УДК 532.546

© 1993 г. П.А. Мазуров

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В СРЕДАХ С ДВОЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ

Строятся двойственные вариационные принципы стационарной однофазной фильтрации и двухфазной фильтрации несжимаемой жидкости в средах с двойной пористостью. Под средой с двойной пористостью понимаются две вложенные одна в другую среды различной пористости и проницаемости, связанные перетоком жидкости [1]. В основе построения вариационных принципов лежит принцип наименьшего рассеяния энергии [2, 3], который используется также для замыкания уравнений и определения структуры обобщенных сил. Вариационные принципы позволяют определять в средах поля давлений, перетоков и скоростей фильтрации. В стационарной однофазной фильтрации вариационные принципы полностью определяют решение задачи, в двухфазной фильтрации они справедливы при фиксированных насыщенностях.

1. Построим вариационные принципы стационарной однофазной фильтрации. Запишем уравнения неразрывности в средах f и p

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_f = Q, \quad \operatorname{div} \mathbf{q}_p = -Q \tag{1.1}$$

где $\mathbf{q}_f$, $\mathbf{q}_p$ – скорости фильтрации жидкости, Q – переток жидкости из среды p в среду f. Так как диссипация энергии определяется фильтрацией жидкости в средах f и p и перетоком между средами, диссипативный потенциал Ψ имеет вид $\Psi = \Psi(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p, Q)$. В частном случае

$$\Psi(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p, Q) = \Psi_f(\mathbf{q}_f) + \Psi_p(\mathbf{q}_p) + \Psi_Q(Q)$$

Здесь Ψ_f, Ψ_p, Ψ_Q – диссипативные потенциалы, характеризующие рассеяние энергии соответственно за счет фильтрации в средах и за счет перетока между средами. Диссипативные механизмы, определяемые потенциалами Ψ_f, Ψ_p, Ψ_Q, считаются независимыми [4]. Далее функционалы Ψ, Ψ_f, Ψ_p, Ψ_Q будем считать выпуклыми и гладкими. Из принципа наименьшего рассеяния энергии для стационарных процессов [2, 3] следует, что минимум функционала

$$I(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p, Q) = \int_\Omega \Psi(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p, Q)\, d\Omega \tag{1.2}$$

достигается на действительном поле переменных $\mathbf{q}_f^\circ$, $\mathbf{q}_p^\circ$, Q°. При этом искомые переменные должны удовлетворять граничным условиям и уравнениям неразрывности (1.1).

Вычислим вариацию функционала (1.2), которая в точке $(\mathbf{q}_f^\circ, \mathbf{q}_p^\circ, Q^\circ)$ должна равняться нулю. Введя множители Лагранжа λ_f, λ_p для учета ограничений (1.1), запишем

$$\delta I_\lambda = \delta \left[I(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p, Q) + \int_\Omega \lambda_f (\operatorname{div} \mathbf{q}_f - Q)\, d\Omega + \int_\Omega \lambda_p (\operatorname{div} \mathbf{q}_p + Q)\, d\Omega \right] \tag{1.3}$$

После преобразования получим

$$\delta I_\lambda = \int\limits_\Omega [(\partial\Psi/\partial q_{fi} - \lambda_{f,i})\,\delta q_{fi} + (\partial\Psi/\partial q_{pi} - \lambda_{p,i})\,\delta q_{pi} +$$

$$+ (\partial\Psi/\partial Q - \lambda_f + \lambda_p)\,\delta Q + (\operatorname{div} \mathbf{q}_f - Q)\,\delta\lambda_f +$$

$$+ (\operatorname{div} \mathbf{q}_p + Q)\,\delta\lambda_p]\, d\Omega + \int\limits_\Gamma \lambda_f\,\delta q_{fn}\, d\Gamma + \int\limits_\Gamma \lambda_p\,\delta q_{pn}\, d\Gamma \qquad (1.4)$$

где q_{fn}, q_{pn} – нормальные составляющие скоростей $\mathbf{q}_f$, $\mathbf{q}_p$ на границе Γ, Γ – граница области решения задачи Ω.

