УДК 532.593

 А.М. Тер-Крикоров

О СИЛАХ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ПРЕПЯТСТВИЕ В СТРАТИФИЦИРОВАННОМ ПОТОКЕ

При общих ограничениях на распределение плотности и скорости набегающего потока рассматривается пространственный установившийся поток тяжелой несжимаемой идеальной жидкости, обтекающий препятствие с твердой границей. Выводится система двух нелинейных уравнений второго порядка, описывающих движение жидкости, обсуждается постановка граничной задачи, выводятся формулы для вычисления силы, действующей на препятствие, рассматриваются упрощения связанные с аппроксимацией препятствия системой диполей, распределенной по поверхности препятствия. В качестве примера рассматривается обтекание шара неограниченным потоком экспоненциально стратифицированной жидкости. В предположении малости параметра стратификации вычисляется главный член в асимптотической формуле, выражающей зависимость сопротивления от радиуса шара и параметров стратификации.

1. Основные уравнения. Рассмотрим трехмерный слоистый установившийся поток тяжелой несжимаемой идеальной жидкости со свободной границей и с конечным числом поверхностей раздела внутри жидкости, на которых терпят разрывы плотность ρ и тангенциальная составляющая скорости $\mathbf{v}$. Для упрощения формулировок будем считать, что над свободной границей расположена покоящаяся жидкость нулевой плотности. В случае конечной глубины твердое дно горизонтально. Поток обтекает источник возмущений, помещенный внутри жидкости и занимающий область Ω. Начало декартовой системы координат выберем на невозмущенной свободной границе, ось z направлена вертикально вверх, ось x – вдоль невозмущенного потока. Выбирая характерный линейный размер H_0, скорость U_0 и плотность ρ_0, запишем уравнения движения в безразмерных переменных. Плотность ρ и скорость v_x невозмущенного одномерного потока задаются кусочно-гладкими функциями $\rho(z)$ и $U(y, z)$, терпящими разрывы при переходе через плоскости $z = z_k$, причем $-\infty < z_n < \ldots < z_0 = 0$, $d\rho \geqslant 0$, $U \geqslant c > 0$.

При $x \to -\infty$ поток асимптотически невозмущен, вдоль траекторий жидких частиц координата x возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Траектория, проходящая через произвольную точку (x, y, z), при $x \to -\infty$ асимптотически приближается к некоторой прямой $Y = \eta(x, y, z)$, $Z = \zeta(x, y, z)$. Так как поток установившийся, то функции η и ζ сохраняют постоянные значения на траекториях, являясь интегралами уравнений движения, следовательно $(\mathbf{v}, \nabla\eta) = 0$, $(\mathbf{v}, \nabla\zeta) = 0$.

Предполагая, что $\nabla\eta$ и $\nabla\zeta$ независимы, положим

$$\mathbf{v} = U(\eta, \zeta)\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = [\nabla\eta, \nabla\zeta] \tag{1.1}$$

В силу (1.1) уравнение неразрывности удовлетворено. Поскольку любая достаточно гладкая функция от интегралов движения сама является таким интегралом, то функции $\rho(\zeta)$, $U(\eta, \zeta)$ и полная энергия $H(\eta, \zeta)$ являются интегралами уравнений движения и справедлив интеграл Бернулли

$$p + \nu\rho(\zeta)z + \tfrac{1}{2}\rho(\zeta)U^2(\eta, \zeta)b^2 = H(\eta, \zeta), \quad \nu = gH_0/U_0^2 \tag{1.2}$$

где p – давление.

Проектируя уравнение Эйлера на направление $\nabla\eta$ и $\nabla\zeta$, используя равенство (1.2) и асимптотические при $x \to -\infty$ равенства $y = \eta$, $z = \zeta$ после стандартных преобразований получаем систему двух квазилинейных уравнений второго порядка

$$\alpha^2(\eta,\zeta)(\mathrm{rot}[\nabla\eta,\nabla\zeta],\nabla\zeta) = \tfrac{1}{2}(|[\nabla\eta,\nabla\zeta]|^2 - 1)\partial\alpha^2(\eta,\zeta)/\partial\eta$$
$$-\alpha^2(\eta,\zeta)(\mathrm{rot}[\nabla\eta,\nabla\zeta],\nabla\eta) = \nu\rho'(\zeta)(z-\zeta) + \tfrac{1}{2}(|[\nabla\eta,\nabla\zeta]|^2 - 1)\partial\alpha^2(\eta,\zeta)/\partial\zeta \tag{1.3}$$
$$\alpha^2(\eta,\zeta) = \rho(\zeta)U^2(\eta,\zeta)$$

