

УДК 62–50

© 1993 г. А.В. Сивичкин

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ИГРЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НЕСКОЛЬКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Исследуется дифференциальная игра преследования n динамическими объектами одного. Все игроки обладают простыми движениями. Скорости игроков и время игры ограничены. Рассматриваются случаи игры как с однотипными произвольными преследователями, так и разнотипными, превосходящими по скорости убегающего. Платой считается минимальное расстояние между убегающим и ближайшим к нему преследователем в момент завершения игры. Формализация данной работы вводится согласно [1, 2]. Подход [3, 4] для решения задач сближения двух преследователей с одним убегающим на плоскости распространяется для решения задачи сближения n преследователей с одним убегающим в пространстве R^n . Функция цены игры строится не только в регулярной области [5], но и на выделенном сингулярном многообразии. Вводится функция программного максимина, пространство начальных позиций разбивается на области и доказывается u -стабильность функции во всем пространстве. Приводится пример игры преследования "трое за одним" в трехмерном евклидовом пространстве, строятся оптимальные траектории и поверхности уровня цены игры.

1. Постановка задачи. Динамика преследователей, объединенных в коалицию, и динамика убегающего описываются уравнениями

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), \quad x_i(0) = x_i^0, \quad \|u_i\| \leq \rho_i, \quad \rho_i \geq 0, \quad i = 1, n \quad (1.1)$$

$$\dot{y}(t) = v(t), \quad y(0) = y^0, \quad \|v\| \leq \sigma, \quad \sigma \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad T < \infty \quad (1.2)$$

Здесь x_i, y – позиции соответственно преследователей и убегающего в n -мерном пространстве, управление $u_i(\cdot)$ формируется в процессе движения позиционной стратегией $U_i: T \times R^n \Rightarrow B_{\rho_i}(0)$, управление убегающего выбирается как произвольная функция времени из класса V_t измеримых функций $v(\cdot): T \Rightarrow B_\sigma(0)$, где $B_\rho(0)$ и $B_\sigma(0)$ – n -мерные замкнутые шары радиуса ρ и σ с центром в начале координат, $\|(\cdot)\|$ – евклидова норма. Функцией платы является минимальное расстояние между убегающим и преследователями в момент завершения игры:

$$\Phi(x_i, y) = \min_i d(x_i(T), y(T)) \quad (1.3)$$

где $d(x_i(T), y(T))$ – евклидово расстояние между $x_i(T)$ и $y(T)$.

Цель преследователей – минимизировать, цель убегающего – максимизировать функцию платы.

Требуется построить функцию гарантированного результата.

2. Функция программного максимина. Области достижимости игроков $x_i(t)$ и $y(t)$ к моменту T являются n -мерные шары $G_t^i = B_{\rho_i(T-t)}(x_i(t))$ и $G_t = B_{\sigma(T-t)}(y(t))$, радиусов $\rho_i(T-t)$ и $\sigma(T-t)$ с центрами соответственно в $x_i(t)$ и $y(t)$.

Определим функцию программного максимина (ФПМ):

$$\gamma(t, x_i(t), y(t)) = \max_{y \in G_t} \min_i \min_{x_i \in G_t^i} d(x_i, y) \quad (2.1)$$

При $t = T$ ФПМ совпадает с функцией платы (1.3).

Пусть W_k — выпуклая линейная оболочка позиций k преследователей в произвольный момент времени, а W_k^* — k преследователей и убегающего в тот же момент

$$W_k = \{w: w = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, i \in J_k\}$$

$$W_k^* = \{w^* : w^* = \alpha_1 w + \alpha_2 y, \alpha_1 + \alpha_2 = 1, w \in W_k\} \quad (2.2)$$

$$J_k = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}, J_k \in I, J_k \neq \Phi$$

где J_k — непустое подмножество J_k множества индексов $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Целесообразно рассматривать только те J_k , которые образуют W_k размерности $k - 1$, тогда L_k — подпространство, равноудаленное (в случае $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n$) от k преследователей имеет размерность $n - k + 1$:

$$L_k = \{l: d(l, x_p) = d(l, x_q), p \neq q, p, q \in J_k\} \quad (2.3)$$

$$\dim L_k = n - \dim W_k$$

В случае различных ограничений на скорости преследователей, L_k — подпространство, ортогональное W_k и содержащее все точки экстремального прицеливания.

Для невырожденности задачи преследования n за одним в задачу преследования $k < n$ за одним необходимо, чтобы $\dim W_n = n - 1, \dim L_k = 1$.

