

УДК 539.3:534.1

© 1993 г. В.Б. Зеленцов

**ОБ ЭФФЕКТИВНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ТИПА
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИЗГИБА
ТОНКИХ ПЛАСТИН**

Рассматриваются интегральные уравнения (ИУ), к которым сводятся некоторые статические и динамические задачи об изгибе тонких пластин с включениями. Для их решения предлагается метод, основанный на специальной аппроксимации символа ядра ИУ. Строится точное решение ИУ с аппроксимированным ядром в классе функций с интегрируемыми особенностями на краях интервала интегрирования.

Другие методы решения ИУ статических смешанных задач теории изгиба тонких пластин рассматривались ранее ([1, 2] и др.).

1. Интегральное уравнение. Рассматривается ИУ первого рода, к которому сводятся некоторые задачи теории изгиба тонких пластин, следующего вида:

$$\lambda^2 \int_{-1}^1 \psi(\xi) k\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = 2\pi f(x), \quad |x| \leq 1 \quad (1.1)$$

Ядро ИУ дается формулой

$$k(t) = \int_{\Gamma} K(u) e^{-iut} du, \quad t = (\xi - x)/\lambda, \quad \lambda = h/a \quad (1.2)$$

Функция $K(u)$ в (1.2) мероморфна, четна, вещественна на действительной оси и обладает следующими асимптотическими свойствами:

$$K(u) = u^{-3} + O(u^{-5}), \quad u \rightarrow \infty; \quad K(u) = A + O(u^2), \quad u \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

а ядро благодаря свойствам (1.3) является гладким и при $t \rightarrow 0$ имеем асимптотику

$$k(t) = \frac{1}{2} t^2 \ln|t| + O(t^2), \quad t \rightarrow 0$$

Контур интегрирования Γ выбирается по принципу предельного поглощения [3, 4], так как в динамических задачах часть нулей и полюсов функции $K(u)$ на фиксированной частоте попадает на действительную ось. Выбор контура Γ дает возможность построить единственное решение динамических задач [4].

Учитывая мероморфность функции $K(u)$ в комплексной плоскости ($u = \alpha + i\tau$), ее можно представить в виде бесконечного произведения

$$K(u) = A \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 + u^2 \alpha_n^{-2}}{1 + u^2 \beta_n^{-2}}, \quad A = \lim_{u \rightarrow 0} K(u) \quad (1.4)$$

где $\pm i\alpha_n, \pm i\beta_n$ — нули и полюсы функции $K(u)$ в комплексной плоскости.

2. Аппроксимация символа ядра интегрального уравнения. Для решения ИУ (1.1) символ ядра — функция $K(u)$ аппроксимируется выражением специального вида

$$K(u) \approx \frac{\text{th}(Au)}{u(u^2 + p_0^2)} \prod_{n=1}^N \frac{u^2 + q_n^2}{u^2 + p_n^2} \quad (2.1)$$

совпадающим по асимптотическим свойствам с функцией $K(u)$ при $u \rightarrow 0$ и $u \rightarrow \infty$. Нули и полюсы (2.1) $q_n; p_n$, за исключением тех, которые находятся на действительной оси (вычисленные с заданной точностью, они прямо подставляются в (2.1)), подбираются из наилучшей аппроксимации $K(u)$, вдоль действительной оси и ее малой окрестности.