Из равенства

$$\delta I_\lambda = 0 \qquad (1.5)$$

следует, что коэффициенты λ_f, λ_p равны давлениям p_f, p_p, взятым с обратным знаком, и имеет место система уравнений (1.1) и

$$\partial\Psi/\partial q_{fi} = -p_{f,i}, \quad \partial\Psi/\partial q_{pi} = -p_{p,i}, \quad \partial\Psi/\partial Q = p_p - p_f \qquad (1.6)$$

где первые два уравнения – законы фильтрации, третье – уравнение для перетока. Соотношения (1.6) определяют структуру обобщенных сил $X_1 = -\nabla p_f$, $X_2 = -\nabla p_p$, $X_3 = p_p - p_f$. На границе Γ для каждой среды f и p должны быть заданы нормальная скорость фильтрации или равенство нулю давления.

Из соотношения (1.4) видно, что для учета граничных условий вида

$$\begin{aligned} &q_{fn} = \overset{\circ}{q}_{fn}, \quad q_{pn} = \overset{\circ}{q}_{pn} \ \text{на}\ \Gamma_q \\ &p_f = \overset{\circ}{p}_f, \quad p_p = \overset{\circ}{p}_p \ \text{на}\ \Gamma_p \end{aligned} \qquad (1.7)$$

вместо функционала (1.2) необходимо минимизировать функционал

$$I_1(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p, Q) = \int\limits_\Omega \Psi(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p, Q)\, d\Omega + I_{10},\ I_{10} = \int\limits_{\Gamma_p} (\overset{\circ}{p}_f q_{fn} + \overset{\circ}{p}_p q_{pn})\, d\Gamma \qquad (1.8)$$

Подробнее граничные условия рассмотрим в разд. 2. Здесь только отметим, что деление границы $\Gamma = \Gamma_q + \Gamma_p$ на части Γ_q, Γ_p для каждой среды может быть различным. Таким образом, вариационный принцип

$$\inf_{\mathbf{q}_f,\, \mathbf{q}_p,\, Q \in (1.1),\, (1.7)} I_1(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p, Q) \qquad (1.9)$$

эквивалентен выполнению системы уравнений (1.1), (1.6) и граничных условий (1.7).

Применяя методы двойственности [5], получим, что двойственной к вариационной задаче (1.9) является задача

$$\sup_{p_f,\, p_p \in (1.7)} [-I_2(p_f, p_p)] \qquad (1.10)$$

т.е.

$$\inf_{\mathbf{q}_f,\, \mathbf{q}_p,\, Q \in (1.1),(1.7)} I_1(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p, Q) = \sup_{p_f,\, p_p \in (1.7)} [-I_2(p_f, p_p)]$$

где

$$I_2(p_f, p_p) = \int\limits_\Omega \Phi(\nabla p_f, \nabla p_p, p_p - p_f)\, d\Omega + I_{20},\ I_{20} = \int\limits_{\Gamma_q} (\overset{\circ}{q}_{fn} p_f + \overset{\circ}{q}_{pn} p_p)\, d\Gamma,$$

$\Phi(\nabla p_f, \nabla p_p, p_p - p_f)$ – сопряженный диссипативный потенциал, связанный с $\Psi(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p, Q)$ преобразованием Юнга–Фенхеля [5].

Уравнения (1.6) для задачи (1.10) имеют вид

$$q_{fi} = -\partial\,\Phi/\partial\,p_{f,i}, \quad q_{pi} = -\partial\,\Phi/\partial\,p_{p,i}, \quad Q = \partial\,\Phi/\partial\,(p_p - p_f)$$

Переходом от задачи (1.9) к двойственной по одной или по двум переменным определяются еще шесть вариационных задач, эквивалентных решению системы (1.1), (1.6), (1.7). Считая для наглядности диссипативные механизмы несвязанными, запишем следующие характерные вариационные задачи:

$$\inf_{\mathbf{q}_f, Q \in (1.1),(1.7)} \; \sup_{p_p \in (1.7)} I_3\,(\mathbf{q}_f, p_p, Q), \quad \inf_{\mathbf{q}_f} \; \sup_{p_f, p_p \in (1.7)} I_4\,(\mathbf{q}_f, p_p, p_f)$$