Значение минимума и максимума ФПМ достигается на границах областей G_t^i и G_t .

Точку $y^*(t)$ назовем точкой экстремального прицеливания (ТЭП), если в ней достигается максимум ФПМ. Расстояние от ТЭП до произвольного преследователя складывается из длины радиуса его области достижимости и некоторой постоянной, общей для всех преследователей. Выбрав из I подмножество J_k такое, что минимум достигается в $x_i(t), i \in J_k$, запишем (2.1) в виде

$$\gamma(t, x_i(t), y(t)) = \max_{y \in G_t} \min_i d(x_i(t), y) - \rho_i(T - t) = d(x_i(t), y^*(t)) - \rho_i(T - t) \quad (2.4)$$

$$i \in J_k, x_i(t) \in W_k, k \leq n$$

3. Возможные случаи взаимного расположения игроков. В каждый момент времени t убегающий $y(t)$ может находиться одной из следующих областей D_k ($k = 1, 2, \dots, n$) относительно преследователей $x_i(t)$, где задача вырождается в игру преследования только k игроками.

Определим область принадлежности $y(t)$ области D_k признаком 1, а сингулярному многообразию (СМ) в области D_k признаком 2. Признак 1: в игре преследования n объектами в момент времени t имеет место игра преследования k объектами, где $k \leq n$, если существуют J_k и J_{n-k} такие, что

$$\gamma(t, x_i(t), y(t)) = \min_{i \in J_k} d(x_i, y^*(t)) < \min_{i \in J_{n-k}} d(x_i, y^*(t))$$

где $J_{n-k} = I \setminus J_k$, и будем записывать $y(t) \in D_k$.

Отметим одно свойство областей $D_k: D_l \cap D_m \neq \emptyset, k, l < n$.

Признак 2. В итоге преследования n объектами в момент времени t имеет место принадлежность $y(t)$ сингулярному многообразию S_k , если:

1) $y(t) \in D_k$,

2) для данного J_k определены подпространства W_k, W_k^* (2.2) и $\dim W_k = \dim W_k^*$.

Для каждой области D_k существует СМ, на которой кусочно-гладкая ФПМ может иметь разрыв.

При $k = n$ и $y(t) \in S_n$ есть две ТЭП

$$d(y_1^*(t), W_n) = d(y_2^*(t), W_n), \quad \{y_1^*(t), y_2^*(t)\} = L_n \cap D_t$$

в отличие от регулярного случая, где ТЭП единственна.

При $k \leq n$ и $y(t) \in S_k$ пересечением L_k и D_t является сечение n -мерной сферы подпространством размерности $\dim L_k$ и мощность множества ТЭП – континуум.

4. Вспомогательные утверждения. Разобьем интервал $[0, T]$ на N частей. Имеем $y(t_i) = y(t_{i-1}) + v_i \Delta t$, где $[0, T] = \cup [t_i, t_{i+1}]$, $v_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $v_i = \text{const}$, Δt – диаметр разбиения.

Рассмотрим i -й интервал; можно положить $t_i = 0$, $t_{i+1} = t$.

Докажем следующие леммы 1–3 для случая $k \geq 2$, $y \in S_k$, рассматривая убегающего y в каждом подпространстве, определенном L_n и x_i для интервала времени $[0, t]$.

Пусть $r = d(x(0), y^*(0))$, b и c – соответственно длины проекций $[x_i(0), y^*(0)]$ и $[y(0), y^*(0)]$ на $(x_i(0), y(0))$.

Можно показать справедливость лемм 1, 2, посвященных доказательству u -стабильности ФПМ (2.4).

Лемма 1. При $v \neq 0$, $v \in S_k$ для любых ρ, σ если $r > \sigma T$, то выполняется неравенство

$$(r - \rho t)^2 - (b - \rho t)^2 \geq (\sigma T - \sigma t)^2 - (c - \sigma t)^2 \quad (t < \min(b/\rho, c/\rho))$$

Здесь и в леммах 2, 3, 4 индекс i при ρ опущен.

В случае $t \geq \min(b/\rho, c/\rho)$ существует момент времени, когда траектория движения убегающего пересекает подпространство L_k (2.3) и позиция лежит на СМ. Принимая этот момент времени за начальный, воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. При $v = 0$, $v \in S_k$ для любых ρ, σ , если $r > \sigma T$, выполняется неравенство

$$(r - \rho t)^2 - (b - \rho t)^2 \geq (\sigma T - \sigma t)^2 \quad (t < b/\rho)$$

При $t \geq b/\rho$ момент пересечения траектории преследователя с подпространством L_k принимаем за начальный и пользуемся леммой 2.

