

УДК 532.135

© 1993 г. И.Ш. Ахатов, М.М. Хасанов, И.Г. Хусаинов

## АВТО- И СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Развивается подход, в соответствии с которым реологическое поведение неньютоновских жидкостей определяется нелинейной кинетикой процессов восстановления – разрушения связей между структурными элементами среды. Соответствующие кинетические уравнения используются в качестве замыкающих соотношений при описании нестационарных движений таких жидкостей в зазоре между цилиндрами ротационного вискозиметра. На основе численного анализа предложенной модели показывается, что авто- и стохастические колебания при измерении вязкости неньютоновских жидкостей могут являться результатом совместного действия нелинейной кинетики структурных изменений жидкости и инерционных свойств вискозиметра.

Экспериментальные исследования на ротационном вискозиметре реологических свойств жидкостей, обладающих сложной внутренней структурой (глинистых растворов, расплавов парафинов и полимеров, тяжелых нефтей и т.д.) показывают, что в ряде случаев при постоянном числе оборотов двигателя вискозиметра величина измеряемого касательного напряжения может меняться во времени достаточно сложным образом. Было приведено [1] качественное описание этого эффекта. В экспериментах [2] получено, что при определенных условиях может реализоваться колебательный режим истечения из капилляра расплава полимера при постоянстве скорости вытесняющего поршня. Это явление получило название эластической турбулентности и объяснялось, в частности, на основании гипотезы проскальзывания жидкости у стенки вискозиметра или капилляра [3–5].

На фиг. 1 приведена зависимость показаний ротационного вискозиметра от времени, полученная при измерении касательного напряжения  $R$  расплава парафина (нонодекан) при температуре, близкой к температуре кристаллизации<sup>1</sup>. Для представленной кривой были вычислены характеристики нерегулярно-колебательного процесса: корреляционная размерность и энтропия Колмогорова. Корреляционный интеграл вычислялся по формуле [6]

$$C_M(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^N H(r - \|R_i - R_q\|)$$

где  $N$  – полное число точек в обрабатываемом временном отрезке,  $H$  – функция Хевисайда,  $r$  – длина ячейки в фазовом пространстве;  $R_i$  – точка  $M$ -мерного фазового пространства с координатами  $\{R(t_i), \dots, R(t_i + (M-1)\Delta t)\}$ ,  $\|R_i - R_q\|$  – расстояние между  $i$ -й и  $q$ -й точками фазового пространства. Корреляционная размерность вычислялась по формуле [6]