Для решения уравнения (1.1) производим замену $u = \lambda u'$ и, опуская штрихи, получаем уравнение

$$\int_{-1}^1 \psi(\xi) k(\xi - x) d\xi = 2\pi f(x), \quad |x| \leq 1 \quad (2.2)$$

в котором при учете аппроксимации ядро запишется в виде

$$k(t) = \int_{\Gamma} \frac{\text{th}(A\lambda u)}{u(u^2 + \gamma_0^2)} \prod_{n=1}^N \frac{u^2 + \delta_n^2}{u^2 + \gamma_n^2} e^{-iut} du, \quad \lambda \delta_n = q_n, \quad \lambda \gamma_n = p_n \quad (2.3)$$

В дальнейшем для удобства наравне с (2.3) используется обозначение

$$K(u) \approx \text{th}(A\lambda u) / (u \xi(u^2)), \quad \xi(u^2) = L_2(u^2) / L_1(u^2) \quad (2.4)$$

где $L_i(u^2)$ — многочлены порядка $2N$ и $2N + 2$ соответственно, $\pm i\delta_n, \pm i\gamma_n$ — нули этих многочленов, совпадающие с нулями и полюсами подынтегральной функции в (2.3).

3. Решение ИУ с ядром (2.3). Для решения ИУ (2.3) выписываются формулы обобщенного интегрального преобразования Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\beta) e^{-i\beta x} d\beta = \begin{cases} 2\pi \psi(x), & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\psi(\beta) = \int_{-1}^1 \psi(\xi) e^{i\beta \xi} d\xi$$

Решение исходного ИУ (2.2) с ядром (2.3) отыскивается для правой части, взятой в специальной форме $f(x) = e^{-\epsilon x}$, что предполагает возможность разложения $f(x)$ в ряде Фурье (ϵ — некоторое, вообще говоря, комплексное число).

Сначала находим [5] решение ИУ (2.2) для специальной правой части $f_+(x) = \text{ch} \epsilon x$. В этом случае (2.2) принимает вид

$$\int_{-1}^1 \psi_+(\xi) k(\xi - x) d\xi = 2\pi \text{ch} \epsilon x, \quad |x| \leq 1 \quad (3.2)$$

в котором $\psi_+(x)$ — четная часть $\psi(x)$.

Решения уравнения (3.2) разыскивается в классе функций с неинтегрируемыми особенностями на краях интервала интегрирования [1, 2]. Тогда возникает необходимость произвести регуляризацию интервала в (3.2); из соображений удобства она проводится на более позднем этапе решения. Теперь ИУ (3.2) представляется в виде обыкновенного дифференциального уравнения (при этом учитываются обозначения (2.4))

$$L_1(l) \Omega_+(x) = 2\pi L_2(l) \text{ch} \epsilon x, \quad l = -d^2/dx^2, \quad |x| \leq 1 \quad (3.3)$$

$$\Omega_+(x) = \int_{-1}^1 \psi_+(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{-1} \text{th}(A\lambda \beta) \cos \beta(\xi - x) d\beta \quad (3.4)$$

где $L_1(l)$ и $L_2(l)$ — дифференциальные операторы по x порядка $2N$ и $2N + 2$ в соответствии с (2.4).

Обратив уравнение (3.3), для определения $\psi_+(x)$ получаем новое ИУ

$$\Omega_+(x) = \chi(\epsilon, x), \quad \chi(\epsilon, x) = 2\pi \xi(-\epsilon^2) + 2\pi \sum C_n \text{ch} \delta_n x, \quad |x| \leq 1 \quad (3.5)$$

Здесь C_n — набор пока неизвестных постоянных, суммирование всегда ведется от $n=1$ до $n=N$.

На этом этапе решения ИУ проводится регуляризация внешнего интеграла в (3.5) при учете класса функций, в котором ищется решение исходного ИУ [1, 2]

$$\psi_+(x) = \omega(x) (1-x^2)^{-3/2}, \quad \omega(x) \in H_\gamma[-1,1], \quad \gamma < 1/2 \quad (3.6)$$

Возможность произведения регуляризации в (3.5), а не в (3.2), объясняется свойствами канонической регуляризации [6]. При учете четности функции $\psi_+(x)$ регуляризация в (3.5) осуществляется таким образом: из функции $\psi_+(x)$ вычитается и к ней прибавляется выражение

$$\psi_+^0(x) = B_+ (\text{ch}\theta - \text{ch}\theta x)^{-3/2}, \quad \theta = \pi/(A\lambda)$$

