УДК 539.3

© 1993 г. Ю.Д. Каплунов, И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Производится асимптотическое интегрирование трехмерных динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек. Обсуждаются особенности асимптотических свойств напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки в задачах динамики. Выводятся предельные двумерные системы уравнений.

Несмотря на значительное число работ ([1–3] и др.), посвященных применению асимптотических методов к задачам динамики оболочек в двумерной постановке, асимптотический вывод двумерных динамических уравнений теории оболочек из трехмерных уравнений теории уругости не был осуществлен. Рассматривались лишь [4, 5] интегралы динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек.

В силу существенного различия асимптотических свойств НДС оболочки в динамике и статике динамический случай требует специального рассмотрения и не сводится к формальному учету инерционных членов. Кроме того, изучение асимптотических законов изменения параметров НДС оболочки по толщине имеет важное значение для динамических задач, в которых требуется доказать существование областей (или интервалов) согласования решений, полученных исходя из двумерной теории оболочек и теории пограничного слоя [3, 4].

1. Уравнения трехмерной теории упругости. Рассмотрим упругую тонкую оболочку с относительной полутолщиной $\eta = h/R$ ($2h$ – толщина оболочки, R – характерный радиус кривизны ее срединной поверхности).

Динамические уравнения теории упругости, описывающие движение оболочки как трехмерного упругого тела, возьмем в виде [6]

$$L_i + \left(1+\eta\frac{\zeta}{R_i^*}\right)^{-1}\frac{1}{R\eta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_i^*}\right)^2\tau_{i3}\right] - \left(1+\eta\frac{\zeta}{R_i^*}\right)\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_j}\right)\rho\left(\frac{c_s\eta^{-a}}{R}\right)^2\frac{\partial^2 v_i}{\partial\tau^2} = 0$$

$$-L + F + \frac{1}{R\eta}\frac{\partial\tau_3}{\partial\zeta} - \left(1+\eta\frac{\zeta}{R_1}\right)\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_2^*}\right)\rho\left(\frac{c_s\eta^{-a}}{R}\right)^2\frac{\partial^2 v_3}{\partial\tau^2} = 0$$

$$E\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_j^*}\right)e_i = \left(1+\eta\frac{\zeta}{R_i^*}\right)\tau_i - \nu\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_j^*}\right)\tau_j - \nu\tau_3 \tag{1.1}$$

$$\frac{E}{R\eta}\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_1^*}\right)\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_2^*}\right)\frac{\partial v_3}{\partial\zeta} = \tau_3 - \nu\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_1^*}\right)\tau_1 - \nu\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_2^*}\right)\tau_2$$

$$\frac{E}{R\eta}\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_i^*}\right)\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_j^*}\right)\frac{\partial v_i}{\partial\zeta} + E\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_j^*}\right)g_i = 2(1+\nu)\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_j^*}\right)\tau_{i3}$$

$$E\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_i^*}\right)m_i + E\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_j^*}\right)m_j = 2(1+\nu)\left(1+\eta\frac{\zeta}{R_j^*}\right)\tau_{ij}$$

$$L_i = \frac{\eta^{-q}}{R}\left[\frac{1}{A_i}\frac{\partial \tau_i}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \xi_j} + \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \xi_{i0}}(\tau_i - \tau_j) + \right.$$

$$\left. + \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_{j0}}(\tau_{ij} + \tau_{ji})\right],\ L = \frac{1}{R}\left(\frac{\tau_1}{R_1^*} + \frac{\tau_2}{R_2^*}\right),\ F = \frac{\eta^{-q}}{R}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial \tau_{13}}{\partial \xi_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \tau_{23}}{\partial \xi_2} + \frac{\eta^q}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \xi_{10}}\tau_{13} + \frac{\eta^q}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \xi_{20}}\tau_{23}\right) \tag{1.2}$$

$$e_i = \frac{\eta^{-q}}{R}\left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_i}{\partial \xi_i} + \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_{j0}}v_j + \eta^q\frac{v_3}{R_i^*}\right)$$

$$m_i = \frac{\eta^{-q}}{R}\left(\frac{1}{A_j}\frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} - \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \xi_{i0}}v_j\right),\ g_i = \frac{\eta^{-q}}{R}\left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_3}{\partial \xi_i} - \eta^q\frac{v_i}{R_i^*}\right)$$