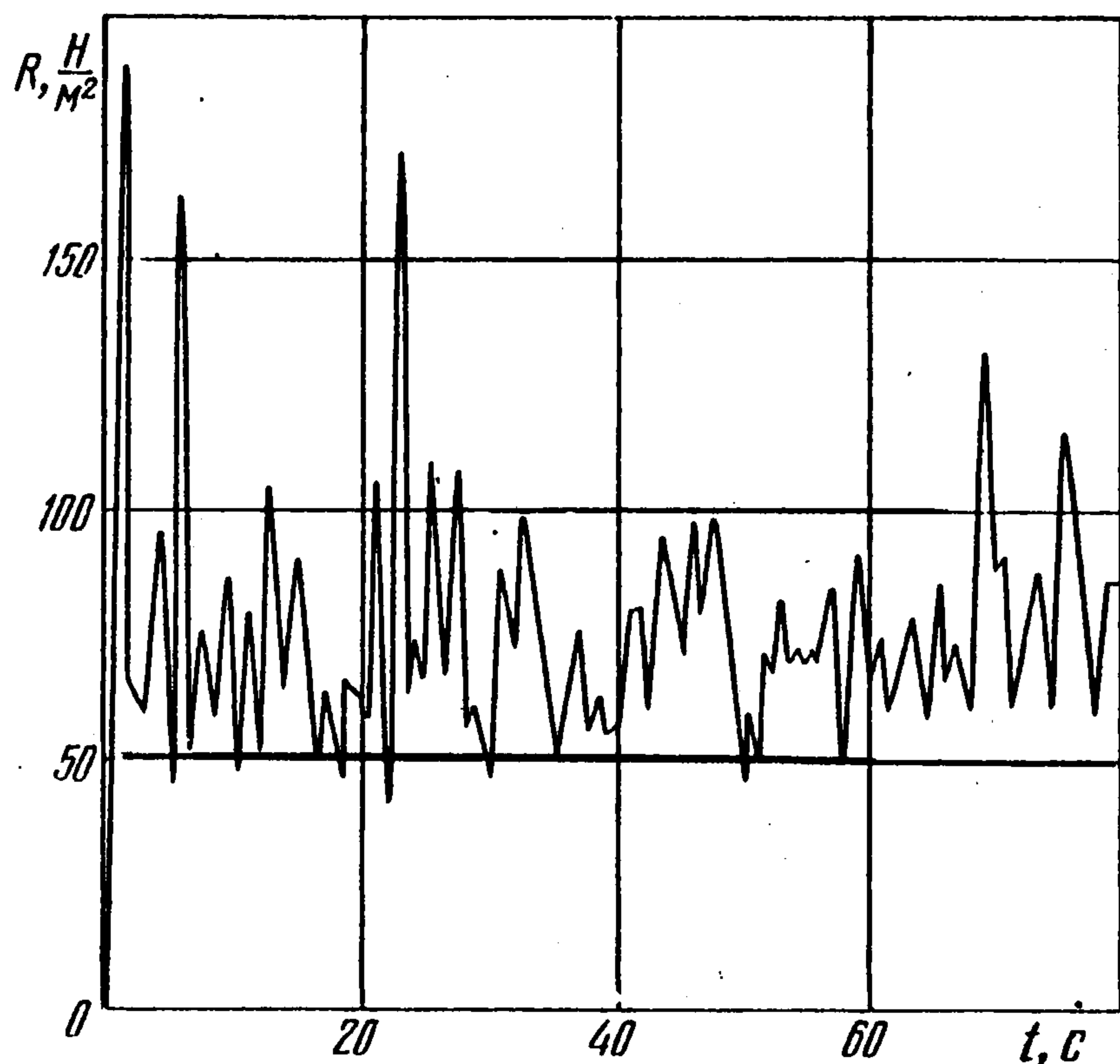
$$W = \ln C_M(r) / \ln r$$

Зависимость корреляционной функции  $C_M(r)$  от  $r$  и корреляционной размерности  $W$  от числа фазовых переменных  $M$  приведены соответственно на фиг. 2, а, б. Оценка снизу для энтропии Колмогорова вычислялась по формуле [7]