где B_+ — неизвестная постоянная. После этого (3.5) преобразуется к виду

$$\Omega_+^*(x) = 4\sqrt{2\pi}B_+ Q_{-1/2}^1 (\text{ch}\theta)/(\theta \text{sh}\theta) + \chi(\epsilon, x), \quad |x| \leq 1 \quad (3.7)$$

где $\Omega_+^*(x)$ — интеграл, аналогичный (3.4) при замене $\psi_+(\xi)$ на $\psi_+^* = \psi_+(\xi) + \psi_+^0(\xi)$.

Видно, что

$$\psi_+^*(x) = \omega(x) (1-x^2)^{-1/2}, \quad \omega(x) \in H_\gamma[-1,1], \quad \gamma > 0$$

т.е. решение ИУ (3.7) должно принадлежать классу функций с интегрируемыми особенностями на краях интервала интегрирования.

Пользуясь теперь известными результатами [5] для преобразования Фурье функции $\psi_+(x)$

$$\Psi_+(\beta) = \int_{-1}^1 \psi_+(\xi) \cos\beta\xi d\xi$$

получаем:

$$\Psi_+(\beta) = 2\sqrt{2\pi}B_+\lambda^2 \frac{N(-1/2 + i\beta/\theta, -1/2)}{\theta \text{sh}\theta Q_{-1/2}} + \Phi_+(\beta) \quad (3.8)$$

$$\Phi_+(\beta) = G_\epsilon P_{-1/2 + i\beta/\theta} (\text{ch}\theta) - \pi^2 \epsilon^2 \text{sh}\theta H(-1/2 + i\beta/\theta, -1/2 + \epsilon/\theta) - \\ - \pi \text{sh}\theta \sum C_n \delta_n^2 H(-1/2 + i\beta/\theta, -1/2 + \delta_n/\theta)$$

$$Q_{-1/2} G_\epsilon = \pi \xi (-\epsilon^2) \text{sh}\theta H(-1/2 + \epsilon/\theta, -1/2) - \text{sh}\theta \sum C_n N(-1/2 + \delta_n/\theta, -1/2)$$

$$H(u, v) = \theta^{-2} (P_u P_v^1 - P_v P_u^1) ((u + 1/2)^2 + (v + 1/2)^2)^{-1}$$

$$N(u, v) = P_u Q_v^1 - Q_v P_u^1, \quad P_v^\mu = P_v^\mu (\text{ch}\theta), \quad Q_v^\mu = Q_v^\mu (\text{ch}\theta)$$

(P_v^μ, Q_v^μ — присоединенные сферические функции первого и второго рода).

Решение $\psi_+(x)$ дается формулой:

$$2\pi Q_{-1/2} \psi_+(x) = C_0 \theta (\text{sh}\theta Q_{-1/2} + r^2(1, x) Q_{-1/2}^1) / r^3(1, x) + 2\pi \varphi_+(x) \quad (3.9)$$

$$C_0 = 2\sqrt{2\pi}B_+ / (\theta \text{sh}\theta)$$

$$\varphi_+(x) = \zeta(-\epsilon^2) F(-1/2, -1/2 + \epsilon/\theta, x) + \sum C_n F(-1/2, -1/2 + \delta_n/\theta, x)$$

$$F(u, v, x) = -\frac{\theta \text{sh}\theta N(u, v)}{r(1, x) Q_u} - \theta^2 (v + 1/2)^2 \int_x^1 \frac{P_v(\text{ch}\theta\tau) \text{sh}\theta\tau}{r(\tau, x)} d\tau$$

$$r(u, v) = (2(\text{ch}\theta u - \text{ch}\theta v))^{1/2}$$

Постоянные C_0, C_1, \dots, C_n в формуле (3.5) определяются подстановкой выражения (3.8) в парное ИУ, эквивалентное (3.7), и после взятия квадратур решение ИУ (3.2)