$$\xi_{i0} = \eta^q\xi_i,\ R_i^* = R_i/R$$

$$\tau_i = \left(1 + \eta\frac{\zeta}{R_j^*}\right)\sigma_{ii},\ \tau_{ij} = \left(1 + \eta\frac{\zeta}{R_i^*}\right)\sigma_{ij}$$

$$\tau_{i3} = \tau_{3i} = \left(1 + \eta\frac{\zeta}{R_j^*}\right)\sigma_{i3},\ \tau_3 = \left(1 + \eta\frac{\zeta}{R_1^*}\right)\left(1 + \eta\frac{\zeta}{R_2^*}\right)\sigma_{33}$$

Здесь $i \neq j = 1, 2$, σ_{kl} $(k, l = 1, 2, 3)$ – напряжения, v_m $(m = 1, 2, 3)$ – перемещения, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала оболочки, A_k, R_m – коэффициенты первой квадратичной формы и главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки $\zeta = 0$, q – показатель изменяемости НДС оболочки, a – показатель динамичности. Безразмерные переменные ξ_i, ζ, τ связаны со своими размерными аналогами α_k, t (α_i – параметры линий кривизны на срединной поверхности, α_3 – расстояние, отсчитываемое по нормали от срединной поверхности, t – время) следующими масштабными соотношениями:

$$\alpha_i = R\eta^q\xi_i,\ \alpha_3 = R\eta\zeta,\ t = Rc_s^{-1}\eta^a\tau,\ c_s = \sqrt{E/\rho} \tag{1.3}$$

Считается, что дифференцирование по безразмерным переменным не меняет асимптотического порядка исходных величин, а показатели изменяемости и динамичности удовлетворяют неравенствам

$$q < 1,\ a < 1 \tag{1.4}$$

Эти неравенства ограничивают длину рисунка деформации и характерный временной масштаб изучаемых процессов и являются необходимым условием применения любой двумерной теории оболочек.

Будем считать, что лицевые поверхности оболочки свободны от внешних нагрузок, т.е.

$$\tau_{3i}(\xi_1, \xi_2, \pm 1) = \tau_3(\xi_1, \xi_2, \pm 1) = 0 \tag{1.5}$$

и сосредоточим внимание на двух наиболее важных для приложений случаях: $q = a$ и $q = (1 + a)/2$ $(a \geqslant 0)$. Ниже будет показано, что в первый случай укладываются безмоментные $(a = 0)$ и плоскостные $(a > 0)$ интегралы динамических уравнений теории упругости, а во второй – изгибно-плоскостные $(a = 0)$ и изгибные интегралы $(a > 0)$. Для безмоментных интегралов $v_3 \sim v_i$, для плоскостных интегралов $v_i \gg v_3$, для изгибных и изгибно-плоскостных интегралов $v_3 \gg v_i$.

2. Асимптотическое интегрирование в случае $q = a$. Асимптотику НДС оболочки возь-

мем в виде

$$
\begin{aligned}
&v_i = R\eta^q(v_i^0 + \eta v_i^1), v_3 = R\eta(v_3^0 + \eta^{2q-1}v_3^1)\\
&\tau_i = E(\tau_i^0 + \eta\tau_i^1), \tau_{ij} = E(\tau_{ij}^0 + \eta\tau_{ij}^1)\\
&\tau_{i3} = E\eta^{3-3q}(\tau_{i3}^0 + \eta^{2q-1}\tau_{i3}^1), \ \tau_3 = E\eta^{2-2q}(\tau_3^0 + \eta\tau_3^1)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Здесь считается, что все величины с индексами нуль и единица имеют одинаковый асимптотический порядок. Величины с индексом нуль задают НДС, симметричное относительно срединной поверхности оболочки (τ_i^0, τ_{ij}^0, τ_3^0, v_i^0 – четные функции ζ; τ_{i3}^0, v_3^0 – нечетные функции ζ), а величины с индексом единица – НДС, антисимметричное относительно срединной поверхности (τ_i^1, τ_{ij}^1, τ_3^1, v_i^1 – нечетные функции ζ; τ_{i3}^1, v_3^1 – четные функции ζ).