Сформулируем граничные условия. Скачок произвольной функции Φ при переходе через k-ю поверхность раздела будем обозначать $[\Phi]_k$. Если $p_{-\infty}$ – давление в невозмущенном потоке, то

$$[p - p_{-\infty}]_k = [\eta]_k = [\zeta]_k = 0, \quad k = 1, \ldots, n \tag{1.4}$$

$$\zeta|_{z=-H} = -H \tag{1.5}$$

Для бесконечно глубокой жидкости условие (1.5) заменяется условием ограниченности $\nabla(\eta - y)$ и $\nabla(\zeta - z)$ в области течения. Кроме того, накладываются условия излучения, обеспечивающие более высокий порядок убывания $\nabla(\eta - y)$ и $\nabla(\zeta - z)$ при $x \to -\infty$ по сравнению с порядком убывания при $x \to +\infty$.

На границе $\partial\Omega$ твердого тела Ω выполнено условие непротекания

$$(\nabla\eta, \nabla\zeta, \mathrm{N}) = 0 \tag{1.6}$$

где N – вектор нормали к $\partial\Omega$. В окрестности неособой точки гладкая поверхность $\partial\Omega$ может быть задана явным уравнением, например $z = z(x, y)$. В этой окрестности условие (1.6) принимает вид

$$\partial(\eta|_{\partial\Omega}, \zeta|_{\partial\Omega})/\partial(x, y) = 0 \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует, что в рассматриваемой окрестности выполнено по крайней мере одно из трех условий: $\eta = \mathrm{const}$, $\zeta = \mathrm{const}$, $\zeta = f(\eta)$. Ограниченная гладкая замкнутая поверхность $\partial\Omega$ может быть разрезана на конечное число поверхностей $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$, на каждой из которых выполнено по крайней мере одно из условий

$$\eta|_{\Sigma_i} = \mathrm{const}, \quad \zeta|_{\Sigma_i} = \mathrm{const}, \quad \zeta|_{\Sigma_i} = f(\eta|_{\Sigma_i}) \tag{1.8}$$

Выбор поверхностей Σ_i и одного из условий (1, 8) на каждой из поверхностей является существенным элементом математической модели обтекания твердого тела, но еще не обеспечивает однозначности решения. Следуя классической идее Жуковского в теории крыла, дополнительные условия на границе обтекаемого тела можно связать со структурой множества критических точек на поверхности $\partial\Omega$, т.е. с фазовой картиной траекторий жидких частиц на поверхности $\partial\Omega$. Как показывает эксперимент [1], фазовая картина зависит от формы тела и от диапазонов изменения физических параметров потока. В некоторых практически важных случаях фазовая картина допускает достаточно простое описание [2].

Будем рассматривать хорошо обтекаемые тела (например выпуклые тела, полученные вращением гладкой кривой вокруг оси, параллельной оси x). Если h – характерный размер тела, N – число Брента–Вяйсяля и $\mathrm{Fr} = U_0/\mathrm{N}h > 1$, $U(y, z) = U_0$, то, как показывает эксперимент [1], фазовая картина имеет такую же структуру, что и при потенциальном обтекании тела однородным потоком. На поверхности $\partial\Omega$ есть только две критические точки A и B. Приходящая в точку A траектория разветвляется в этой точке на пучок траекторий, сходящийся затем в точке B. Граничные условия на $\partial\Omega$ принимают вид

$$\eta|_{\partial\Omega} = \eta_0, \quad \zeta|_{\partial\Omega} = \zeta_0 \tag{1.9}$$

причем в случае тела вращения постоянная $\eta_0 = 0$. Постоянная ζ_0 должна быть определена в процессе решения задачи обтекания [3].