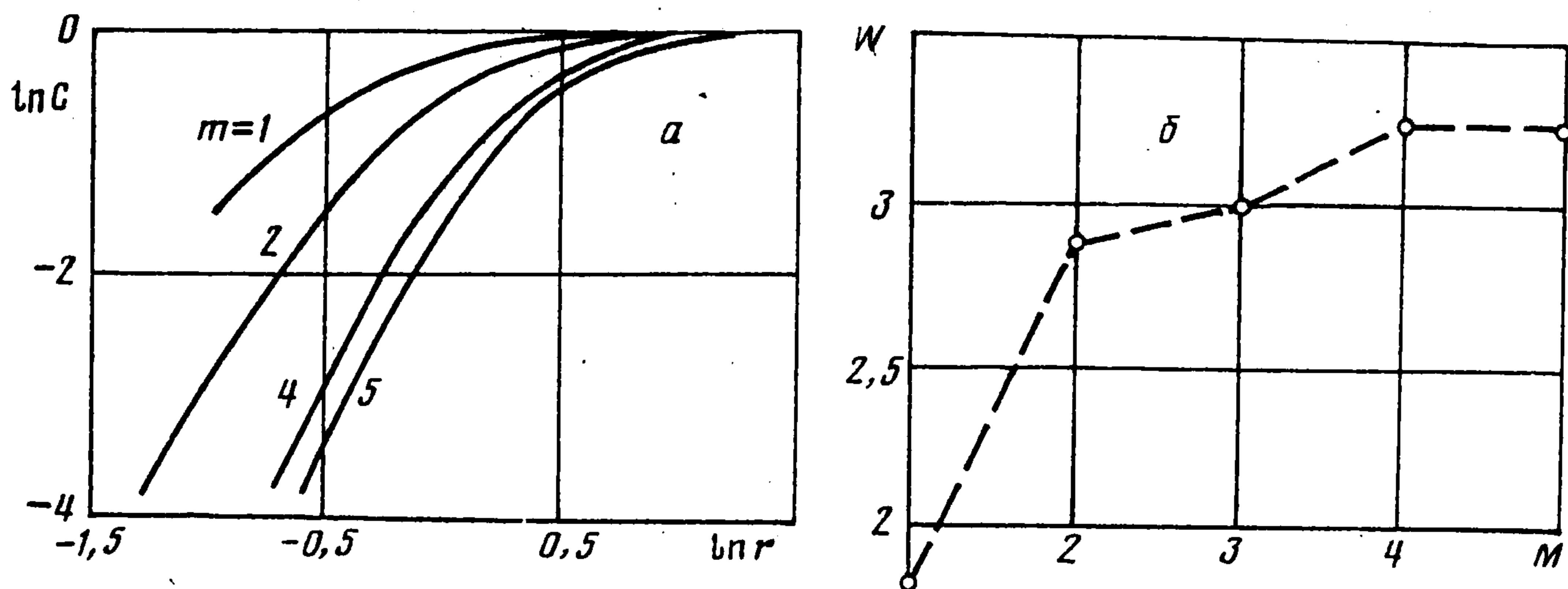
$$K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{M \rightarrow \infty} \ln [C_M(r) / C_{M+1}(r)]$$

Расчеты показали, что в данном случае  $K_2 = 0,1$ . Значит, энтропия Колмогорова положительна. Это говорит о том, что процесс, изображенный на фиг. 1, является хаотическим. Из фиг. 2, б видно, что при  $M = 4$  величина корреляционной размерности  $W$  выходит на стационарный уровень. Значит,

<sup>1</sup> Эксперимент выполнен С.А. Коневым.



Фиг. 1



Фиг. 2

хаос является детерминированным и минимальное число переменных, необходимых для моделирования процесса деформации расплава парафина в ротационном вискозиметре, равно четырем. Следовательно, рассматриваемый процесс можно адекватно описать нелинейной динамической системой четвертого порядка. Это наводит на мысль о принципиальной возможности существования некоторой конечной кинетики процессов изменения внутренней структуры жидкости.

Высказывалось [8] предположение о том, что причиной возникновения эластической турбулентности являются происходящие в процессе течения структурные перестройки. Для моделирования процессов разрушения – восстановления структуры использовались [9, 10] линейные кинетические уравнения. Показано, что в рамках такого подхода удастся удовлетворительно описать многие особенности стационарных реологических характеристик жидкости. Для описания кинетики процессов восстановления – разрушения предлагалось [11] использовать нелинейные модели, обобщающие классические модели типа "хищник – жертва". Отмечалось, что с использованием нелинейных моделей, кроме описания стационарных реологических характеристик, открываются новые возможности для описания сложных нестационарных (автоколебательных и хаотических) режимов.

Ниже предлагается простое нелинейное кинетическое уравнение для описания процессов восстановления – разрушения связей между структурными элементами среды, которое используется при моделировании движения жидкости в зазоре между цилиндрами ротационного вискозиметра.

Считая ширину зазора в вискозиметре малой по сравнению с радиусами цилиндров, рассмотрим следующую плоскую схему течения жидкости между двумя параллельными бесконечно протяженными пластинами, отстоящими одна от другой на другой на расстоянии  $h$ . Нижняя неподвижна, а верхняя подвижна и обладает достаточно большой площадью, чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами. Верхняя пластина приводится в поступательное движение пружиной, один конец которой прикреплен к пластине, а другой движется с постоянной скоростью  $v_0$ .