Геометрический смысл приведенных лемм следующий: если убегающий выбирает ненулевые и нулевые управления, не сводящие позицию с СМ, то найдутся ненулевые управления преследователей, оставляющие позицию на СМ, такие, что ФПМ не увеличивается.

Считаем ось OX проходящей через $x_i(0)$ перпендикулярно L_k .

Обозначим через α и β углы между управлениями u и v и OX . Докажем следующую лемму: для позиции лежащей на СМ и любых управлений убегающего, найдутся такие управления преследователей, что ФПМ не возрастает. При этом позиция может как сходиться с СМ, так и оставаться на нем.

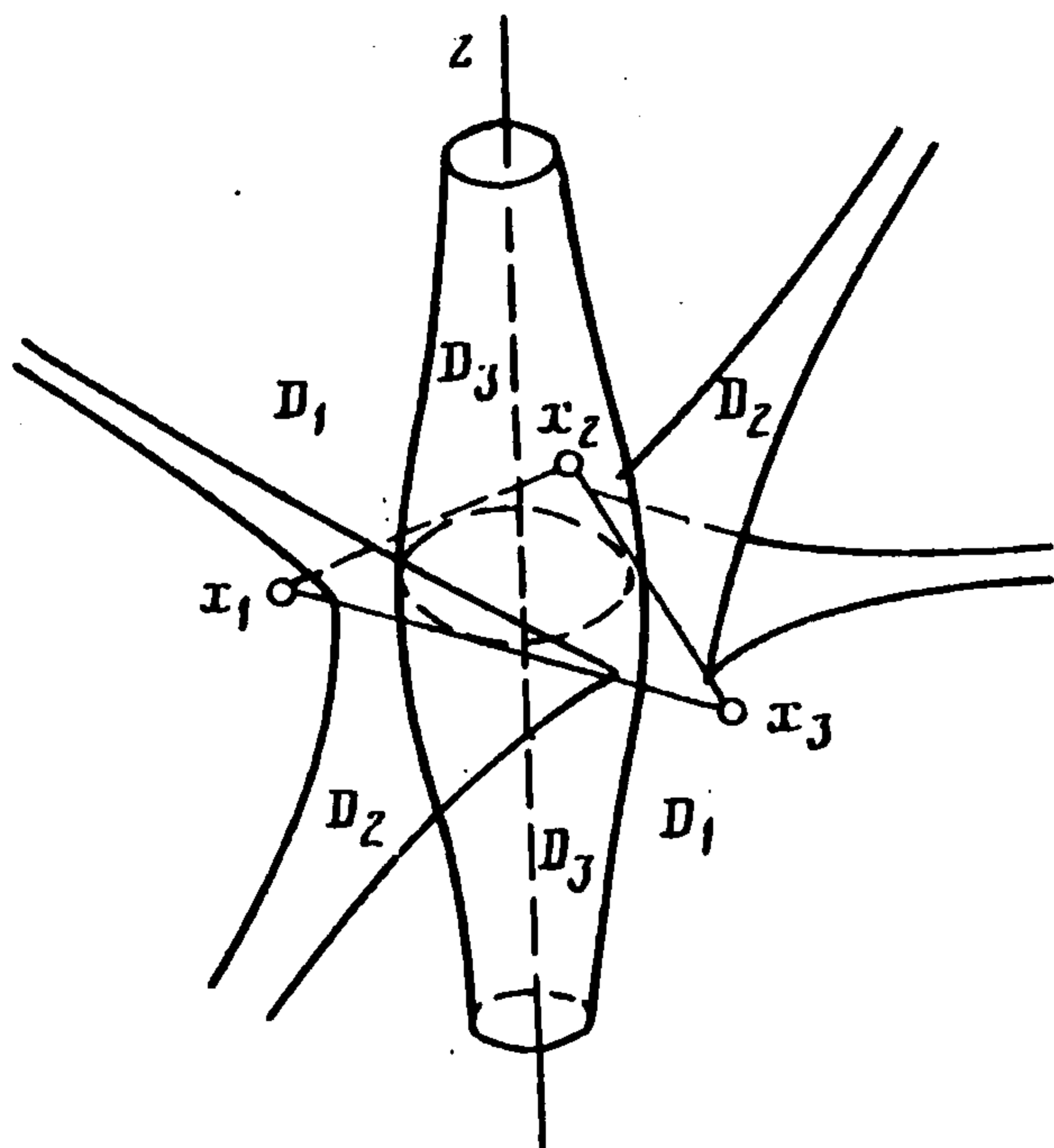
Лемма 3. При любых ρ, σ, β найдутся такие a_i , что $d(x_i(t), y(t)) \leq d(x_i(0), y(0)) - \rho t$ при $y(0) \in S_k$.

