

УДК 62–50

© 1993 г. А.А. Меликян, Н.В. Овакимян

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ПРОСТОГО СБЛИЖЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ

Рассматривается игровая задача, в которой игроками являются две управляемые по скорости точки многообразия с невырожденной метрикой. Платой в игре служит минимальное расстояние между игроками на полу-бесконечном интервале времени движения. Первый игрок минимизирует плату, второй игрок максимизирует. Предлагается разбиение фазового пространства игры на подобласти. В одной из них (первичной) ценой является начальное расстояние между игроками, в другой (вторичной) цена меньше начального расстояния. Показано, что граница первичной области состоит из особых оптимальных движений [1], и к ней с обеих сторон подходят регулярные траектории. Найдены необходимые условия оптимальности сингулярной поверхности, получены уравнения особых движений. По форме они совпадают с аналогичными соотношениями в игре преследования [2].

В терминах геодезического расстояния между игроками найдено локальное необходимое условие оптимальности для первичной области в форме неравенства, позволяющее построить край сингулярной поверхности. Существование этого края является необходимым условием непустоты вторичной области. Получено обобщенное уравнение Беллмана; установлено, что цена игры постоянна вдоль вторичных оптимальных траекторий. На сингулярных траекториях сохраняется постоянным расстояние между игроками. На основе полученных необходимых условий предложен алгоритм построения оптимальных траекторий и цены игры в окрестности особенностей.

С помощью развитого алгоритма построено полное решение задачи сближения на двумерном конусе: построены линии уровня цены игры и оптимальный фазовый портрет; найдено множество конусов, для которых вторичная область пуста, т.е. расстояние между игроками является ценой во всем пространстве игры.

**1. Постановка задачи.** Пусть на  $n$ -мерном многообразии  $N$  управляемое движение двух точек  $P$  (преследователь) и  $E$  (убегающий) описывается соотношениями

$$\begin{aligned} P : \dot{x} &= u, \quad u \in E_1(x), \quad E : \dot{y} = v, \quad v \in E_v(y), \quad v > 1 \\ E_\alpha(x) &= \{ u \in R^n : |u|_x \leq \alpha \}, \quad |u|_x^2 = \langle G(x)u, u \rangle \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $x, y$  — векторы локальных координат точек  $P, E$  соответственно,  $u, v$  — векторы их скоростей в точке  $x$  многообразия  $N$ ,  $G(x)$  — метрический тензор многообразия, невырожденная положительно-определенная матрица. Угловыми скобками обозначено стандартное скалярное произведение — сумма произведений компонент векторов.

Была рассмотрена игровая задача преследования с динамикой игроков вида (1.1)

и превосходством преследователя по скорости,  $\nu < 1$ <sup>1</sup>. Поскольку скорость преследователя в (1.1) меньше скорости убегающего, то точка  $E$ , вообще говоря, может избежать  $l$ -поймки, где  $l$  — радиус поимки [4]. Более того в евклидовом случае, когда  $G(x)$  — единичная матрица во всем пространстве, игрок  $E$  может непрерывно увеличивать расстояние между точками  $P$  и  $E$ . На произвольном многообразии игрок  $P$ , вообще говоря, может добиться уменьшения начального расстояния между  $P$  и  $E$ .

В связи с этим рассмотрим позиционную дифференциальную игру точек  $P, E$  с динамикой (1.1) на полубесконечном интервале времени, в которой игрок  $P$  стремится осуществить максимально возможное сближение с точкой  $E$ , которая преследует противоположные интересы.

Таким образом, функционалом в игровой задаче является величина

$$J = \min_{0 \leq t < \infty} L(x(t), y(t)) \quad (1.2)$$

где  $L$  — длина минимальной геодезической линии, соединяющей игроков. Она служит решением следующей вариационной задачи:

$$L(x, y) = \min_{\xi(\cdot)} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \sqrt{\langle G(\xi) \xi', \xi' \rangle} d\sigma$$

$$\xi(\sigma_0) = x, \quad \xi(\sigma_1) = y \quad (1.3)$$

где  $\xi(\sigma)$ ,  $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$  — кусочно-гладкая кривая, соединяющая игроков. Будем предполагать, что минимум (1.3) достигается в этом классе кривых. Используя формулу первой вариации, получаем выражения (1.4) для частных производных экстремального значения (локального минимума) функционала (1.3) и их следствия (1.5), (1.6), справедливые в точках дифференцируемости  $L(x, y)$

$$L_x(z) := G(x) a(z), \quad L_y(z) = G(y) b(z), \quad z = (x, y) \in R^{2n}$$

$$a = -\xi'(\sigma_0) / |\xi'(\sigma_0)|_x, \quad b = \xi'(\sigma_1) / |\xi'(\sigma_1)|_y \quad (1.4)$$