Сдвиговое течение жидкости между пластинами описывается уравнением

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad 0 < y < h \quad (1)$$

( $v, \rho, \mu$  — соответственно скорость, плотность и вязкость жидкости). Уравнение движения верхней пластины можно записать в виде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} - Q \mu \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{y=h} + fx = 0 \quad (2)$$

где  $x$  — абсолютное удлинение пружины,  $f$  — коэффициент жесткости пружины,  $m$  и  $Q$  — масса и площадь верхней пластины. Система уравнений движения жидкости и пластины (1), (2) замыкаются при помощи граничных и кинематических условий вида

$$v(0, t) = 0, \quad v(h, t) = v_0 - dx/dt \quad (3)$$

В качестве количественной характеристики степени структурированности жидкости, определяющей ее вязкость, будем использовать концентрацию разрушенных в процессе течения связей  $s$ . Зависимость вязкости жидкости от концентрации  $s$  можно взять в виде

$$\mu(s) = \mu_0 \frac{\xi - \xi_*}{1 - \xi_*} - \mu_* \frac{1 - \xi}{1 - \xi_*} \quad (4)$$

$$\xi = \exp(-\sigma s^\beta), \quad \xi_* = \exp(-\sigma s_*^\beta)$$

где  $\sigma, \beta$  — некоторые положительные постоянные. В соответствии с этой параметризацией при концентрации разрушенных связей, равной нулю, вязкость жидкости максимальна и равна  $\mu|_{s=0} = \mu_0$ . По мере разрушения связей (т.е. с увеличением  $s$ ) вязкость уменьшается по экспоненциальному закону и достигает своего минимального значения  $\mu|_{s=s_*} = \mu_*$ , когда все связи разрушены ( $s = s_*$ ).

При сдвиговом течении связи между структурными элементами среды могут разрушаться и восстанавливаться. Для описания процесса разрушения — восстановления связей введем следующее нелинейное кинетическое уравнение:

$$ds/dt = -\alpha \{ s - s_* [1 - \exp(-\gamma s \mu(s) \dot{\epsilon}^2)] \} \quad (5)$$

где  $\alpha$  и  $\gamma$  — положительные постоянные,  $\dot{\epsilon} = \partial v / \partial y$  — скорость сдвига. В соответствии с этим уравнением концентрация разрушенных связей при постоянном значении скорости сдвига должна стремиться к некоторому равновесному значению  $s_0$ , определяемому по формуле

$$s_0 = s_* [1 - \exp(-\gamma s_0 \mu(s_0) \dot{\epsilon}^2)]$$

Отсюда видно, что с увеличением  $\dot{\epsilon}$  концентрация разрушенных связей увеличивается, экспоненциально приближаясь к своему максимальному значению  $s_*$ . Кроме того, разложение правой части уравнения (5) в ряд

$$s_* [1 - \exp(-\gamma s \mu(s) \dot{\epsilon}^2)] \approx s_* \gamma s \mu(s) \dot{\epsilon}^2$$

показывает, что при малых значениях скорости сдвига скорость разрушения связей прямо пропорциональна интенсивности вязкой диссипации энергии в потоке.

Система уравнений (1)–(5) после введения безразмерных переменных

$$V = \frac{v}{v_0}, \quad \tau = \alpha t, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad S = \frac{s}{\sigma^{1/\beta}}, \quad X = \frac{\alpha x}{v_0}$$

$$v(S) = \mu(S) \frac{1 - \exp(-\sigma s_*^\beta)}{\mu_0 - \mu_*}$$

приобретает вид

$$\kappa \frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( v(S) \frac{\partial V}{\partial \eta} \right), \quad \kappa = \rho \alpha h^2 \frac{1 - \exp(-\sigma s_*^\beta)}{\mu_0 - \mu_*}$$

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} - \lambda v(S) \frac{\partial V}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} + FX = 0$$

$$V(0, \tau) = 0, \quad V(1, \tau) = 1 - \frac{dX}{d\tau} \quad (6)$$

$$v(S) = P + \exp(-S^\beta)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = -S + A [1 - \exp(-GSv(S) \left( \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)^2)]$$

$$\lambda = \frac{Q[\mu_0 - \mu_*]}{m\alpha h(1 - \exp(-A^\beta))}, \quad F = \frac{f}{m\alpha^2}, \quad P = \frac{\mu_* - \mu_0 \exp(-A^\beta)}{\mu_0 - \mu_*}$$

$$A = S_* \sigma^{1/\beta}, \quad G = \frac{\gamma}{\sigma^{1/\beta}} \frac{v_0^2}{h^2} \frac{\mu_0 - \mu_*}{1 - \exp(-A^\beta)}$$