приводятся к решению линейной алгебраической системы:

$$\sum_{k=0}^N x_k = f_m + \sum_{k=0}^N a_{mk} x_k, \quad m = 0, 1, \dots, N \quad (3.10)$$

$$x_0 = -C_0 Q_{-\frac{1}{2}}^1, \quad x_n = C_n P_{-\frac{1}{2} + \delta_n/\theta} Q_{-\frac{1}{2}}^1$$

$$a_{m0} = -Q_{-\frac{1}{2}} Q_{-\frac{1}{2} + \gamma_m/\theta}^1 / (Q_{-\frac{1}{2}}^1 Q_{-\frac{1}{2} + \gamma_m/\theta}^1)$$

$$a_{mn} = Q_{-\frac{1}{2}} R(-\frac{1}{2} + \delta_n/\theta, -\frac{1}{2} + \gamma_m/\theta) / Q_{-\frac{1}{2}}^1$$

$$f_m = \pi \epsilon^2 \xi(-\epsilon^2) E(-\frac{1}{2} + \epsilon/\theta, -\frac{1}{2} + \gamma_m/\theta, -\frac{1}{2}) / Q_{-\frac{1}{2} + \gamma_m/\theta}$$

$$R(u, v) = [(u + \frac{1}{2})^2 P_u Q_v^1 - (v + \frac{1}{2})^2 P_u^1 Q_v] / \Delta(u, v)$$

$$\Delta(u, v) = (u - v)(u + v - 1) P_u Q_v$$

$$E(u, v, w) = Q_w T(u, v) - Q_v T(u, w), \quad T(u, v) = \theta^2 N(u, v) [(u + \frac{1}{2})^2 - (v + \frac{1}{2})^2]^{-1}$$

Для построения решения ИУ (1.1) с нечетной правой частью специального вида $f_-(x) = \text{sh} \epsilon x$, как и в рассмотренном четном случае, переход от (1.1) к уравнению типа (3.2) осуществляется той же заменой и приводит в данном случае к уравнению

$$\int_{-1}^1 \psi_-(\xi) k(\xi - x) d\xi = 2\pi \text{sh} \epsilon x, \quad |x| \leq 1 \quad (3.11)$$

в котором $k(t)$ дается формулой (2.3), а $\psi_-(x)$ — нечетная часть функции $\psi(x)$.

Решение уравнения (3.11) функция $\psi_-(x)$ отыскивается в классе функций с неинтегрируемыми особенностями на краях интервала интегрирования (3.6). Для этого осуществляется практически та же схема решения ИУ (3.11), как и в предыдущем четном случае, в результате чего уравнение (3.11) приводится к решению уравнения, отличающегося от (3.5) заменой ψ_+ на ψ_- , $\text{ch} \epsilon x$ на $\text{sh} \epsilon x$ и $\text{ch} \delta_n x$ на $\text{sh} \delta_n x$, причем вместо C_n будут фигурировать новые неизвестные постоянные D_n . Затем также производится регуляризация интеграла, для чего из функции $\psi_-(x)$ вычитается и к ней прибавляется выражение $B_- \text{sh} \theta x (\text{ch} \theta - \text{ch} \theta x)^{-3/2}$, в котором B_- — неизвестная постоянная.

Решение $\psi_-(x)$ имеет вид

$$\psi_-(x) = -D_0 \theta^2 \text{sh} \theta x / [8\pi r^3(1, x)] + \varphi_-(x) \quad (3.12)$$

$$\varphi_-(x) = \xi(-\epsilon^2) \text{sh} \theta x [S(-\frac{1}{2} + \epsilon/\theta, x) - \sum D_n S(-\frac{1}{2} + \delta_n/\theta, x)]$$

$$S(u, x) = \theta (u + \frac{1}{2}) \left[\frac{P_u}{r(1, x)} - \theta \int_x^1 \frac{P_u(\text{ch} \theta \tau)}{r(\tau, x)} d\tau \right]$$

Таким образом, получены решения исходного ИУ для четной (3.9) и нечетной (3.12) специальных правых частей. Решение ИУ с правой частью $f(x) = e^{-\epsilon x}$ можно построить по формуле $\psi(x) = \psi_+(x) - \psi_-(x)$.