где  $a, b$  — единичные касательные векторы к геодезической в точках  $P, E$  направленные во внешнюю сторону кривой  $PE$ ;  $z = (x, y)$ ; вектор локальных координат фазового пространства игры  $N \times N = N^2$ .

Из (1.4) вытекают уравнения эйконала

$$\langle G^{-1}(x) L_x, L_x \rangle = 1, \quad \langle G^{-1}(y) L_y, L_y \rangle = 1 \quad (1.5)$$

а также следующее экстремальное свойство движения игроков вдоль геодезической:

$$\min_u \max_v L' = \max_v \min_u L' = \nu - 1$$

$$L'(x, y) = \langle L_x, u \rangle + \langle L_y, v \rangle \quad (1.6)$$

$$u^*(z) = -G^{-1}(x) L_x(z) = -a(z), \quad v^*(z) = \nu G^{-1}(y) L_y(z) = \nu b(z)$$

Здесь и далее экстремумы по  $u, v$  вычисляются по эллипсоидам (1.2). Величины  $u^*, v^*$  в (1.6) могут быть найдены методом неопределенных множителей Лагранжа.

Относительно многообразия  $N$  будем полагать, что глобальный минимум (1.3) достигается не более, чем на двух кривых. Пусть  $\Gamma_0$  — множество краевых значений  $z = (x, y)$  в (1.3), для которых существуют два минимума. Будем предполагать, что существует непустая окрестность множества  $\Gamma_0$ , в которой определены гладкие

<sup>1</sup> Меликян А.А., Овакимян Н.В. Игровая задача простого преследования на многообразиях. Препринт № 489. М.: Ин-т пробл. механики АН СССР, 1991. 43 с.

функции  $L^+(z)$ ,  $L^-(z)$ , а глобальный минимум представим в виде

$$L(z) = \min [L^+(z), L^-(z)] \quad (1.7)$$

2. Структура решения, необходимые условия оптимальности. Предположим, что цена  $V(z)$  игры (1.1), (1.2) существует, непрерывна и дифференцируема по направлению. Отметим очевидное неравенство  $V(z) \leq L(z)$ ,  $z \in Z$ , которое следует также из (1.3) и означает, что наименьшее расстояние между игроками не может быть больше начального. Здесь  $Z$  — область в некоторой системе локальных координат многообразия  $N^2$ . Подобласть  $Z_1 \subset Z$ , в которой выполнено равенство  $V(z) = L(z)$ , назовем первичной, а подобласть  $Z_2 = Z \setminus Z_1$  — вторичной. Для  $z \in Z_2$  выполнено  $V(z) < L(z)$ .

Таким образом, по определению, стартуя из точек вторичной области, игрок  $P$  может уменьшить начальное расстояние между игроками.

Функция  $L$  вида (1.7) дифференцируема по направлению  $w = (u, v)$ . В точках гладкости производная по направлению  $\partial L / \partial w$  совпадает с полной производной по времени:  $\partial L / \partial w = L$ .

*Лемма 1.* В первичной области  $Z_1$  справедливо условие

$$\min_u \max_v \partial L / \partial w \geq 0 \quad (2.1)$$

Действительно, обратное предположение означает, что у игрока  $P$  есть позиционное управление, обеспечивающее неравенство  $\partial L / \partial w < 0$ . Это означает, что расстояние  $L_\Delta$  через достаточно малый промежуток времени  $\Delta > 0$  будет меньше начального, что противоречит определению первичной области.

*Лемма 2.* Во вторичной области для цены игры  $V(z)$  справедливы следующие обобщенные необходимые условия оптимальности:

$$\min_u \max_v \partial V / \partial w \geq 0 \geq \max_v \min_u \partial V / \partial w \quad (2.2)$$

Неравенства (2.2) могут быть обоснованы предположением противного: строгое неравенство противоположного смысла слева (справа) в (2.2) приводит к тому, что игрок  $P(E)$  может получить результат лучше, чем цена игры [3].