Приведенная постановка задачи может быть упрощена при учете малости параметра  $\kappa$  ( $\kappa \sim h^2$ ). В этом случае членом  $\kappa \partial V / \partial \tau$  в первом уравнении (6) можно пренебречь и тогда

$$T = v(S) \partial V / \partial \eta = \text{const}$$

Решение этого уравнения не единственно. Оно может быть сконструировано как совокупность пространственных структур – “доменов” [12, 13], представляющих собой области с различными значениями концентрации разрушенных связей  $s_j$  и скорости сдвига  $(\partial V / \partial \eta)_j$  (концентрация разрушенных связей и скорость сдвига внутри каждого “домена” не зависят от  $\eta$ ). При этом граничные условия (четвертое и пятое соотношения (6)) выполняются, если

$$\sum_{j=1}^J \left( \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_j Z_j = 1 - \frac{dX}{d\tau}, \quad \sum_{j=1}^J Z_j = 1$$

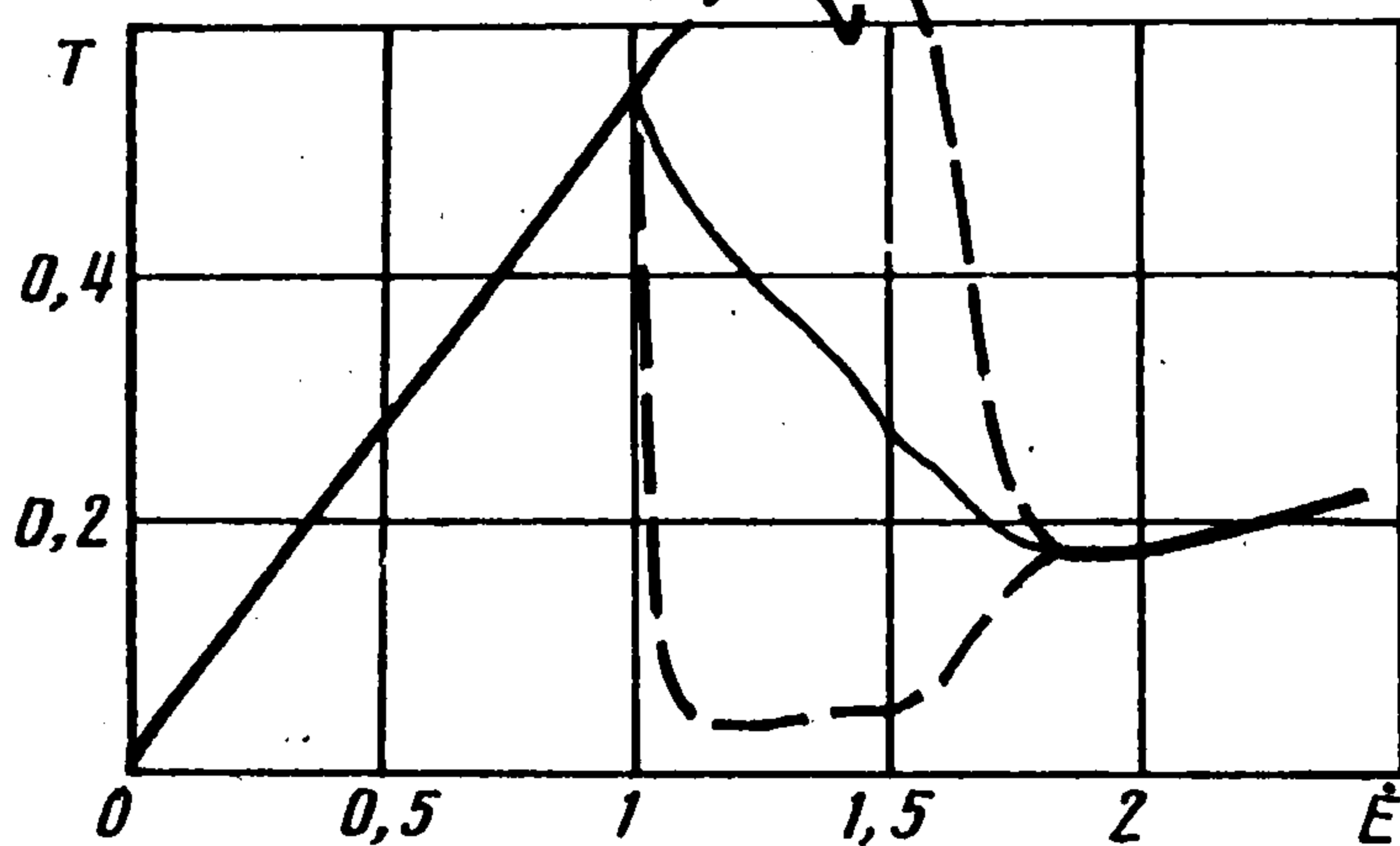
где  $J$  – число доменов,  $Z_j$  – толщина  $j$ -го домена.