Прием, связанный с разделением НДС оболочки на симметричную и антисимметричную составляющие, применялся ранее при асимптотическом интегрировании динамических уравнений теории упругости в окрестности частот среза [7].

При $q = 0$ асимптотика (2.1) совпадает с асимптотикой статического безмоментного НДС [6]. При $q = 1$ НДС оболочки будет симметрично относительно срединной поверхности с точностью до величины $O(\eta)$. С этой точностью коэффициенты Ламе выбранной триортогональной системы координат постоянны по ζ.

Подставляя (2.1) в (1.2), выделим четные (L_i^0, L^0, F^1, e_i^0, m_i^0, g_i^1) и нечетные (L_i^1, L^1, F^0, e_i^1, m_i^1, g_i^0) функции поперечной координаты:

$$
\begin{aligned}
&L_i = \frac{E}{R}\eta^{-q}(L_i^0 + \eta L_i^1), \ L = \frac{E}{R}(L^0 + \eta L^1), F = \frac{E}{R}\eta^{3-4q}(F^0 + \eta^{2q-1}F^1)\\
&e_i = e_i^0 + \eta e_i^1, m_i = m_i^0 + \eta m_i^1, g_i = \eta^{1-q}(g_i^0 + \eta^{2q-1}g_i^1)\\
&L_i^k = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\tau_i^k}{\partial\xi_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial\tau_{ij}^k}{\partial\xi_j} + \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\xi_{i0}}(\tau_i^k - \tau_j^k) +\\
&+ \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\xi_{j0}}(\tau_{ij}^k + \tau_{ji}^k), \ L^k = \frac{\tau_1^k}{R_1^*} + \frac{\tau_2^k}{R_2^*}\\
&F^k = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\tau_{13}^k}{\partial\xi_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\tau_{23}^k}{\partial\xi_2} + \frac{\eta^q}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\xi_{10}}\tau_{13}^k + \frac{\eta^q}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\xi_{20}}\tau_{23}^k\\
&e_i^0 = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_i^0}{\partial\xi_i} + \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\xi_{j0}}v_j^0 + \eta^{2q}\frac{v_3^1}{R_i^*}\\
&e_i^1 = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_i^1}{\partial\xi_i} + \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\xi_{j0}}v_j^1 + \frac{v_3^0}{R_i^*}\\
&m_i^k = \frac{1}{A_j}\frac{\partial v_i^k}{\partial\xi_j} - \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\xi_{i0}}v_j^k\\
&g_i^0 = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_3^0}{\partial\xi_i} - \eta^{2q}\frac{v_i^1}{R_i^*}, \ g_i^1 = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_3^1}{\partial\xi_i} - \frac{v_i^0}{R_i^*} \ (k = 0, 1)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Из вида формул (2.1) следует, что в рассматриваемом случае асимптотически главными параметрами НДС оболочки будут четные функции $v_i^0, \tau_i^0, \tau_{ij}^0$, а также v_3^1 при $q = 0$. Подставляя (2.1) и (2.2) в (1.1) и отбрасывая величины порядка $O(\eta^{2-2q})$ по сравнению с единицей, получим замкнутую систему уравнений относительно главных параметров НДС. Она имеет вид

$$L_i^0 - \frac{\partial^2 v_i^0}{\partial \tau^2} = 0,\ L^0 + \frac{\partial^2 v_3^1}{\partial \tau^2} = 0 \tag{2.3}$$

$$e_i^0 = \tau_i^0 - \nu\tau_j^0,\ \frac{\partial v_3^1}{\partial \zeta} = 0,\ \frac{\partial v_i^0}{\partial \zeta} = 0,\ m_i^0 + m_j^0 = 2(1+\nu)\tau_{ij}^0$$