где

$$I_3\,(\mathbf{q}_f, p_p, Q) = \int_\Omega [\Psi_f\,(\mathbf{q}_f) - \Phi_p\,(\nabla\,p_p) + \Psi_Q\,(Q) - Q\,p_p]\; d\,\Omega + I_{30}$$

$$I_{30} = \int_{\Gamma_p} p_f^\circ q_{fn}\, d\,\Gamma - \int_{\Gamma_q} q_{pn}^\circ\, p_p\, d\,\Gamma$$

$$I_4\,(\mathbf{q}_f, p_p, p_f) = \int_\Omega [\Psi_f\,(\mathbf{q}_f) - \Phi_p\,(\nabla\,p_p) - \Phi_Q\,(p_p - p_f) + q_f\,\nabla\,p_f]\; d\,\Omega - I_{20}$$

Переменную Q в вариационных задачах можно исключить. Тогда задачи для функционалов I_1, I_3 с использованием ограничения

$$\operatorname{div}\mathbf{q}_f + \operatorname{div}\mathbf{q}_p = 0 \tag{1.11}$$

могут быть записаны соответственно в виде

$$\inf_{\mathbf{q}_f,\,\mathbf{q}_p \in (1.7),(1.11)} I_1'\,(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p), \quad \inf_{\mathbf{q}_f \in (1.7)} \; \sup_{p_p \in (1.7)} I_3'\,(\mathbf{q}_f, p_p)$$

где

$$I_1'\,(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p) = \int_\Omega [\Psi_f\,(\mathbf{q}_f) + \Psi_p\,(\mathbf{q}_p) + \Psi_Q\,(\operatorname{div}\mathbf{q}_f)]\; d\,\Omega + I_{10}$$

$$I_3'\,(\mathbf{q}_f, p_p) = \int_\Omega [\Psi_f\,(\mathbf{q}_f) - \Phi_p\,(\nabla p_p) + \Psi\,(\operatorname{div}\mathbf{q}_f) - p_p \operatorname{div}\mathbf{q}_f]\; d\,\Omega + I_{30}$$

2. Перейдем к построению вариационных принципов двухфазной фильтрации. Запишем уравнения неразрывности в среде f, в среде p, связь между давлениями в фазах и выражение для производства энтропии

$$-\operatorname{div}\mathbf{q}_{f1} = m_f\,s_{f,t} - Q_1, \quad -\operatorname{div}\mathbf{q}_{f2} = -m_f\,s_{f,t} - Q_2 \tag{2.1}$$

$$-\operatorname{div}\mathbf{q}_{p1} = m_p\,s_{p,t} + Q_1, \quad -\operatorname{div}\mathbf{q}_{p2} = -m_p\,s_{p,t} + Q_2 \tag{2.2}$$

$$p_{f1} - p_{f2} = p_{fc}\,(s_f), \quad p_{p1} - p_{p2} = p_{pc}\,(s_p) \tag{2.3}$$

$$\sigma = \mathbf{XY} = \mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1 + \ldots + \mathbf{X}_6\mathbf{Y}_6$$

Здесь m_f, m_p – пористости, Q_1, Q_2 – перетоки первой и второй фаз из среды p в среду f, s_f, s_p – насыщенности первой фазы, $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_6)$ – обобщенные силы, $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_6)$ – обобщенные скорости; $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{q}_{f1}$, $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{q}_{f2}$, $\mathbf{Y}_3 = \mathbf{q}_{p1}$, $\mathbf{Y}_4 = \mathbf{q}_{p2}$, $\mathbf{Y}_5 = Q_1$, $\mathbf{Y}_6 = Q_2$; $\mathbf{X}_1 = -\nabla p_{f1}$, $\mathbf{X}_2 = -\nabla p_{f2}$, $\mathbf{X}_3 = -\nabla p_{p1}$, $\mathbf{X}_4 = -\nabla p_{p2}$, $\mathbf{X}_5 = p_{p1} - p_{f1}$, $\mathbf{X}_6 = p_{p2} - p_{f2}$. В рамках гипотезы нормальной диссипации [4, 6] существует потенциал диссипации $\Psi(\mathbf{Y})$, т.е. выпуклый полунепрерывный снизу собственный функционал, такой, что