Доказывает лемму выбор α_i таких, что

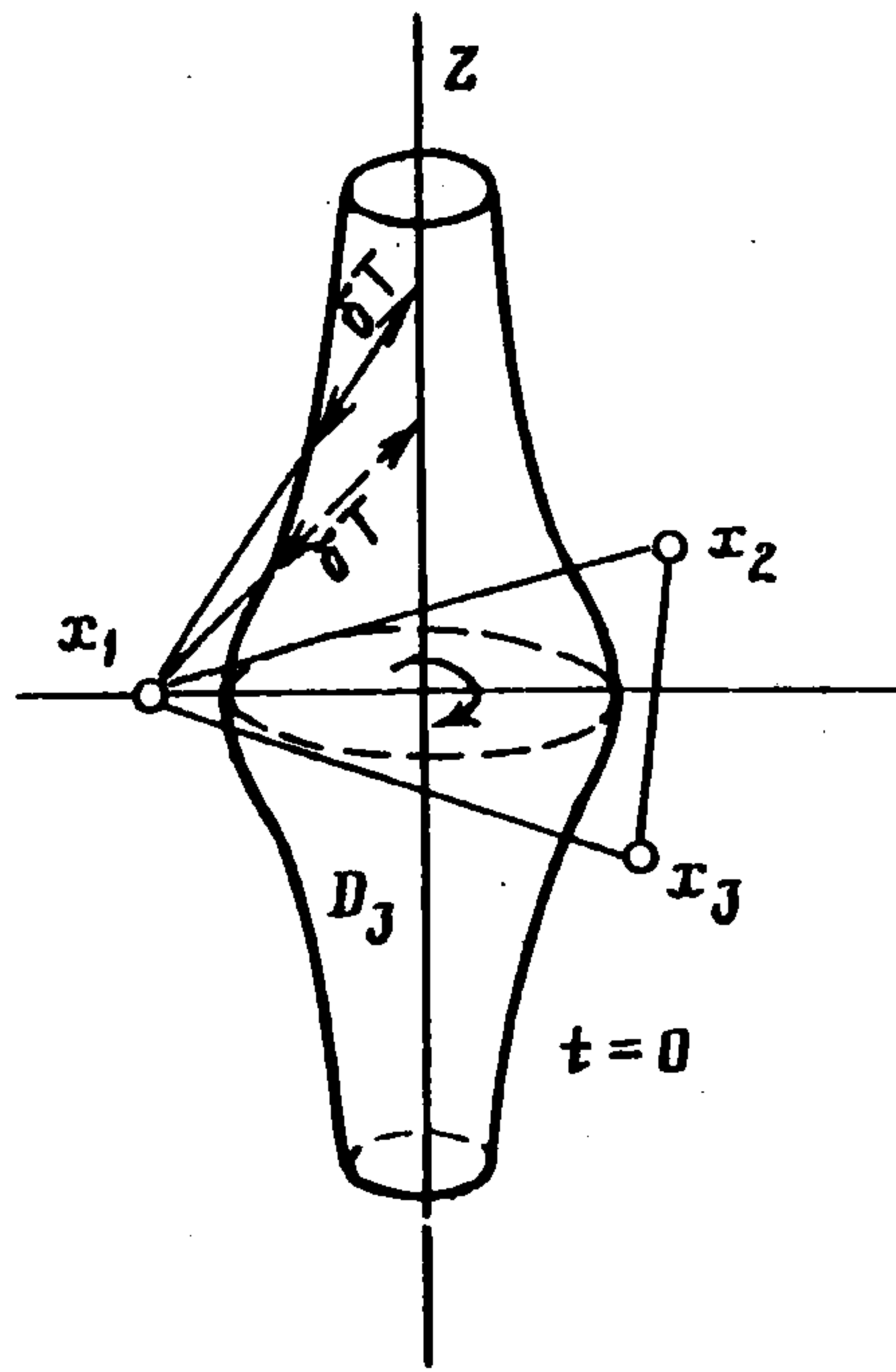
$$\alpha_i = \begin{cases} \arcsin(\sigma \rho^{-1} \sin \beta), & \text{если } \sigma \rho^{-1} \sin \beta \leq 1 \\ \alpha_i^*, & \text{если } \sigma \rho^{-1} \sin \beta > 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