Тогда система уравнений (6) сводится к нелинейной динамической системе вида

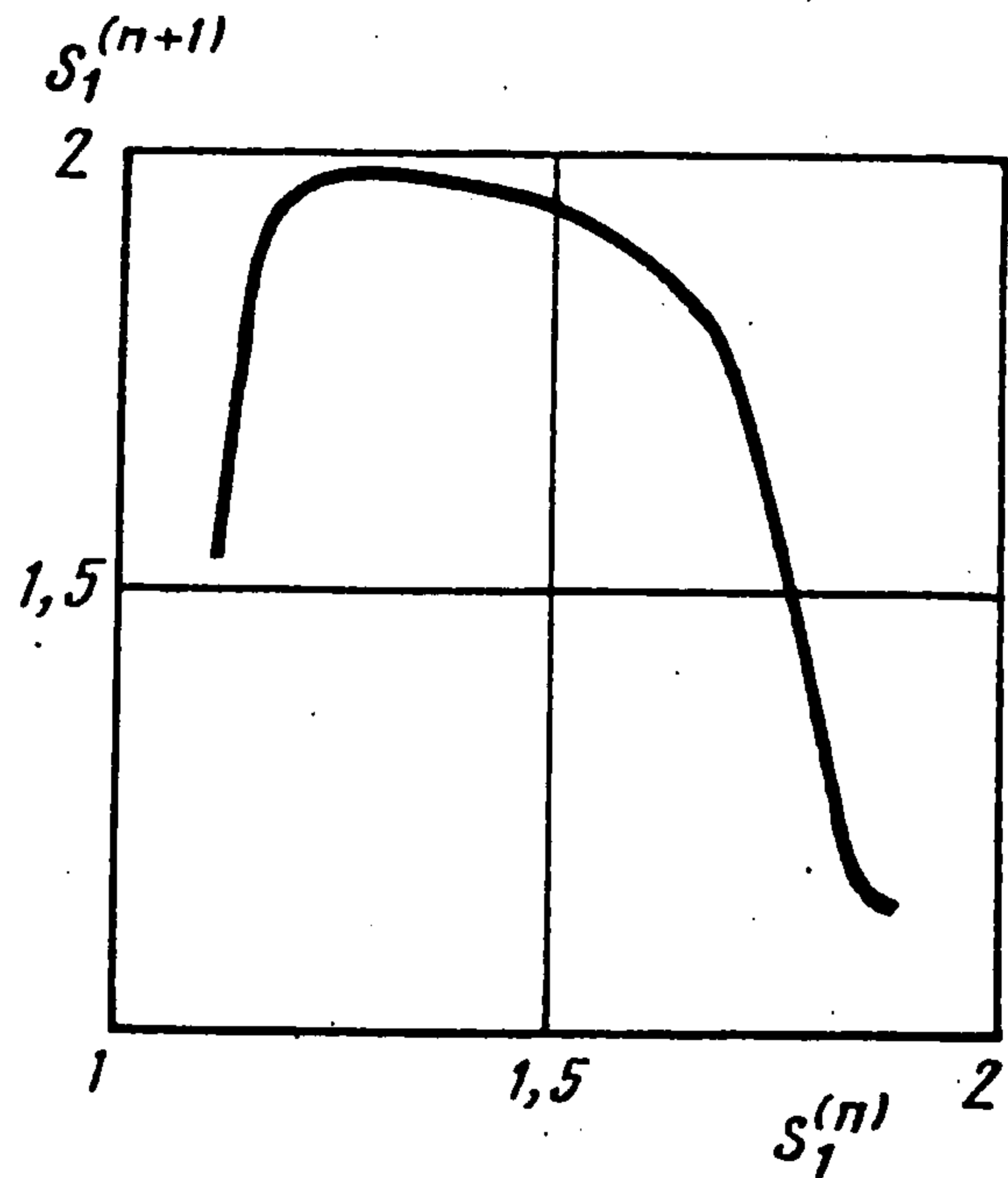
$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} - \lambda B + FX = 0, \quad B = \left( 1 - \frac{dX}{d\tau} \right) \left( \sum_{j=1}^J \frac{Z_j}{1/v(S_j)} \right)^{-1}$$