$$\mathbf{X} \in \partial\,\Psi\,(\mathbf{Y}) \tag{2.4}$$

где $\mathbf{X}$ – субградиент функционала $\Psi\,(\mathbf{Y})$ в точке $\mathbf{Y}$. Из (2.4) вытекает обратное соотношение [6, 7] .

$$\mathbf{Y} \in \partial \Phi(\mathbf{X}) \tag{2.5}$$

где $\Phi(\mathbf{X})$ – сопряженный потенциал диссипации. Любое из соотношений (2.4), (2.5) замыкает систему уравнений (2.1) – (2.3).

Следующие утверждения эквивалентны [6, 7]: 1) $\mathbf{X}' \in \partial \Psi(\mathbf{Y}')$, 2) $\Psi(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}'\mathbf{Y}$ достигает минимума по $\mathbf{Y}$ в точке $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'$, 3) $\mathbf{Y}' \in \partial \Phi(\mathbf{X}')$, 4) $\Phi(\mathbf{X}) - \mathbf{X}\mathbf{Y}'$ достигает минимума по $\mathbf{X}$ в точке $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$. Они являются основой построения вариационных принципов.

Далее функционалы $\Psi(\mathbf{Y})$, $\Phi(\mathbf{X})$ будем считать гладкими:

$$\mathbf{X} = \operatorname{grad} \Psi(\mathbf{Y}), \quad \mathbf{Y} = \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{X}) \tag{2.6}$$

Систему уравнений (2.1) – (2.3), (2.6) запишем в виде

$$\mathbf{q}_{fk} = -\partial \Phi / \partial \nabla p_{fk} \quad \text{или} \quad -\nabla p_{fk} = \partial \Psi / \partial \mathbf{q}_{fk}$$

$$\mathbf{q}_{pk} = -\partial \Phi / \partial \nabla p_{pk} \quad \text{или} \quad -\nabla p_{pk} = \partial \Psi / \partial \mathbf{q}_{pk}$$

$$Q_k = \partial \Phi / \partial (p_{pk} - p_{fk}) \quad \text{или} \quad p_{pk} - p_{fk} = \partial \Psi / \partial Q_k, \quad k = 1, 2 \tag{2.7}$$

$$p_{f1} - p_{f2} = p_{fc}(s_f), \quad p_{p1} - p_{p2} = p_{pc}(s_p), \quad \operatorname{div} \mathbf{q}_f = Q, \quad \operatorname{div} \mathbf{q}_p = -Q \tag{2.8}$$

$$-\operatorname{div} \mathbf{q}_{f1} = m_f s_{f,t} - Q_1 \quad \text{или} \quad -\operatorname{div} \mathbf{q}_{f2} = -m_f s_{f,t} - Q_2 \tag{2.9}$$

$$-\operatorname{div} \mathbf{q}_{p1} = m_p s_{p,t} + Q_1 \quad \text{или} \quad -\operatorname{div} \mathbf{q}_{p2} = -m_p s_{p,t} + Q_2$$

$$(Q = Q_1 + Q_2, \ \mathbf{q}_f = \mathbf{q}_{f1} + \mathbf{q}_{f2}, \quad \mathbf{q}_p = \mathbf{q}_{p1} + \mathbf{q}_{p2})$$

Построим вариационный принцип в обобщенных скоростях. Из утверждений 1) – 4) видно, что для действительно происходящего в области Ω процесса $(\mathbf{X}^\circ, \mathbf{Y}^\circ)$ величина $\mathbf{Y}^\circ$, соответствующая $\mathbf{X}^\circ$, определяется из решения задачи

$$\inf_{\mathbf{Y}} B_1(\mathbf{Y}) = \inf_{\mathbf{Y}} \int_\Omega [\Psi(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}^\circ \mathbf{Y}] \, d\Omega \tag{2.10}$$