Лемма 4. Пусть $y(t) \in D_k$, $B_{\sigma(T-t)}(y(t)) \cap L_k = \{y^*(t)\} \neq \emptyset$ и $a \geq 0$ – такое число, что $\{y^*(t)\} \subset \cup_i B_{a+\rho(T-t)}(x_i(t))$. Тогда $B_{\sigma(T-t)}(y(t)) \subset \cup_i B_{a+\rho(T-t)}(x_i(t))$

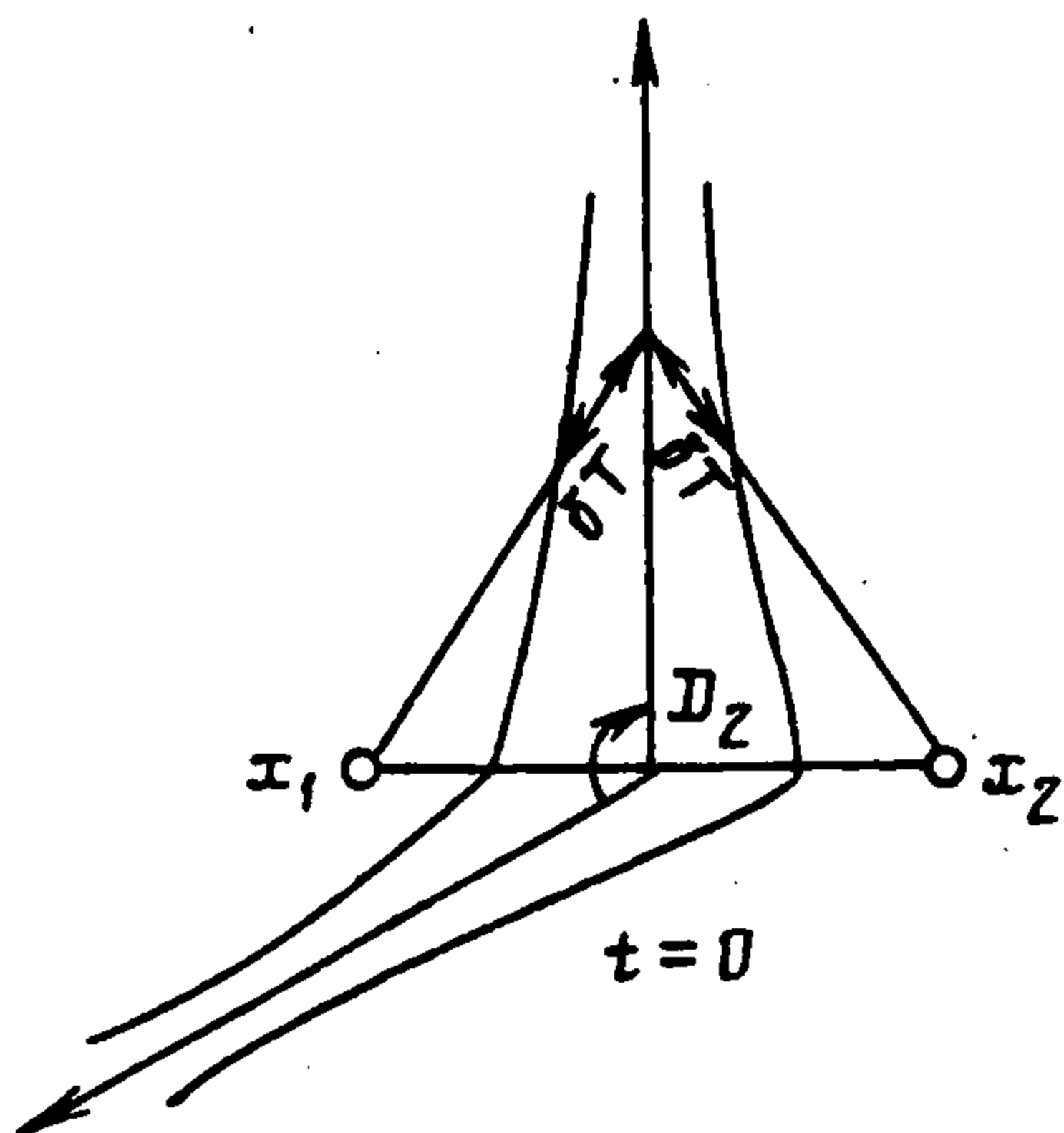
Лемма 4 отражает тот факт, что если область достижимости убегающего, лежащего в области D_k , пересекает подпространство L_k на некотором множестве точек, то достаточно покрыть только это множество шарами с центрами, совпадающими с позициями преследователей, чтобы покрыть всю область достижимости убегающего.