При этом следует не забывать связь между p_n , q_n и δ_n , γ_n в формуле (2.3) при окончательном построении решения.

В дальнейшем при рассмотрении конкретных примеров задач, сводящихся к ИУ (1.1), потребуются формулы решения этого уравнения в частном случае, когда его правая часть равна единице. Для получения решения в этом случае достаточно в общих формулах для четного случая (3.9), (3.10) перейти к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$. В результате для $f(x) = 1$ получим решение более простого вида, в котором первое слагаемое в выражении для $\varphi_+(x)$ равно нулю, а $f_m = 1$.

4. Задачи, сводящиеся к решению ИУ (1.1), и некоторые дополнительные формулы. В качестве первого примера рассматривается задача о вибрации тонкого жесткого прямолинейного включения длины $2a$, расположенного в предварительно напряженной пластине Кирхгоффа–Лява [7]. Вибрация включения осуществляется силой, изменяющейся по гармоническому закону $Pe^{-i\omega t}$. Пластина в плане представляет собой полосу ширины $2h$. Включение расположено посередине пластины, параллельно ее боковым граням, которые жестко защемлены.

Такая задача при помощи интегрального преобразования Фурье приводится к решению ИУ (1.1) с ядром $k(t)$, символ которого имеет вид

$$K(u) = 2 \frac{\sigma_1 \sigma_2 (1 - \operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2) + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2}{\tau \sigma_1 \sigma_2 (\sigma_2 \operatorname{ch} \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_2 - \sigma_1 \operatorname{sh} \sigma_1 \operatorname{ch} \sigma_2)} \quad (4.1)$$

$$\sigma_{1,2} = (u^2 + q_{1,2}^2 \mp \tau)^{1/2}, \quad \tau = [2(q_2 - q_1)u^2 + q_2^2 + \kappa^4]^{1/2}$$

$$\kappa^4 = \rho \omega^2 h^2 D^{-1}, \quad q_i = \frac{1}{2} N_{ii} h^2 D^{-1}, \quad i = 1, 2$$

Здесь q_i – величины обобщенного предварительного усилия в срединной поверхности пластины, κ – обобщенная частота колебаний, N_{ii} – усилия в срединной поверхности пластины. Так как включение прямолинейное, то в ИУ (1.1) $f(x) = 1$.

В качестве второго примера рассматривается задача, постановка которой отличается от выше сформулированной только тем, что боковые грани пластины шарнирно оперты. Задача таким же образом приводится к решению ИУ (1.1) с символом ядра

$$K(u) = \tau^{-1} (\sigma_2^{-1} \operatorname{th} \sigma_2 - \sigma_1^{-1} \operatorname{th} \sigma_1) \quad (4.2)$$

Для решения полученных уравнений использовались упрощенные формулы, о которых говорилось в конце разд. 3, определяющие реактивную перерезывающую силу, возникающую на жестком включении в пластине.

При помощи указанных формул исследовалось влияние предварительного усилия q_2 ($q_1 = 0$), частоты колебаний κ , а также условий закрепления пластины по боковым граням, на амплитуду действующей на включение силы P (при единичной величине смещения жесткого включения).

Функции $K(u)$ ((5.1), (5.2)) для рассмотренных задач обладают всеми необходимыми свойствами (разд. 1, 2) за исключением их мероморфности, так как в комплексной плоскости ($u = \sigma + i\tau$) они имеют точки ветвления на мнимой оси. Для предложенного здесь метода решения ИУ это не является препятствием, так как сохраняется возможность аппроксимировать функции $K(u)$ вдоль действительной оси выражениями вида (2.1).