В точках гладкости неравенства (2.2) переходят в равенства и приводят к уравнению Беллмана

$$F(z, p) = -\sqrt{\langle G^{-1}(x) V_x, V_x \rangle} + \nu \sqrt{\langle G^{-1}(y) V_y, V_y \rangle} = 0 \quad (2.3)$$

означающему, что на оптимальной траектории выполнено  $dV/dt = 0$ , т.е. цена игры постоянна. Это свойство вытекает также из вида функционала (1.3) и определения вторичной области. Действительно, на траектории  $z(t)$ , стартовой из точки  $z^0 \in Z_2$ , выполнено  $L(z(t)) \geq L(z(t_*))$ , где  $t_*$  — либо момент первого выхода на границу  $\partial Z_2$ , либо  $t_* = \infty$ , если траектория не выходит из  $Z_2$ . По определению момента  $t_*$  имеем:  $z(t) \in Z_2$ ,  $0 \leq t < t_*$ . Если упомянутое неравенство нарушено, то найдется момент  $t_1 < t_*$  такой, что  $L(t) < L(t_*)$  при  $t_1 \leq t \leq t_*$ . Это означает, что в точке  $z = z(t_1)$  ценой будет начальное расстояние  $L(t_1)$ , т.е. точка  $z(t_1) \in Z_1$ , что противоречит условию  $z(t_1) \in Z_2$ .

Итак, во вторичной области цена игры равна расстоянию  $L(t_*)$ , которое достигается в момент  $t_* = \infty$ , если траектория не выходит из  $Z_2$ , или в момент достижения границы  $\Gamma$  области  $Z_2$ :  $\Gamma = \partial Z_2$ .

Отметим, что в отличие от задачи преследования [3], первичное решение в задаче сближения не удовлетворяет уравнению Беллмана для вторичной области. Действительно, в силу уравнений эйконала (1.5) подстановка первичного решения в функцию (2.3) приводит к следующему уравнению для функции  $L(z)$  и соответствующему выражению для первичной скорости:

$$F(z, L_z(z)) = \nu - 1, \quad z' = F_p(z, L_z(z)) \quad (2.4)$$

Уравнение Беллмана оказывается выполненным только при  $\nu = 1$ . В области дважды гладкости функции  $V(z)$  оптимальные траектории игроков определяются характеристической системой уравнения (2.3):

$$z' = F_p, \quad p' = -F_z \quad (2.5)$$

Если пара  $z(t), p(t)$  есть решение системы (2.5),  $z(t) = (x(t), y(t))$ , то можно показать, что обе функции  $x(t), y(t)$  являются экстремалиями задачи (1.3). Таким образом, регулярное движение игроков состоит в движении по геодезической линии, вообще говоря, своей для каждого игрока.

**3. Исследование граничной сингулярной поверхности.** Предыдущие рассмотрения показывают, что оптимальные траектории могут переходить из вторичной области в первичную. Оптимальное поведение игроков в первичной области, вообще говоря, неоднозначно. При этом роль игрока  $P$  пассивна, поскольку оптимальный результат игры — расстояние между игроками — фиксируется в начальный момент времени, и будущее поведение точки  $P$  несущественно. Напротив, игрок  $E$  должен иметь в арсенале способ, гарантирующий неухудшение в дальнейшем начального результата. Таким способом может быть, например, программное управление точки  $E$  на полубесконечном интервале времени, либо позиционное управление — поле скоростей, обеспечивающих локальное неуменьшение расстояния. В точках дифференцируемости функции  $L(z)$  подобное поле задается, например, первичным управлением  $v^*(z)$  в (1.6). В точках негладкости  $L$  гарантирующее управление игрока  $E$  возможно потребует информации о мгновенном значении управления точки  $P$ , либо результат окажется достижимым с  $\epsilon$ -точностью.

Для нахождения необходимых условий, определяющих поверхность  $\Gamma$  в оптимальном синтезе, воспользуемся леммой 1.

Условие леммы 1 тривиально выполняется в точках гладкости  $L$  в силу свойства (1.6). На поверхности  $\Gamma_0 = \{z \in Z, L^+(z) = L^-(z)\}$  функция (1.7) не является гладкой.