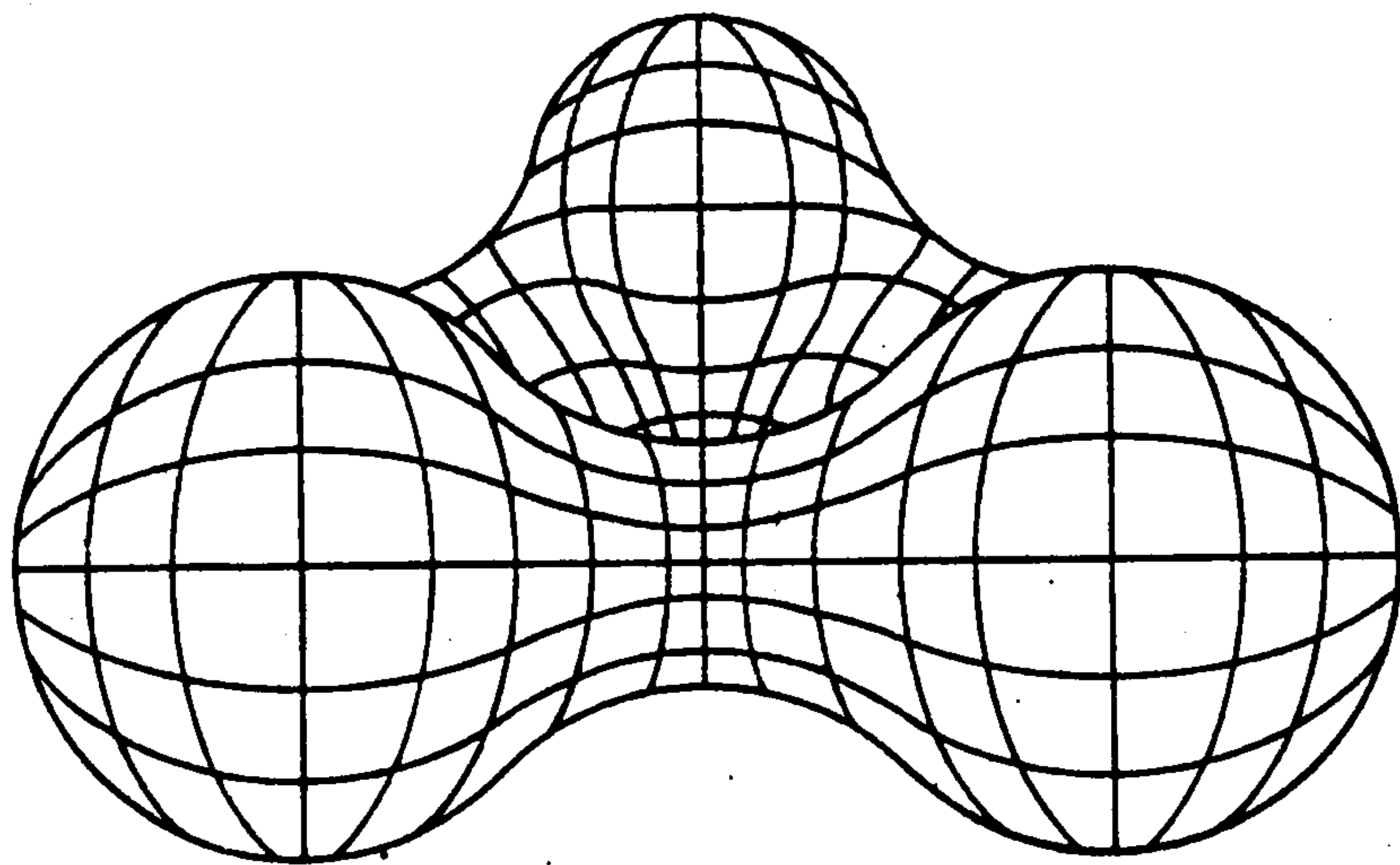
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

5. Свойство u -стабильности ФПМ. Для $i = 2$ ФПМ совпадает с функцией цены игры [3–5]. Пусть для игры преследования $n - 1$ ($n \geq 3$) ФПМ (2.1) совпадает с функцией цены игры, тогда в утверждениях 1, 2 докажем, что ФПМ цена игры преследования "n за одним".