В случае $\mathrm{Fr} < 1$ картина фазовых траекторий на $\partial\Omega$ будет более сложной. Пусть Ω – тело вращения, Γ – сечение $\partial\Omega$ плоскостью xz. Эксперимент показывает [1], что критические точки потока расположены на двух дугах Γ_1 и Γ_2, отсекаемых от кривой Γ двумя плоскостями $z = h_1$ и $z = h_2$. При $z \in [h_1, h_2]$ фазовые кривые будут сечениями поверхности $\partial\Omega$ плоскостями $z = \mathrm{const}$. При $z > h_2$ и $z < h_1$ фазовые траектории имеют вид пучков, лежащих на $\partial\Omega$ и сходящихся в концах дуг Γ_1 и Γ_2. Предлагается следующая модель граничных условий на $\partial\Omega$:

$$\zeta = \zeta_1, \quad z < h_1; \quad \zeta = \zeta_2, \quad z > h_2; \quad \zeta = f(z), \quad h_1 < z < h_2 \tag{1.10}$$

Функция $f(z)$ возрастает на $[h_1, h_2]$ от значения ζ_1 до значения ζ_2. Постоянные h_1 и h_2 определяются из того условия, что частицы, лежащие на траекториях, приходящих в концы дуг Γ_1 и Γ_2, обладают достаточной энергией для достижения ближайшей вершины тела Ω. Функцию $f(z)$ можно пытаться аппроксимировать линейной функцией.

Предлагаемая модель безотрывного обтекания будет нереалистичной в случае, когда в пограничном слое около тела происходит интенсивный процесс образования и срыва вихрей. Вероятно, в рамках идеальной жидкости в этом случае необходимо развивать модели струйных течений. В экспериментальной работе [4] содержатся данные о влиянии процессов диффузии в неоднородной жидкости на картину обтекания.

2. **Линеаризация.** Положим $\zeta = z - w$, $\eta = y - u$ и будем считать u и w малыми первого порядка. Отбрасывая в уравнениях (1.1)–(1.4) малые высших порядков, получаем:

$$v_x = U(y,z)\left(1 - \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right), \quad v_y = U(y,z)\frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_z = U(y,z)\frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.1}$$

$$\alpha^2(y,z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha^2(y,z)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right) = 0 \tag{2.2}$$

$$\alpha^2(y,z)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha^2(y,z)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right) - \nu\rho'(z)w = 0$$

$$\left[\alpha^2(y,z)\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \nu\rho(z)w\right]_k = [u]_k = [w]_k = 0 \tag{2.3}$$

$$w|_{z=-H} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

В том случае, когда скорость $U(y, z)$ не зависит от y, система уравнений (2.2) и граничных условий (2.3) приводится к стандартному виду

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha^2(z)\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \alpha^2(z)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \nu\rho'(z)w\right) - \nu\rho'(z)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}, \quad w|_{z=-H} = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\alpha^2(z)\frac{\partial w}{\partial z} - \nu\rho w\right) - \nu\rho\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_k = [w]_k = [u]_k = 0, \quad k = 0, \ldots, n$$

Линеаризованные уравнения хорошо описывают поток на достаточном удалении от источника возмущений.

3. Сила, действующая на препятствие. Пусть S – замкнутая поверхность, содержащая внутри область Ω, K_x – проекция количества движения на ось x, D – сила, действующая на препятствие со стороны жидкости. В силу закона изменения количества движения

$$D = -\int_S (p\cos nx + \rho v_x v_n)\, dS \tag{3.1}$$

Подставляя в (3.1) значение давления из уравнения Бернулли (1.2) и обозначая через $p_0(z)$ давление в невозмущенном потоке, получаем

$$D = -\int_S \rho(v_x v_y\, dzdx + v_x v_z\, dxdy) + \int_S (\tfrac{1}{2}\rho(v_y^2 + v_z^2 - v_x^2 - U^2) +$$
$$+ \nu\rho(\zeta)(z - \zeta) - p_0(\zeta))dydz \tag{3.2}$$

Для любой гладкой функции $\operatorname{div}(F(\eta,\zeta)\mathbf{v}) = 0$ и в силу теоремы Остроградского–Гаусса

$$\int_S \rho(\zeta)U(\eta,\zeta)(v_x\, dydz + v_y\, dzdx + v_z\, dxdy) = 0 \tag{3.3}$$

Воспользовавшись равенствами

$$p_0'(\zeta) = -\nu\rho(\zeta), \quad \int_S p_0(z)\, dydz = 0, \quad R = 2\int_0^1 \tau\rho'(z + \tau w)\, d\tau$$

$$p_0(z) - p_0(\zeta) - \nu p_0'(\zeta)(z - \zeta) = -\tfrac{1}{2}\nu w^2 R(z, w)$$