Допускаемая погрешность $O(\eta^{2-2q})$ совпадает с погрешностью незначительно модифицированной теории оболочек Кирхгофа – Лява в статике [6]. Все остальные входящие в (2.1) величины, кроме τ_{i3}^0 и τ_3^1, в рамках этой погрешности определяются по известным $v_i^0, \tau_i^0, \tau_{ij}^0$ и v_3^1 из следующей системы уравнений

$$L_i^1 + \frac{\partial \tau_{i3}^1}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_i^1}{\partial \tau^2} - \zeta\left(\frac{1}{R_i^*} + \frac{1}{R_j^*}\right)\frac{\partial^2 v_i^0}{\partial \tau^2} = 0$$

$$-\eta^{2q}L^1 + \frac{\partial \tau_3^0}{\partial \zeta} - \frac{\partial^2 v_3^0}{\partial \tau^2} - \eta^{2q}\zeta\left(\frac{1}{R_1^*} + \frac{1}{R_2^*}\right)\frac{\partial^2 v_3^1}{\partial \tau^2} = 0$$

$$e_i^1 = \tau_i^1 - \nu\tau_j^1 + \zeta\left(\frac{1}{R_i^*} - \frac{1}{R_j^*}\right)\tau_i^0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial v_3^0}{\partial \zeta} = -\nu(\tau_1^0 + \tau_2^0),\ \frac{\partial v_i^1}{\partial \zeta} + g_i^1 = 0$$

$$m_i^1 + m_j^1 = 2(1+\nu)\tau_{ij}^1 - \zeta\left(\frac{1}{R_i^*} - \frac{1}{R_j^*}\right)m_i^0$$

При этом напряжения τ_{i3}^1, τ_3^0 должны быть подчинены однородным граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки

$$\tau_{i3}^1(\xi_1, \xi_2, \pm 1) = \tau_3^0(\xi_1, \xi_2, \pm 1) = 0 \tag{2.5}$$

Для определения напряжений τ_{i3}^0, τ_3^1 системы уравнений (2.3), (2.4) должны быть составлены с большей, чем $O(\eta^{2-2q})$, точностью. На этом вопросе здесь останавливаться не будем.

Беря последовательно интегралы по ζ в (2.3), (2.4), при учете (2.5) получаем, что изучаемые интегралы трехмерных динамических уравнений теории упругости с погрешностью $O(\eta^{2-2q})$ имеют следующий полиномиальный по поперечной координате вид

$$v_i^0 = v_{i,0}^0,\ v_3^1 = v_{3,0}^1,\ e_i^0 = e_{i,0}^0,\ m_i^0 = m_{i,0}^0$$

$$g_i^1 = g_{i,0}^1,\ \tau_i^0 = \tau_{i,0}^0,\ \tau_{ij}^0 = \tau_{ij,0}^0,\ L_i^0 = L_{i,0}^0$$

$$L^0 = L_{,0}^0\ v_i^1 = v_{i,1}^1\zeta,\ v_3^0 = v_{3,1}^0\zeta,\ e_i^1 = e_{i,1}^1\zeta \tag{2.6}$$

$$m_i^1 = m_{i,1}^1\zeta,\ \tau_i^1 = \tau_{i,1}^1\zeta,\ \tau_{ij}^1 = \tau_{ij,1}^1\zeta,\ L_i^1 = L_{i,1}^1\zeta$$

$$L^1 = L_{,1}^1\zeta,\ \tau_{i3}^1 = \tau_{i3,0}^1 + \tau_{i3,2}^1\zeta^2,\ \tau_3^0 = \tau_{3,0}^0 + \tau_{3,2}^0\zeta^2$$

Все входящие в (2.6) функции с запятой в нижнем индексе не зависят от поперечной координаты ζ и связаны между собой формулами

$$e_{i,0}^0 = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{i,0}^0}{\partial \xi_i} + \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_{i0}}v_{j,0} + \eta^{2q}\frac{v_{3,0}^1}{R_i^*}$$

$$m_{i,0}^0 = \frac{1}{A_j}\frac{\partial v_{i,0}^0}{\partial \xi_j} - \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \xi_{i0}}v_{j,0}^0,\ g_{i,0}^1 = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{3,0}^1}{\partial \xi_i} - \frac{v_{i,0}^0}{R_i^*}$$

$$L_{i,0}^0 = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \tau_{i,0}^0}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial \tau_{ij,0}^0}{\partial \xi_j} + \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \xi_{i0}}(\tau_{i,0}^0 - \tau_{j,0}^0) +$$