Утверждение 1. ФПМ u -стабильна на СМ.

Доказательство. Рассмотрим промежуток времени $[0, t]$ (см. р. 4). Пусть $y(0) \in S_n$, $v = \text{const}$. По предположению для всех областей D_k ($k \leq n - 1$) найдена функция цены игры, совпадающая с (2.1).

Введем в рассмотрение фиктивного убегающего, получающегося из реального поворотом около L_n на угол между y и x_i в W_n^* и лежащего в плоскости, определяемой x_i и L_n . ТЭП реального совпадает с ТЭП фиктивного убегающего.

Управление i -го преследователя строится по фиктивному убегающему согласно леммам 1–3, оно также подходит и для реального убегающего, так как использует информацию только о ТЭП.

Если $y(T) \in D_n$, то по лемме 4 в момент t осуществляется покрытие

$$B_{\sigma(T-t)}(y(t)) \in \bigcup_{i=1}^n B_{a+\rho_i(T-t)}(x_i(t)) \quad (5.1)$$

при условии, что в начальный момент выполнялось условие

$$B_{\sigma T}(y(0)) \in \bigcup_{i=1}^n B_{a+\rho_i T}(x_i(0))$$

В случае, если на интервале $[0, t]$ существует момент t_1 такой, что $y(t_1) \in D_{n-1}$, то, разбивая интервал на подынтервалы $[0, t] = [0, t_1] \cup [t_1, t]$, выбираем на первом подынтервале управления преследователей, соответствующие игре "n за одним", а на втором игре "n - 1 за одним". Покры-

тие (5.1), выполняющееся в момент t_1 , имеет место и в момент t для $y(t) \in D_{n-1}$ (аналогично для $y(t) \in D_k, k < n - 1$), что и означает u -стабильность ФПМ. Положив $t = T$ в (5.1) заметим, что функция цены игры совпадает с константой a .

Утверждение 2. ФПМ u -стабильна во всем пространстве игры!

Чтобы доказать утверждение 2, осталось проверить u -стабильность ФПМ в регулярной области. Однако этот случай нетрудно свести к утверждению 1 путем введения фиктивного убегающего. Для любого реального убегающего можно найти фиктивного, удовлетворяющего следующим требованиям:

- 1) фиктивный убегающий в начальный момент находится на СМ;
- 2) ТЭП фиктивного и реального убегающих в начальный и конечный момент времени на интервале $[0, t]$ совпадают;
- 3) фиктивный убегающий перемещается за время t не более чем на ρt .

Воспользовавшись утверждением 1, получаем u -стабильность ФПМ в регулярной области и во всем пространстве.

Итак, ФПМ совпадает с функцией цены игры во всем пространстве, так как ФПМ обладает свойством u -стабильности в силу линейности системы (1.1), (1.2).

Замечания 1. ° Условие $r > \sigma T$ в леммах 1–3 должно выполняться для всех x_i , что имеет место либо для одностипных произвольных преследователей, либо разностипных, но превосходящими по скорости убегающего. 2.° В случае различных ограничений на скорости преследователей необходимо добавить следующее: если в начальный момент времени выполняется точное покрытие (5.1), то в следующий момент, при неоптимальном движении убегающего (т.е. не в ТЭП), например, вдоль СМ, объединение шаров с центрами в x_i покроет шар строго больший, чем область достижимости убегающего. В этом случае интервал $[0, t]$ можно разбить на меньшие, на каждом считать ТЭП неподвижной, а покрытие (5.1) точным и воспользоваться леммами 1–4.

3.° Функция цены игры положительна, но если в начальный момент времени $r = \rho T$ для превосходящих по скорости преследователей, то функция цены игры равна нулю, т.е. осуществляется точечная поимка.

Пример. Рассмотрим дифференциальную игру группового преследования "трое за одним" в трехмерном евклидовом пространстве.