Определим, какая часть поверхности  $\Gamma_0$  принадлежит области  $Z_1$ . Применим условие (2.1). На  $\Gamma_0$  имеем  $\partial L / \partial w = \min[L^+, L^-]$ ,  $L^\pm = \langle L_x^\pm, u \rangle + \langle L_y^\pm, v \rangle$ ,  $w = (u, v)$ . Вычисления, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы [3], дают

$$\min_u \max_v \min_{\pm} L^\pm = \min[0, F(z, R_z(z))]$$

$$R(z) = (L^+(z) + L^-(z)) / 2$$

(функция  $F$  определена в (2.3)).

Таким образом, на основании леммы 1 получаем, что области  $Z_1$  принадлежит только часть  $\Gamma_1$  поверхности  $\Gamma_0$ , которая выделяется условием  $F(z, R_z(z)) \geq 0$ . Край поверхности  $\Gamma_1$  обозначим через  $B$ . Используя равенства (1.1), (1.4), (2.3), представим выражение  $F(z, R_z(z)) = 0$  в терминах нормы векторов  $a^+ + a^-$ ,  $b^+ + b^-$ . Тогда многообразие  $B$  определяется двумя равенствами

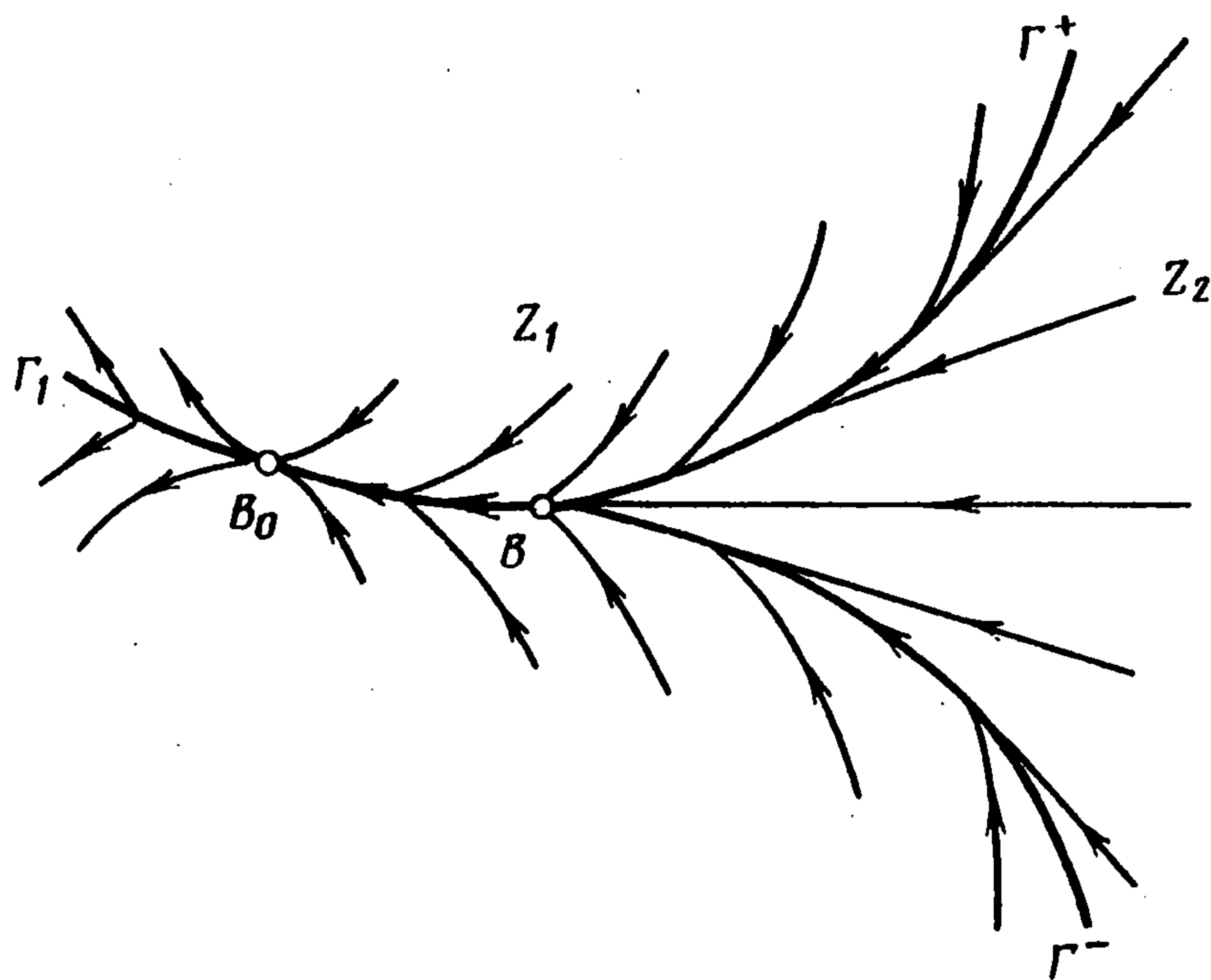
$$B : L^+(z) = L^-(z), \quad |a^+ + a^-|_x = \nu |b^+ + b^-|_y \quad (3.1)$$