$$+ \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_{j0}}(\tau_{ij,0}^0 + \tau_{ji,0}^0),\ L_{,0}^0 = \frac{\tau_{1,0}^0}{R_1^*} + \frac{\tau_{2,0}^0}{R_2^*}$$

$$\tau_{i,0}^0 = \frac{1}{1-\nu^2}(e_{i,0}^0 + \nu e_{j,0}^0),\ \tau_{ij,0}^0 = \frac{1}{2(1+\nu)}(m_{i,0}^0 + m_{j,0}^0)$$

$$L_{i,0}^0 - \frac{\partial^2 v_{i,0}^0}{\partial \tau^2} = 0,\ L_{,0}^0 + \frac{\partial^2 v_{3,0}^1}{\partial \tau^2} = 0$$

$$v_{i,1}^1 = -g_{i,0}^1,\ v_{3,1}^0 = -\nu(\tau_{1,0}^0 + \tau_{2,0}^0)$$

$$e_{i,1}^1 = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v_{i,1}^1}{\partial \xi_i} + \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_{j0}}v_{j,1}^1 + \frac{v_{3,1}^0}{R_i^*} \qquad (2.7)$$

$$m_{i,1}^1 = \frac{1}{A_j}\frac{\partial v_{i,1}^1}{\partial \xi_j} - \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \xi_{i0}}v_{j,1}^1$$

$$\tau_{i,1}^1 = \frac{1}{1-\nu^2}(e_{i,1}^1 + \nu e_{j,1}^1) + \frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{R_j^*} - \frac{1}{R_i^*}\right)(\tau_{i,0}^0 - \nu\tau_{j,0}^0)$$

$$\tau_{ij,1}^1 = \frac{1}{2(1+\nu)}(m_{i,1}^1 + m_{j,1}^1)$$

$$L_{i,1}^1 = \frac{1}{A_i}\frac{\partial \tau_{i,1}^1}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial \tau_{ij,1}^1}{\partial \xi_j} + \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \xi_{i0}}(\tau_{i,1}^1 - \tau_{j,1}^1) +$$

$$+ \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_{j0}}(\tau_{ij,1}^1 + \tau_{ji,1}^1),\ L_{,1}^1 = \frac{\tau_{1,1}^1}{R_1^*} + \frac{\tau_{2,1}^1}{R_2^*}$$

$$\tau_{i3,0}^1 = -\tau_{i3,2}^1,\ \tau_{i3,2}^1 = -\frac{1}{2}\left[L_{i,1}^1 + \frac{\partial^2 g_{i,0}^1}{\partial \tau^2} - \left(\frac{1}{R_i^*} + \frac{1}{R_j^*}\right)\frac{\partial^2 v_{i,0}^0}{\partial \tau^2}\right]$$

$$\tau_{3,0}^0 = -\tau_{3,2}^0,\ \tau_{3,2}^0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 v_{3,1}^0}{\partial \tau^2} + \eta^{2q}L_{,1}^1 + \eta^{2q}\left(\frac{1}{R_1^*} + \frac{1}{R_2^*}\right)\frac{\partial^2 v_{3,1}^1}{\partial \tau^2}\right]$$

Для обоснования выполненного асимптотического интегрирования следует внести в уравнения (1.1), (1.2) соотношения (2.1), (2.2), предварительно выразив все входящие в них величины по формулам (2.6), (2.7). Произведя тождественные преобразования, можно непосредственно убедиться, что получающаяся при этом невязка будет иметь порядок η^{2-2q}.

3. Асимптотическое интегрирование в случае $q = ½(1 + a)$. Асимптотику НДС оболочки возьмем в виде

$$v_i = R\eta(\eta^{2q-1}v_i^0 + v_i^1),\ v_3 = R\eta^q(\eta v_3^0 + v_3^1)$$
$$\tau_i = E\eta^{1-q}(\eta^{2q-1}\tau_i^0 + \tau_i^1),\ \tau_{ij} = E\eta^{1-q}(\eta^{2q-1}\tau_{ij}^0 + \tau_{ij}^1) \qquad (3.1)$$
$$\tau_{i3} = E\eta^{2-2q}(\eta\tau_{i3}^0 + \tau_{i3}^1),\ \tau_3 = E\eta^{3-3q}(\eta^{2q-1}\tau_3^0 + \tau_3^1)$$

Величины с индексами нуль и единица имеют тот же смысл, что в разд. 2.