Функционал (1.3) примет вид:

$$\Phi(x_i) = \min_i \Phi_i(x_i), \quad i = 1, 2, 3$$

$$\Phi_i(x_i) = ((x_1^x - y^x)^2 + (x_1^y - y^y)^2 + (x_1^z - y^z)^2)^{1/2}$$

$$\text{Здесь } x_i = (x_i^x, x_i^y, x_i^z) \quad (i = 1, 2, 3), \quad y = (y^x, y^y, y^z).$$

Фиксируем те начальные положения преследователей, которые образуют невырожденный треугольник. Убегающий находится в одной из областей D_i ($i = 1, 2, 3$) (фиг. 1). Области D_1 и D_2 существуют во всех случаях взаимного расположения игроков при любых ограничениях на управления. Область D_3 существует всегда, когда треугольник, образованный преследователями, остроугольный.

Систему координат введем так, чтобы x_1, x_2, x_3 находились в плоскости XOY , ось аппликат проходила через центр описанной около треугольника окружности, образуя с XOY правую тройку.

Область D_3 в момент времени t ограничена вращением около оси аппликат внутренней конхоиды Никомеда радиуса $\sigma(T - t)$ относительно точки совпадающей с произвольной x_i ($i = 1, 2, 3$) и оси аппликат (фиг. 2).

Для построения области D_2 выберем произвольную сторону треугольника $x_1 x_2 x_3$, например $[x_1 x_2]$. Часть области D_2 ограничена вращением около стороны $[x_1 x_2]$ двух внутренних конхонид Никомеда радиуса $\rho(T - t)$ относительно серединного перпендикуляра к $[x_1 x_2]$ и соответственно точек, совпадающих с x_1 и x_2 . Подобным образом выбирая оставшиеся стороны треугольника, получаем всю область D_2 (фиг. 3).

Часть пространства не принадлежащая к D_3 и D_2 относится к D_1 (фиг. 1).

СМ в области D_3 характеризуется равенством аппликат всех игроков, СМ области D_2 — принадлежностью убегающего к произвольной стороне треугольника $x_1 x_2 x_3$, но в этом случае в отличие от рассматривавшейся ранее задачи [6] у убегающего существует не одно оптимальное движение, а континуум. Совпадение координат убегающего и преследователя описывает СМ в области D_1 , и здесь у убегающего оптимальное движение не единственно.

ФПМ (2.4) можно записать так:

$$\gamma(t, x_i) = \min_i \gamma_i(t, x_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\gamma(t, x_i) = ((y^z - x_i^z + (\sigma^2(T - t)^2 - (y^x)^2 - (y^y)^2)^{1/2})^2 + (x_i^x)^2 + (y^x)^2)^{1/2} - \rho(T - t) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Можно проверить для системы (1.1), (1.2) выполнение в регулярной области D_3 уравнение Беллмана–Айзекса и совпадение ФПМ с функцией платы в момент окончания.

Обозначая через $\beta^x, \beta^y, \beta^z$ и $\alpha_i^x, \alpha_i^y, \alpha_i^z$ углы между мгновенными скоростями соответственно игроков u и x_i и осями OX, OY, OZ , перепишем уравнения в виде

$$u_i^x = \rho \cos \alpha_i^x, \quad u_i^y = \rho \cos \alpha_i^y, \quad u_i^z = \rho \cos \alpha_i^z$$

$$v^x = \sigma \cos \beta^x, \quad v^y = \sigma \cos \beta^y, \quad v^z = \sigma \cos \beta^z$$

Выбирая углы, как в утверждении 1, 2, согласно (4.1), можем гарантировать неувеличение ФПМ. Для убегающего, находящегося в D_3 , выполняется $\alpha_1^z = \alpha_2^z = \alpha_3^z$.

Оптимальными стратегиями всех игроков являются экстремальные прицеливания всех игроков в одну из точек множества $\{y^*\}$ с максимальными и постоянными управлениями, а все СМ являются рассеивающими поверхностями.

Вид поверхности уровня цены игры показан на фиг. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. Pashkow A.G., Terehow S.D. A differential game of approach with two pursuers and one Evader // J. Optimiz. Theory and Appl. 1987. v. 55. No. 2. p. 303–311.
4. Левченко А.Ю. Об одной задаче сближения двух различных преследователей с одним убегающим // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 1. С. 3–8.
5. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простыми движениями. Ташкент: Фан, 1989. 232 с.
6. Пашков А.Г., Терехов С.Д. Об одной игре оптимального преследования двумя объектами одного // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 46. С. 898–903.

Москва

Поступила в редакцию
30.1.1992