и вычитая из равенства (3.2) равенство (3.3), получаем

$$D = -\int_S \rho(\zeta)(v_x - U)(v_y\, dzdx + v_z\, dxdy) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\int_S (\rho(\zeta)(v_y^2 + v_z^2 - (v_x - U)^2) - \nu R(z, w)w^2)dydz \tag{3.4}$$

Если поверхность S достаточно удалена от Ω, то можно в формулу (3.4) подставить линейные приближения (2.1) и воспользовавшись тем, что $R(z, 0) = \rho'(z)$, получить

$$D = -\int_S \alpha^2(y,z)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)(u_x\, dzdx - w_x\, dxdy) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\int_S \left(\alpha^2(y,z)\left(u_x^2 + w_x^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right) - \nu\rho'(z)w^2\right)dydz \tag{3.5}$$

В плоском случае поверхностный интеграл нужно заменить на криволинейный и положить $u = 0$ [5].

Преобразуем формулу (3.5), используя систему уравнений и граничных условий (2.1)–(2.3). Умножая первое уравнение (2.2) на w, второе на u, затем вычитая первый результат из второго и подставляя полученное выражение в формулу (3.5), найдем

$$D = \frac{1}{2}\int_S \alpha^2(y,z)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dydz +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_S \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha^2(y,z)u\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha^2(y,z)w\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)\right)dydz -$$

$$- \frac{1}{2}\int_S \alpha^2(y,z)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dzdx - \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dxdy\right)$$

Возьмем в качестве S боковую поверхность параллелепипеда $\xi_1 \leqslant x \leqslant \xi$, $-\eta \leqslant y \leqslant \eta$, $-H \leqslant z \leqslant 0$. Устремляя $\xi_1 \to -\infty$, $\xi \to +\infty$, $\eta \to +\infty$ и учитывая граничные условия на дне и свободной границе, получаем

$$D = \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-H}^{0} \alpha^2(y,z)\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - w\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) dydz \tag{3.6}$$

В случае жидкости бесконечной глубины $H = +\infty$.

4. Обтекание шара безграничным потоком экспоненциально стратифицированной жидкости. Примем радиус шара R за единицу длины, обозначим через N частоту Брента–Вяйсяля и положим

$$\nu = \frac{gR}{U^2}, \quad \beta = \frac{\mathrm{N}R}{U}, \quad \epsilon = \frac{\mathrm{N}^2 R}{g}, \quad \omega = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\epsilon z} w, \quad \theta = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\epsilon z} u$$

Предполагая, что параметр ϵ много меньше β, приведем уравнения (2.4) к виду

$$\mathrm{L}\omega = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\Delta\omega + \beta^2\omega) + \beta^2\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2\omega}{\partial y \partial z} \tag{4.1}$$

Предполагая, что ω и θ интегрируемы с квадратом по плоскости $x = \mathrm{const}$ и обозначая через $\mathrm{F}\omega$ и $\mathrm{F}\theta$ соответствующее плоское преобразование Фурье, при помощи равенства Планшереля получаем из формулы (3.6)

$$D = \frac{1}{8\pi^2} \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{\partial \mathrm{F}\theta}{\partial x}\right)^2 - \mathrm{F}\theta\frac{\partial^2 \mathrm{F}\theta}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \mathrm{F}\omega}{\partial x}\right)^2 - \mathrm{F}\omega\frac{\partial^2 \mathrm{F}\omega}{\partial x^2}\right) dpdq \tag{4.2}$$

Если аппроксимировать дальнее поле полем обтекания диполя, то функции θ^2 и ω^2 оказываются неинтегрируемыми и формула (4.2) неприменима. Чтобы обойти эту трудность, будем аппроксимировать обтекание шара обтеканием системы диполей, распределенных по поверхности шара. Плотность распределения аналитически зависит от параметра β [3] и в первом приближении можно в выражении для плотности распределения положить $\beta = 0$, т.е. взять эту плотность такой же, как в задаче обтекания шара однородной жидкостью.