Подставляя (3.1) в (1.2), выделим четные и нечетные функции поперечной координаты по формулам

$$L_i=\frac{E}{R}\eta^{1-2q}(\eta^{2q-1}L_i^0+L_i^1),\ L=\frac{E}{R}\eta^{1-q}(\eta^{2q-1}L^0+L^1)$$

$$F=\frac{E}{R}\eta^{2-3q}(\eta F^0+F^1) \tag{3.2}$$

$$e_i=\eta^{1-q}(\eta^{2q-1}e_i^0+e_i^1),\ m_i=\eta^{1-q}(\eta^{2q-1}m_i^0+m_i^1),\ g_i=\eta g_i^0+g_i^1$$

где L_i^k, L^k, F^k, m_i^k по-прежнему определяются формулами (2.2), а для остальных величин имеют место выражения

$$e_i^0=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_i^0}{\partial \xi_i}+\frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_{j0}}v_j^0+\frac{v_3^1}{R_i^*}$$

$$e_i^1=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_i^1}{\partial \xi_i}+\frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_{j0}}v_j^1+\eta^{2q}\frac{v_3^0}{R_i^*} \tag{3.3}$$

$$g_i^0=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_3^0}{\partial \xi_i}-\frac{v_i^1}{R_i^*},$$

$$g_i^1=\frac{1}{A_i}\frac{\partial v_3^1}{\partial \xi_i}-\eta^{2q}\frac{v_i^0}{R_i^*}$$

Подставляя (3.1), (3.2) в (1.1) и отбрасывая члены порядка $O(\eta^{2-2q})$, приходим к уравнениям вида

$$L_i^0=0,\ L_i^1+\frac{\partial \tau_{i3}^1}{\partial \zeta}=0,\ -\eta^{4q-2}L^0+F^1+\frac{\partial \tau_3^1}{\partial \zeta}-\frac{\partial^2 v_3^1}{\partial \tau^2}=0$$

$$-L^1+\frac{\partial \tau_3^0}{\partial \zeta}=0,\ e_i^0=\tau_i^0-\nu\tau_j^0,\ e_i^1=\tau_i^1-\nu\tau_j^1,\ \frac{\partial v_3^1}{\partial \zeta}=0$$

$$\frac{\partial v_3^0}{\partial \zeta}=-\nu(\tau_1^0+\tau_2^0),\ \frac{\partial v_i^0}{\partial \zeta}=0,\ \frac{\partial v_i^1}{\partial \zeta}+g_i^1=0 \tag{3.4}$$

$$m_i^0+m_j^0=2(1+\nu)\tau_{ij}^0,\ m_i^1+m_j^1=2(1+\nu)\tau_{ij}^1$$

Напряжения $\tau_{i3}^1, \tau_3^0, \tau_3^1$ должны удовлетворять однородным граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки $\zeta=\pm 1$, а для определения напряжения τ_{i3}^0 надо составлять (3.4) с большей, чем $O(\eta^{2-2q})$, точностью.

Разыскиваемые интегралы системы уравнений (3.4) при указанных граничных условиях на лицевых поверхностях оболочки в рамках погрешности $O(\eta^{2-2q})$ определяются соотношениями (2.6) и формулами

$$F^1=F_{,0}^1+F_{,2}^1\zeta^2,\ \tau_3^1=\tau_{3,1}^1\zeta+\tau_{3,3}^1\zeta^3 \tag{3.5}$$

Все двумерные величины, входящие в (2.6) и (3.5), связаны между собой формулами (2.7), в которых должны быть изменены выражения для $e_{i,0}^0, e_{i,1}^1, g_{i,0}^1, \tau_{i,1}^1, \tau_{i3,2}^1$,