Отнесенная к длине включения амплитуда силы, действующей на включение, в рассматриваемом случае имеют вид

$$P = \int_{-1}^1 \psi_+(\xi) d\xi = \frac{1}{2} C_0 N(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) / Q_{-\frac{1}{2}} + \xi(-\epsilon^2) Y(-\frac{1}{2} + \epsilon/\theta, -\frac{1}{2}) + \sum C_n Y(-\frac{1}{2} + \quad (4.3)$$

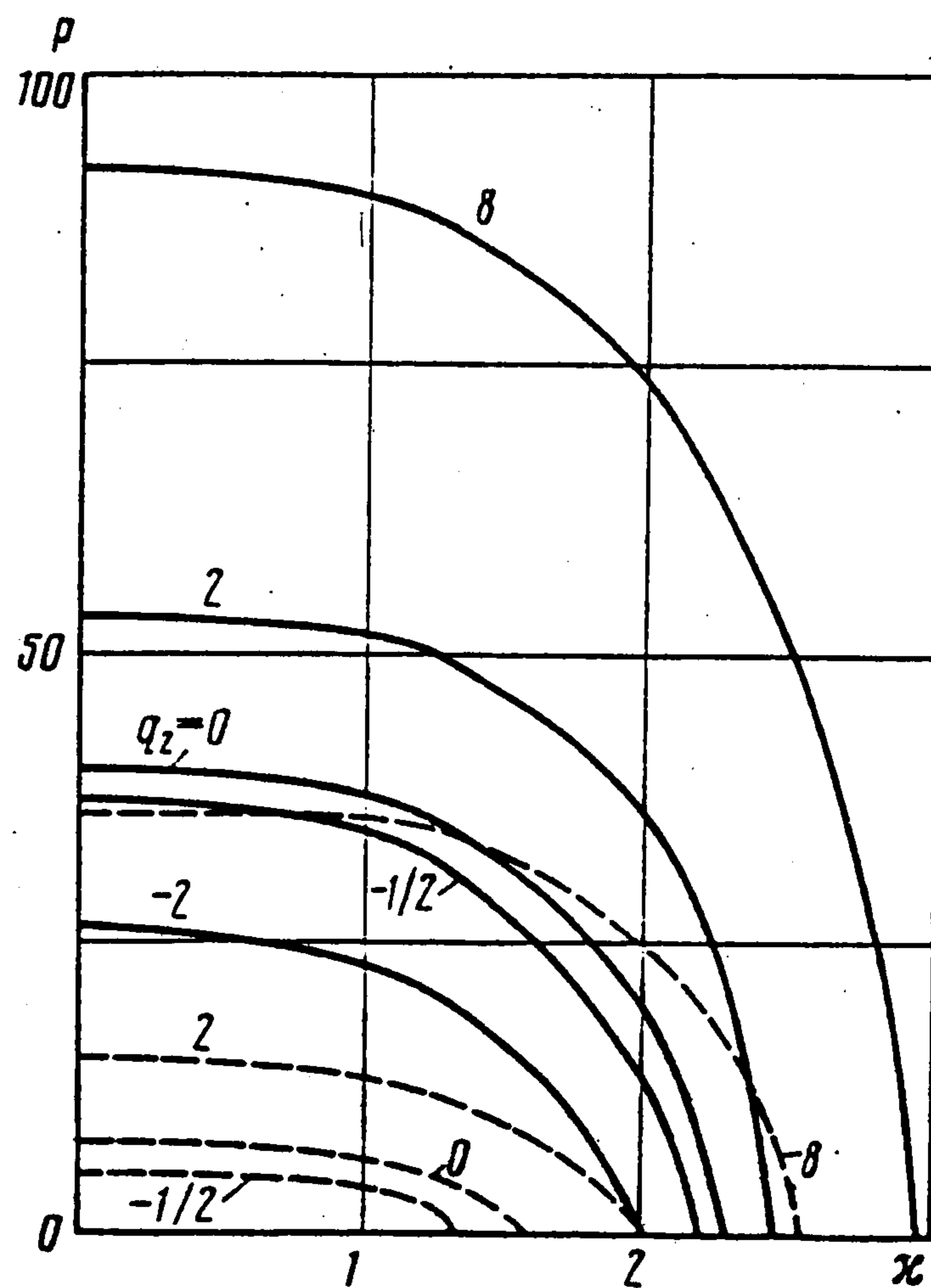
$$+ \delta_n/\theta, -\frac{1}{2})$$

$$Y(u, v) = \frac{1}{2} \pi [\theta P_u(u + \frac{1}{2}) + \operatorname{sh} \theta N(u, v) (u - 1)^{-1}] / Q_{-\frac{1}{2}}$$

В рассматриваемом случае прямолинейного включения $f(x) = 1$ формула упрощается, так как в (4.3) необходимо положить $\epsilon = 0$.

Зависимость приведенной силы P , действующей на включение и опускающей его на единичную глубину, от обобщенной частоты κ и обобщенного предварительного сжатия – растяжения q_2 представлена на фигуре сплошными линиями для первой задачи и штрихпунктирными для второй. Геометрический параметр $\lambda = h/a = 1$. Очевидно, и это следует из графиков, что для продавливания включения на единичную глубину в первой задаче требуется большая сила, чем во второй. При приближении к первой резонансной частоте пластина в обеих задачах становится все более податливой к прогибу и сила уменьшается (стремится к нулю). Графики указывают и на тот факт, что более жесткая система первой задачи имеет собственные частоты более высокие, чем во второй задаче. Видно также, что за счет изменения предварительного сжатия – растяжения можно добиться изменения собственных частот колебаний пластины. Предварительные усилия существенно влияют на величину силы: при увеличении предварительного сжатия она уменьшается, а при растяжении увеличивается.

