. Применение методов ортогональной прогонки и граничных интегральных уравнений к расчету гидроупругих колебаний пластин // Некоторые проблемы механики судовых конструкций. Л.: Кораблестроит. ин-та. 1988. С. 67–73.
5. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
6. Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989. 301 с.
7. Crighton. D.G., Innes D. Structures under heavy fluid loading // Proc. Roy. Soc. London Ser. A. 312. 1984. N 1520–1521. P. 295–341.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами // Под ред. Абрамовица М., Стегуна И. М.: Наука, 1979. 830 с.
9. Голдванов В.А., Попов А.Л., Чернышев Г.И. О колебаниях ограниченной пластины в жидкости // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 3. С. 436–442.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию  
18.VIII.1991