$$\frac{dS_j}{d\tau} = -S_j + A \left[ 1 - \exp\left(-GS_j \frac{B^2}{v(S_j)}\right) \right] \quad (7)$$

$$v(S_j) = P + \exp(-S_j^\beta), \quad j = 1, \dots, J$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Выше было показано, что согласно экспериментальным данным для моделирования детерминированного хаоса в ротационном вискозиметре достаточно использовать нелинейную динамическую систему четвертого порядка. Поэтому система (7) решалась численно для случая двух доменов. При этом фиксировались следующие значения безразмерных параметров:  $\beta = 25$ ,  $F = 17$ ,  $A = 4$ ,  $P = 0, 1$ ,  $Z_1 = Z_2 = 0,5$ ,  $\beta = 10$ . Исследовалось влияние безразмерной величины скорости сдвига  $\dot{E} = \sqrt{G}$  на структуру решений системы.

Результаты расчетов суммированы на фиг. 3, где показана зависимость безразмерного касательного напряжения  $T$  от  $\dot{E}$ . Эта зависимость характеризует положения равновесия рассматриваемой динамической системы, к которым в случае устойчивости решение стремится с течением времени. На фигуре эти устойчивые ветви отмечены жирными линиями. При малых значениях скорости сдвига ( $\dot{E} < 0,95$ ) структурные связи в жидкости не разрушаются. Имеет место простое сдвиговое течение жидкости с большой вязкостью, в которой не происходит разделения поля течения на доменные структуры. Если в начальный момент времени по каким-либо причинам имеет место разрушение части структурных связей, т.е.  $S_1|_{t=0} = S_{1*} \neq 0$ , то эти разрушенные связи со временем полностью восстанавливаются, т.е.  $S_1|_{t \rightarrow \infty} = 0$ .

С увеличением скорости сдвига  $\dot{E}$  ( $\dot{E} \geq 0,95$ ) происходит разделение поля течения на доменные структуры с разрушением части связей вблизи подвижной стенки. При этом нулевое состояние  $S_1 = 0$  теряет устойчивость с рождением нового положения равновесия  $S_1 \neq 0$ , которое в свою очередь при дальнейшем увеличении  $\dot{E}$  теряет устойчивость с образованием предельного цикла. Размах колебаний величины безразмерного касательного напряжения ( $T^{\max}(\dot{E})$  и  $T^{\min}(\dot{E})$ ) показан на фиг. 3 штриховыми линиями. Средние по времени значения  $T$  при этих автоколебаниях изображены на фиг. 3 тонкой сплошной линией.