$\tau^0_{3,2}$ и добавлены выражения для $\tau^1_{3,1}, \tau^1_{3,3}$. Они соответственно имеют вид

$$
\begin{aligned}
&e^0_{i,0} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v^0_{i,0}}{\partial \xi_i} + \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_{j0}} v^0_{j,0} + \frac{v^1_{3,0}}{R^*_i}\\
&e^1_{i,1} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v^1_{i,1}}{\partial \xi_i} + \frac{\eta^q}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \xi_{j0}} v^1_{j,1},\ g^1_{i,0} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial v^1_{3,0}}{\partial \xi_i}\\
&\tau^1_{i,1} = \frac{1}{1-\nu^2}(e^1_{i,1} + \nu e^1_{j,1}),\ \tau^1_{i3,2} = -\frac{1}{2}L^1_{i,1},\ \tau^0_{3,2} = \frac{1}{2}L^1_{,1}\\
&\tau^1_{3,1} = \eta^{4q-2}L^0_{,0} - F^1_{,0} + \frac{\partial^2 v^1_{3,0}}{\partial \tau^2},\ \tau^1_{3,3} = -\frac{1}{3}F^1_{,2} = -\tau^1_{3,1}, F^1_{,l} =\\
&= \frac{1}{A_1}\frac{\partial \tau^1_{13,l}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial \tau^1_{23,l}}{\partial \xi_2} + \frac{\eta^q}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \xi_{10}}\tau^1_{13,l} + \frac{\eta^q}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \xi_{20}}\tau^1_{23,l},\ l = 0{,}2
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Рассуждения, аналогичные используемым в разд. 2, позволяют убедиться, что построенные интегралы трехмерных динамических уравнений теории упругости обладают всеми априори предполагаемыми асимптотическими свойствами.

4. Двумерные уравнения в усилиях и моментах. Следуя традиции, получим уравнения движения оболочки в терминах усилий и моментов. Начнем со случая $q = a$. Выведем двумерную систему уравнений для определения асимптотически главных параметров НДС оболочки. Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
&T_i = 2Eh\tau^0_{i,0},\ S_{ij} = 2Eh\tau^0_{ij,0},\ u_i = R\eta^q v^0_{i,0}\\
&w = -R\eta^{2q} v^1_{3,0},\ \epsilon_i = e^0_{i,0},\ \omega = m^0_{i,0} + m^0_{j,0}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Здесь T_i и S_{ij} – нормальные и касательные усилия, u_i – тангенциальные перемещения срединной поверхности, w – прогиб срединной поверхности, ϵ_i и ω – компоненты тангенциальной деформации.

Подставляя (4.1) в (2.7), при учете (1.3) получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ij}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(T_i - T_j) + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(S_{ij} + S_{ji}) -\\
&-2\rho h\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0,\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\\
&T_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2}(\epsilon_i + \nu\epsilon_j),\ S_{ij} = \frac{Eh}{1+\nu}\omega,\ \epsilon_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} +\\
&+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_j - \frac{w}{R_i},\ \omega = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

При $q = a = 0$ формулы (4.1) определяют динамические безмоментные интегралы системы уравнений (4.2). Для этих интегралов $v_i \sim v_3$. При $q = a > 0$ интегралы (4.2) становятся плоскостными $(v_i \gg v_3)$. В этом случае с погрешностью $O(\eta^{2q})$ по сравнению с единицей можно пренебречь членом w/R_i в выражении для деформаций ϵ_i (см. (4.1) и (1.3)). В рамках этой погрешности первое, третье – шестое уравнения (4.2) выделяются в отдельную подсистему, которая с точностью до метрики совпадает с уравнениями плоской задачи теории упругости для случая обобщенного плоского напряженного состояния. В статике такая ситуация реализуется только при $q > ½$ [6]. В этом состоит главное различие между статическим и динамическим случаями.

Асимптотика двумерных величин (4.1) и соответствующая асимптотика трехмерных величин (2.1) присущи лишь динамике. Физически это отражает тот факт, что в динамике проекция тангенциальных сил на нормаль к срединной поверхности может быть уравновешена поперечной инерцией оболочки.