Таким образом, множество  $B$  принадлежит также искомой граничной поверхности,  $B \subset \Gamma$ . Поверхность  $\Gamma$  можно построить на основе метода сингулярных характеристик [3], найдя предварительно на краевом многообразии  $B$  данные Коши. Методика работы [3] требует трех необходимых условий оптимальности в форме равенства в терминах точки  $z \in \Gamma$  и соответствующей величины  $p$  — предельного значения градиента функции  $V$  из вторичной области.

В качестве первых двух условий используются уравнение Беллмана (2.3) и условие непрерывности цены игры:  $V(z) = L(z)$ ,  $z \in \Gamma$ . Третье недостающее условие можно получить, предположив, что поверхность  $\Gamma$  состоит из особых оптимальных движений. Тогда, в силу единственности экстремумов (2.2) в точках поверхности  $\Gamma$  выполнено условие касания  $\langle F_p, p - q \rangle = 0$ ,  $p = Vz$ ,  $q = L_z$ , т.е. траектории приходят из области  $Z_2$  на  $\Gamma$  с касанием (фиг. 1). Условие касания можно также обосновать независимо, используя методику вариации поверхности  $\Gamma$ , как это сделано при доказательстве теоремы в работе [4]. Для этого достаточно предположить лишь, что выход на  $\Gamma$  из  $Z_2$  происходит за конечное время (момент  $t_*$  в разд. 2 конечен).

Итак, предположим, что движения из области  $Z_2$  подходят за конечное время к поверхности  $\Gamma$ . Тогда траектории подходят с касанием, и на поверхности  $\Gamma$  оказываются выполненными следующие три условия оптимальности:

$$F_0(z, p) = 0, \quad F_1(z, V) = L - V = 0, \quad F_{-1}(z, p) = \langle F_p, p - q \rangle = 0 \quad (3.2)$$



Фиг. 1

Здесь  $p$  – предельное значение градиента функции  $V$  из вторичной области,  $q = L_z = (L_x, L_y)$ . Первое равенство в (3.2) – уравнение Беллмана, второе – условие непрерывности цены, третье – условие касания регулярных траекторий из вторичной области особой поверхности.

Согласно известной методике [3], уравнения особых характеристик записываются при помощи гамильтониана и соответствующей характеристической системы

$$\begin{aligned} \mu H &= \{F_{-1}F_1\} F_0 + \{F_1F_0\} F_{-1} + \{F_0F_{-1}\} F_1 \\ z' &= H_p, \quad p' = -H_z - H_V p, \quad V' = \langle p, H_p \rangle \end{aligned}$$

Здесь  $\mu$  – множитель однородности,  $\{F, G\} = \langle F_z + pF_V, G_p \rangle - \langle G_z + pG_V, F_p \rangle$  – скобки Якоби.

Для функции  $F_i$  вида (3.2) характеристическая система с учетом тождества  $F_{-1} \equiv \{F_1, F_0\}$  имеет вид

$$z' = F_0 p, \quad p' = -F_{0z} - \{F_0, \{F_1, F_0\}\} / \{F_1, \{F_0, F_1\}\} (p - q) \quad (3.3)$$

Эти уравнения можно использовать для построения особой поверхности, если известно соответствующее значение вектора  $p$  для  $z \in B$ .