Функция источника $G(x, y, z)$ является решением уравнения $\mathrm{L}G = \delta''(x)\,\delta(y)\delta(z)$, где оператор L определен формулой (4.1), а через δ обозначена дельта-функция. Обычная процедура приводит к справедливой при $x > 0$ формуле

$$\mathrm{F}G = \tfrac{1}{2}Cde^{-xC} + Ad^{-1}\sin xA, \quad 2A^2 = d + \beta^2 - p^2 - q^2$$
$$2C^2 = d + p^2 + q^2 - \beta^2, \quad d = (\beta^2 - p^2 - q^2)^2 + 4\beta^2 q^2 \tag{4.3}$$

Экспоненциально убывающее слагаемое в (4.3) можно не учитывать, так как оно не влияет на величину силы D, вычисляемой при помощи формулы (4.2).

Рассмотрим задачу обтекания шара единичного радиуса неограниченным потоком однородной жидкости. Воспользовавшись формулой [6]

$$\psi = \tfrac{1}{2}\rho^2(1 - r^{-3}), \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \rho^2 = y^2 + z^2$$

и соотношениями

$$\rho^2(1 - r^{-3}) = \eta^2 + \zeta^2, \quad \zeta/\eta = z/y$$

получаем

$$w = z - \zeta = z(1 - \sqrt{1 - r^{-3}})$$

На границе шара $\zeta = 0$, $w = z$, а при $r \to +\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$w = \frac{1}{2} z r^{-3}$. Заметим, что $\frac{1}{2} z r^{-3}$ – гармоническая функция, принимающая на границе шара значение $\frac{1}{2} z$. Если пользоваться линеаризированным уравнением $\Delta w = 0$, то для получения правильной асимптотики для w при $r \to \infty$ нужно решать линейное уравнение $\Delta w = 0$ с граничным условием $w|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2} z$. Такое решение можно представить в виде потенциала двойного слоя с плотностью $3\zeta/(8\pi)$.

Аппроксимируя обтекание шара потоком неоднородной жидкости, соответствующим потенциалом двойного слоя [3] с плотностью $3\zeta/(8\pi)$, получаем

$$\omega = \frac{3}{2} \int_{\partial\Omega} \zeta\left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} G(x-\xi, y-\eta, z-\zeta) + \eta \frac{\partial G(\cdot)}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial G(\cdot)}{\partial \zeta} \right) dS$$

Отбросив в выражении (4.3) для преобразования Фурье экспоненциальный член и используя свойства преобразования Фурье свертки и симметрию сферы, получим

$$\mathrm{F}\omega = \frac{3}{2} d^{-1} \sin Ax \int_{\partial\Omega} i\zeta(A\xi + p\eta + q\zeta) e^{i(A\xi + p\eta + q\zeta)} dS \tag{4.4}$$

При ортогональном линейном преобразовании

$$\xi' = \gamma^{-1}(A\xi + p\eta + q\zeta), \quad \eta' = \alpha^{-1}(p\zeta - q\eta)$$

$$\zeta' = (\alpha\gamma)^{-1}(Ap\eta + Aq\zeta - \alpha^2 \xi), \quad \alpha^2 = p^2 + q^2, \quad \gamma^2 = A^2 + p^2 + q^2 \tag{4.5}$$

сфера переходит в себя, $\zeta = q\gamma^{-1}\xi' + p\alpha^{-1}\eta' + qA(\alpha\gamma)^{-1}\zeta'$. Из формулы (4.4), используя симметрию сферы, получаем

$$\mathrm{F}\omega = 6\pi d^{-1} A q \chi(\gamma) \sin Ax$$

$$\chi(\gamma) = 2\gamma^{-3}(\gamma \cos \gamma - \sin \gamma) - \gamma^{-1} \sin \gamma \tag{4.6}$$

Устанавливая при помощи формулы (4.1) связь между $\mathrm{F}\theta$ и $\mathrm{F}\omega$, подставляя значение $\mathrm{F}\omega$ из формулы (4.6) в (4.2), получаем

$$D = \frac{9}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^{-2} q^2 \chi^2(\gamma) A^4 \left(1 + \frac{p^2 q^2}{(A^2 + q^2)^2} \right) dp\,dq \tag{4.7}$$

Используя формулы (4.3) и делая замену переменных

$$p = \beta\sqrt{t} \cos\varphi, \quad q = \beta\sqrt{t} \sin\varphi, \quad d^2 = \beta^4 d_1^2, \quad d_1^2 = (1+t)^2 - 4t\cos^2\varphi$$

$$A^2 = \beta^2 A_1^2, \quad A_1^2 = \tfrac{1}{2}(d_1(t) + 1 - t), \quad \gamma(t) = \beta\gamma_1(t), \quad \gamma_1(t) = \sqrt{A_1^2 + t}$$