эквивалентной выполнению определяющих соотношений (2.7) и соответствующей общему виду принципа наименьшего рассеяния энергии [2, 3]. Вариационную задачу (2.10) используем для построения вариационного принципа, в котором для определения $\mathbf{Y}^\circ$ было бы достаточно граничных значений величины $\mathbf{X}^\circ$ вместо знания $\mathbf{X}^\circ$ во всей области Ω. Преобразуем интеграл $\int_\Omega \mathbf{X}^\circ \mathbf{Y} d\Omega$, используя выражения для давлений

$$p_f = l_f p_{1f} + (1 - l_f) p_{2f}, \quad p_p = l_p p_{1p} + (1 - l_p) p_{2p}$$

где l_f может равняться нулю, единице, насыщенности s_f или функции Баклея–Леверетта; аналогично для l_p. В результате получим функционал

$$I_1(\mathbf{Y}) = \int_\Omega [\Psi(\mathbf{Y}) + \nabla((1 - l_f) p_{fc}) \mathbf{q}_{f1} + \nabla((1 - l_p) p_{pc}) \mathbf{q}_{p1} -$$

$$- \nabla(l_f p_{fc}) \mathbf{q}_{f2} - \nabla(l_p p_{pc}) \mathbf{q}_{p2} - Q_1 ((1 - l_p) p_{pc} - (1 - l_f) p_{fc}) +$$

$$+ Q_2 (l_p p_{pc} - l_f p_{fc})] \, d\Omega + I_{10} \tag{2.11}$$

Определение минимума функционала (2.11) при ограничениях, соответствующим двум последним соотношениям (2.8) и

$$q_{fn} = \overset{\circ}{q}_{fn}, \quad q_{pn} = \overset{\circ}{q}_{pn} \quad \text{на } \Gamma_q \tag{2.12}$$

эквивалентно решению системы уравнений (2.7), (2.8) при граничных условиях (2.12) и

$$p_f = \overset{\circ}{p}_f, \quad p_p = \overset{\circ}{p}_p \quad \text{на } \Gamma_p \tag{2.13}$$

Подобным образом из задачи

$$\inf_{\mathbf{X}} B_2(\mathbf{X}) = \inf_{\mathbf{X}} \int_{\Omega} [\Phi(\mathbf{X}) - \mathbf{X}\mathbf{Y}^\circ]\, d\Omega \tag{2.14}$$

строится вариационный принцип в давлениях

$$\inf_{p_f, p_p \in (2.13)} I_2(p_f, p_p) = \inf_{p_f, p_p \in (2.13)} \left[\int \Phi(\mathbf{X})\, d\Omega + I_{20}\right] \tag{2.15}$$

Имеет место равенство

$$\inf_{\mathbf{Y} \in (2.8), (2.12)} I_1(\mathbf{Y}) = \sup_{p_f, p_p \in (2.13)} [-I_2(p_f, p_p)]$$

Задача (2.15) является двойственной к задаче

$$\inf_{\mathbf{Y} \in (2.8), (2.12)} I_1(\mathbf{Y}) \tag{2.16}$$

по всем переменным $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_6$. Переходя от задачи (2.16) к двойственным по различным группам переменных $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_6$, получим весь набор двойственных вариационных задач.

При линейных законах фильтрации (законах Дарси) и линейных законах для перетоков

$$\mathbf{q}_{fk} = -(k_f/\mu_k) f_{fk}(s_f) \nabla p_{fk}, \quad \mathbf{q}_{pk} = -(k_p/\mu_k) f_{pk}(s_p) \nabla p_{pk}$$

$$Q_k = b_k (p_{pk} - p_{fk}) + c_k, \quad k = 1, 2$$

что соответствует квадратичным функционалам Ψ_f, Ψ_p, Ψ_Q, задача (2.16) приводится к виду

$$\inf_{\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p, Q \in (2.8), (2.12)} I_1(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p Q) \tag{2.17}$$