Исходя из соотношений (2.7), можно получить и двумерные уравнения для асимптотически второстепенных параметров НДС оболочки. Не останавливаясь на этом, приведем лишь выражение для поперечного обжатия оболочки $m = hv^0_{3,1}$, которое при $q > {}$ $> 1/2$ асимптотически превосходит прогиб w. Оно имеет вид

$$m = -\frac{\nu}{2E}(T_1 + T_2) \tag{4.3}$$

В случае $q = 1/2\ (1 + a)$ введем обозначения

$$\begin{gathered}
T_i = 2Eh\eta^q\tau^0_{i,0},\ S_{ij} = 2Eh\eta^q\tau^0_{ij,0},\ G_i = -2/3\,Eh^2\eta^{1-q}\tau^1_{ij,1}\\
H_{ij} = 2/3\,Eh^2\eta^{1-q}\tau^1_{ij,1},\ N_i = -2Eh\eta^{2-2q}(\tau^1_{i3,0} + 1/3\,\tau^1_{i3,2})\\
u_i = R\eta^{2q}v^0_{i,0},\ w = -R\eta^q v^1_{3,0},\ \gamma_i = -v^1_{i,1}\\
\kappa_i = R^{-1}\eta^{-q}e^1_{i,1},\ \tau = R^{-1}\eta^{-q}m^1_{i,1}
\end{gathered} \tag{4.4}$$

Здесь G_i и H_{ij} – изгибающие и крутящие моменты, N_i – перерезывающие усилия, γ_i – повороты, κ_i и τ – компоненты изгибной деформации срединной поверхности; остальные величины имеют такой же смысл, как и выше.

В отличие от (4.1) асимптотика (4.4) остается справедливой и в статике. Она соответствует интегралам, для которых $v_3 \gg v_i$.

Подставляя (4.4) в (2.7) и (3.6) и учитывая (1.3), приходим к системе уравнений вида

$$\begin{gathered}
\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ij}}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(T_i - T_j) + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(S_{ij} + S_{ji}) = 0\\
\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial N_1}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial N_2}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}N_1 + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}N_2 - 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\\
\frac{1}{A_i}\frac{\partial G_i}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ij}}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}(G_i - G_j) - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}(H_{ij} + H_{ji}) - N_i = 0\\
T_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2}(\epsilon_i + \nu\epsilon_j),\ S_{ij} = \frac{Eh}{1+\nu}\,\omega\\
G_i = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(\kappa_i + \nu\kappa_j),\ H_{ij} = \frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\tau\\
\epsilon_i = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j - \frac{w}{R_i},\ \omega = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right)\\
\kappa_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial\gamma_i}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\gamma_j\\
\gamma_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i},\ \tau = -\frac{1}{A_j}\frac{\partial\gamma_i}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\gamma_j
\end{gathered} \tag{4.5}$$

При $q = 1/2$ $(a = 0)$ уравнения (4.5) описывают так называемые изгибно-плоскостные интегралы. Для них асимптотический порядок напряжений, создаваемых тангенциальными усилиями и моментами, совпадает (см. (3.1) и (4.4)). При $a > 0$ изгибно-плоскостные интегралы переходят в изгибные, для которых напряжения от моментов асимптотически превосходят напряжения от усилий. В этом случае плоскостные члены (первые два члена во втором уравнении (4.5)) становятся асимптотически второстепенными, и это уравнение совместно с третьим, шестым, седьмым, десятым и одиннадцатым уравнениями (4.5) в главном совпадают с уравнениями изгиба пластины в метрике срединной поверхности оболочки. Однако было показано [4], что в силу требований к точности получаемых решений, указанные плоскостные члены во втором уравнении (4.5), вообще говоря, следует сохранять во всем диапазоне $0 \leqslant a < 1$.

В заключение отметим, что, удерживая одновременно все члены, входящие в уравнения (4.2) и (4.5), придем к полной системе двумерных уравнений динамической теории оболочек типа Кирхгофа – Лява.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А.Л.* Классификация интегралов динамических уравнений линейной двумерной теории оболочек // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 591–603.
2. *Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е.* Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383 с.
3. *Коссович Л.Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 176 с.
4. *Каплунов Ю.Д.* Интегрирование уравнений динамического погранслоя. // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 1. С. 148–160.
5. *Гольденвейзер А.Л.* Некоторые вопросы общей линейной теории оболочек. // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 126–138.
6 *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
7. *Каплунов Ю.Д.* Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменяемости в упругих тонких оболочках // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 5. С. 147–157.

Москва

Поступила в редакцию
3.I.1992