записываем формулу (4.7) в виде

$$\beta^{-4} D = \frac{9}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} t A_1^4 \chi^2(\beta\gamma_1) d_1^{-2} \left(\sin^2\varphi + \frac{t^4 \sin^4\varphi \cos^2\varphi}{(A_1^2 + t^2 \sin^2\varphi)^2}\right) dt\,d\varphi \tag{4.8}$$

В формуле (4.8) найдем главный член асимптотики при $\beta \to 0$. Заметим, что при $t \to +\infty$

$$d_1 \sim t, \quad A_1 \sim |\sin\varphi|, \quad \gamma_1 \sim \sqrt{t}, \quad \sin^2\varphi + \frac{t^4 \sin^4\varphi \cos^2\varphi}{(A_1^2 + t^2 \sin^2\varphi)^2} \sim 1 \tag{4.9}$$

Пусть T настолько велико, что при $t > T$ можно пользоваться формулами (4.9). Если внутренний интеграл в (4.8) представить в виде суммы интегралов по интервалам $(0, T)$ и $(T, +\infty)$, то первый интеграл ограничен, а второй имеет порядок $\ln\beta$ при $\beta \to 0$ и, следовательно, определяет асимптотику при $\beta \to 0$. Действительно, в силу (4.9)

$$D = \frac{27}{16} \beta^4 \int\limits_{\beta T}^{+\infty} \chi^2(\tau) d\tau/\tau =$$

$$= -\frac{27}{16} \beta^4 \chi^2(\beta T) \ln(\beta T) + \frac{27}{8} \beta^4 \int\limits_{\beta T}^{+\infty} 2\chi(\tau)\chi'(\tau) \ln \tau d\tau$$

Из формулы (4.6) следует, что $\chi^2(0) = 1/9$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \chi\chi' \ln \tau d\tau$ сходится. Поэтому при $\beta \to 0$

$$D = \frac{3\pi}{16} \beta^4 |\ln \beta|, \quad \beta = \frac{NR}{U} \tag{4.10}$$

Многие авторы моделировали обтекание шара, распределяя источники массы по его поверхности с плотностью, взятой из решения соответствующей задачи для однородной жидкости[1]. При этом коэффициент в формуле (4.10) получается равным $\pi/8$. Расхождение, вероятно, связано с невозможностью такого выбора переменных, при котором решение задачи обтекания тела потоком неоднородной жидкости сводилось к решению задачи Неймана, как для случая обтекания тела потоком однородной жидкости. Если искать решение в виде потенциала простого слоя, то проблемы разрешимости соответствующих интегральных уравнений и непрерывной зависимости решений от параметра не исследованы.

В размерных переменных сила, действующая на шар, равна $\rho_0 (RU)^2 D$. Беря для сравнения силу вязкого сопротивления по формуле Стокса $W = 6\pi\rho_0 (RU)^2 \mathrm{Re}^{-1}$, находим, что отношение силы волнового сопротивления к силе вязкого трения равно $\beta^4 |\ln \beta| \mathrm{Re}/32$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Snyder W.H., Thomson R.S., Eskridge R.E.* The structure of strongly stratified flow over hills: dividing-streamline concept // J. Fluid Mech. 1985. V. 152. P. 249–288.
2. *Бежанов К.А., Онуфриев А.Т., Тер-Крикоров А.М.* Исследование дальнего и ближнего полей в задаче обтекания неровности дна потоком экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. 86–94.
3. *Тер-Крикоров А.М.* Стратифицированные потоки и дипольные приближения // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 587–592.
4. *Сысоева Е.А., Чашечкин Ю.Д.* Вихревые системы спутного стратифицированного течения за сферой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 82–90.
5. *Miles J.* Lee waves in a stratified flow. Pt 1. Thin barrier // J. Fluid Mech. 1968. V. 32. Pt 3. P. 549–567.
6. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 560 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.II.1991

[1] См. подробное изложение: *Городцов В.А., Теодорович Э.В.* Черенковское излучение внутренних волн равномерно движущимися источниками: Препринт № 183. М. Деп. в Ин-т пробл. механики. 1981.