где

$$I_1(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_p, Q) = \int_{\Omega} [\Psi_f(\mathbf{q}_f) + \Psi_p(\mathbf{q}_p) + \Psi_Q(Q)]\, d\Omega + I_{10}$$

$$\Psi_f(\mathbf{q}_f) = \frac{1}{2} \frac{\mu_1}{k_f \varphi_f(s_f)} |\mathbf{q}_f|^2 + [F_f(s_f) \nabla p_{fc} - \nabla(l_f p_{fc})]\, \mathbf{q}_f$$

$$\Psi_Q(Q) = (b_1 + b_2)^{-1} (Q^2/2 - [b_1((1-l_p) p_{pc} - (1-l_f) p_{fc}) +$$

$$+ b_2 (l_f p_{fc} - l_p p_{pc}) + (c_1 + c_2)]\, Q)$$

$$\varphi_f(s_f) = f_{f1}(s_f) + (\mu_1/\mu_2) f_{f2}(s_f), \quad F_f(s_f) = f_{f1}(s_f)/\varphi_f(s_f)$$

$$b_k = b_k(s_f, s_p), \quad c_k = c_k(s_f, s_p)$$

k_f, k_p – абсолютные проницаемости; μ_1, μ_2 – вязкости; $f_{fk}(s_f)$, $f_{pk}(s_p)$ $(k = 1, 2)$ – относительные фазовые проницаемости. Выражения для $\Psi_p(\mathbf{q}_p)$, $\varphi_p(s_p)$, $F_p(s_p)$ имеют аналогичный вид.

Вариационный принцип (2.17) эквивалентен решению системы уравнений, имеющей вид (1.1), (1.6), с граничными условиями (1.7). Таким образом, все двойственные вариационные принципы имеют вид, подобный вариационным принципам стационарной однофазной фильтрации.

Полученные вариационные принципы позволяют определять поля скоростей фильтрации, перетоков и давлений при фиксированных насыщенностях. Для учета изменения s_f, s_p служат уравнения (2.9).

При выводе вариационных принципов не требуется знание граничных условий, необходимых для решения задачи. Задаваемые на границе комбинации искомых переменных, при которых существует решение задачи, выявляются из анализа граничных интегралов в вариационных принципах, получаемых путем преобразования исходных вариационных задач (2.10), (2.14).

В качестве примера в вариационном принципе (2.15), получаемом из задачи (2.14) без учета граничных условий, интеграл I_{20} должен браться по всей границе Г, что соответствует выполнению граничных условий $q_{fn}|_\Gamma = q^\circ_{fn}$, $q_{pn}|_\Gamma = q^\circ_{pn}$. Для учета граничных условий (2.12), (2.13) интеграл I_{20} должен браться по части границы Γ_q, а варьируемые переменные p_f, p_p удовлетворять условию (2.13), что видно из представления

$$\int_\Gamma (q^\circ_{fn} p_f + q^\circ_{pn} p_p)\, d\Gamma = \int_{\Gamma_q} (q^\circ_{fn} p_f + q^\circ_{pn} p_p)\, d\Gamma + \int_{\Gamma_p} (q^\circ_{fn} p^\circ_f + q^\circ_{pn} p^\circ_p)\, d\Gamma \tag{2.18}$$

Интеграл по Γ_p в (2.18) опускается как постоянная величина. При равенстве $p_f = p_p = p$ на Γ_p для определения решения достаточно задания нормальной составляющей скорости $q = q_f + q_p$:

$$I_{20} = \int_{\Gamma_q} q^\circ_n p\, d\Gamma$$

При равенстве $p_f = p_p = p = \text{const}$ на Γ_q для определения решения достаточно задания на Γ_q расхода G°

$$I_{20} = pG^\circ$$

где p – величина, хотя и постоянная на Γ_q, но неизвестная.

Автор благодарит А.И. Никифорова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
2. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика: Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. 304 с.
3. *Базаров И.П.* Термодинамика. М.: Высш. шк., 1983. 344 с.
4. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983. 399 с.
5. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
6. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения: Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 492 с.
7. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.

Казань

Поступила в редакцию
17.VI.1991