При дальнейшем увеличении скорости сдвига  $\dot{E}$  имеет место процесс последовательного удвоения периода автоколебаний. Эта последовательность бифуркации удвоения периода при  $\dot{E} \geq \dot{E}_{\infty} = 1,52$  переходит в хаос. Анализ соответствующего этому хаосу одномерного отображения Лоренца (фиг. 4) показывает, что в исследуемой системе переход к хаосу реализуется по классическому сценарию Фейгенбаума. Об этом свидетельствует также то, что значения параметра  $G_n = \dot{E}_n^2$ , при которых происходит удвоение периода автоколебаний, подчиняются закону Фейгенбаума [14]  $G_n - G_{\infty} = c/\delta^n$ , где  $c$  — постоянная (в данном случае  $c = -6,54$ ),  $\delta$  — универсальная константа Фейгенбаума.

Для существования стохастического поведения необходимо выполнение условия размешивания, что обеспечивается экспоненциальным разбеганием траекторий в каждой точке аттрактора. Характер этого разбегания можно оценить, исследуя энтропию Колмогорова [7], которая определяется выражением

$$K = \tau^{-1} \ln(L(\tau)/L(0))$$

где  $L(0)$  и  $L(\tau)$  — расстояния между двумя точками в фазовом пространстве  $(X, \dot{X}, S_1, S_2)$  соответственно в начальный момент времени и через промежуток времени  $\tau$ . Вычисления показывают, что со временем величина энтропии Колмогорова выходит на положительный стационарный уровень  $K_\infty = 0,057$ .

При дальнейшем увеличении скорости сдвига  $\dot{E} > 1,67$  имеет место обратный каскад бифуркаций удвоения периода, который при  $\dot{E} = 1,87$  приводит к исчезновению автоколебаний с образованием устойчивого равновесия. Это равновесие характеризуется высокой степенью разрушения структурных связей ближнего к подвижной стенке домена. С увеличением  $\dot{E}$  число этих разрушенных связей возрастает, асимптотически стремясь к своему максимальному значению.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Белкин И.М., Виноградов Г.В., Леонов А.И. Ротационные приборы. Измерение вязкости и физико-механических характеристик материалов. М.: Машиностроение, 1966. 272 с.
2. Myerholtz R.W. Oscillating flow behavior of high-density polyethylene melts // J. Appl. Polymer Sci. 1967 V. 11. N. 5. P. 687–698.
3. Буевич Ю.А., Леонов А.И. Автоколебания в куэттовском течении несжимаемой максвелловской жидкости // ПМТФ. 1966. № 2. С. 103–105.
4. Карякин А.В., Леонов А.И. Об автоколебаниях при истечении полимерных расплавов из капилляра // ПМТФ. 1968. № 3. С. 110–114.
5. Pearson J.R.A., Petrie C.J.S. On the melt flow instability of extruded polymers // Proc. 4 the Intern. Congr. on Rheology. Providence. R.I. 1963. N.Y.: Wiley, 1965. Pt 3. P. 265–282.
6. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного: Введение. М.: Мир, 1990. 342 с.
7. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
8. Overdiep W.S., Van Vrevelen D.W. Studies of non-Newtonian flow. 1. Criterion of flow instability // J. Appl. Polym. Sci. 1965. V. 9. N. 8. P. 2779–2784.
9. Свалов А.М. Об одной модели тиксотропных систем // Коллоидный журнал. 1987. Т. 49. Вып. 4. С. 799–802.
10. Харин В.Т. Реология вязкоупругих тиксотропных жидкостей типа нефтей и полимерных растворов и расплавов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. Т. 3. С. 21–26.
11. Ахатов И.Ш., Хасанов М.М., Хусаинов И.Г. Авто- и стохастические колебания в жидкостях со сложными реофизическими свойствами // Тез. докл. Всесоюз. семинара по проблемам нефтегазопромышленной механики, посвященного 60-летию академика А.Х. Мирзаджанзаде, Баку. 1988. С. 86–87.
12. Столин А.М., Худяев С.И., Бучацкий Л.М. К теории сверханомалии вязкости структурированных систем // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. Т. 2. С. 430–433.
13. Столин А.М., Худяев С.И. Образование пространственно неоднородных состояний структурированной жидкости при сверханомалии вязкости // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 5. С. 1180–1184.
14. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физ. наук. 1983. Т. 141. Вып. 2. С. 343–374.