Как для практики, так и для правильного построения решения ИУ [4], как выше отмечалось, важно изучение фазовых скоростей смещений пластины. На простом примере второй задача функция $K(u)$ которая дается формулой (4.2), покажем зависимость спектра полюсов от параметров.



В плоскости $u^2 = y, \kappa^2 = x$ полюсы $K(u)$ из (4.2) даются набором гипербол

$$x^2/a_k^2 - (y + c_k)^2/a_k^2 = 1 \quad (4.4)$$

$$c_k = q_2^2 - (q_2 - q_1) + \pi^2 (\frac{1}{2} + k)^2, a_k^2 = (q_2 - q_1) (q_2^2 + c_k^2) - q_2, k = 0, 1, 2, \dots$$

В других, более сложных случаях они были получены численно.

Численно реализация предложенного метода решения ИУ типа (1.1) показывает его высокую эффективность практически во всем интервале изменения параметра $\lambda \in (0, \infty)$. Важным достоинством метода является отсутствие в полученном решении сингулярных квадратур, часто возникающих при решении рассматриваемого класса задач. Погрешность полученных решений не превышает ошибки аппроксимации символа ядра ИУ.

Автор благодарит В.М. Александрова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Онищук О.В., Попов Г.Я. О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С. 141–150.
2. Зеленцов В.Б. О решении некоторых интегральных уравнений смешанных задач теории изгиба пластин // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 983–991.
3. Бабешко В.А. Об условиях излучения для упругого слоя // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. № 3. С. 547–549.
4. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
5. Зеленцов В.Б. О решении одного класса интегральных уравнений // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 57. С. 815–820.
6. Виленкин Н.А., Горин Е.А., Костюченко А.Г. и др. Функциональный анализ. М.: Наука, 1954. 424 с.
7. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 567 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
26.XI.1991