Дифференцируя равенство  $V(z) - L(z) = 0$  по  $2n-2$  касательным направлениям многообразия  $B$ , можно вместе с первым и третьим равенством (3.2) получить систему уравнений относительно вектора  $p$ , которая имеет следующее решение ([3], лемма 5):

$$p(z) = R_z(z) = (q^+(z) + q^-(z))/2, \quad z \in B, \quad (q^\pm = L_z^\pm) \quad (3.4)$$

Для построения особой поверхности  $\Gamma = \partial z_2$  следует интегрировать систему (3.3) в обратном времени с начальными значениями  $z = z^0$ ,  $p = (q^+(z^0) + q^-(z^0))/2$ ,  $z^0 \in B$ .

Если в некоторой области матрица  $G$  является единичной, то функция  $F$  в (2.3) для этой области имеет вид

$$F(p) = -\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i^2} + \nu \sqrt{\sum_{i=n+1}^{2n} p_i^2} \quad (3.5)$$

Система (3.3) упрощается:

$$z' = F_p, \quad p' = [\langle S_{zz} F_p, F \rangle / \langle F_{pp} q, q \rangle] (p - q) \quad (3.6)$$

Отметим некоторые свойства первичного движения в окрестности множества  $B$ . Условия касания первичных движений, т.е. интегральных кривых системы (2.4), поверхности  $\Gamma_0$ , с обеих ее сторон имеют вид:

$$\langle F_p(z, q^+), q^+ - q^- \rangle = 0, \quad \langle F_p(z, q^-), q^+ - q^- \rangle = 0, \quad q^\pm = L_z^\pm \quad (3.7)$$

Проверка показывает, что оба равенства выполнены одновременно на некотором множестве  $B_0$ , которое в отличие от задачи преследования [3] лежит в первичной области,  $B_0 \in \Gamma_1$ . На часть поверхности  $\Gamma_1$ , лежащую между  $B$  и  $B_0$ , первичные движения подходят с обеих ее

сторон. Другая часть  $\Gamma_1$ , как и в задаче преследования, является рассеивающей поверхностью, т.е. первичные траектории отходят в обе стороны (фиг. 1). Отметим, что при  $\nu = 1$  множества  $B$  и  $B_0$  совпадают. При этом упомянутая система относительно вектора  $p$  допускает не отдельное решение (3.4), а однопараметрическое семейство вида

$$p_\lambda = \frac{1+\lambda}{2} q^+ + \frac{1-\lambda}{2} q^- \quad (3.8)$$

Это означает, что градиент функции  $V(z)$  не имеет непрерывного продолжения на множество  $B$ , к которому может подходить однопараметрическое семейство решений системы (2.5) — интегральная воронка.

Движения из первичной области подходят к особой поверхности  $\Gamma$ , а не удаляются от нее, как это имеет место для эквивокальной поверхности в задаче преследования. Таким образом, поверхность  $\Gamma$  и участок поверхности  $\Gamma_1$  между  $B_0$  и  $B$  качественно напоминает универсальную поверхность [1].

Приведенные утверждения обосновываются аналогично соответствующим известным утверждениям [3] с использованием соотношений (2.3), (2.4), (3.2), (3.4).

Рассмотрения данного раздела позволяют предложить четырехэтапный алгоритм построения оптимальных траекторий и цены игры в окрестности особых поверхностей.

На первом этапе в результате решения вариационной задачи (1.3) строятся зависимости  $L^+(z)$ ,  $L^-(z)$  в области, вообще говоря, более широкой, чем  $Z_1$ . Тем самым будет найдено первичное решение.

На втором этапе при помощи соотношений (3.1), (1.4) строится множество  $B$ . Если оно пусто, то анализ задачи завершен, первичное решение является решением игры во всем пространстве. Если  $B$  непусто, то выполняется третий этап.

На третьем этапе строятся ветви  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$  сингулярной поверхности — огибающей. Для этого в обратном времени интегрируется система (3.3) с начальными условиями  $z = z^0$ ,  $p = R_z(z^0)$ ,  $z^0 \in B$ , причем для ветви  $\Gamma^+$  ( $\Gamma^-$ ) используются функции  $L^+$ ,  $q^+$ , ( $L^-$ ,  $q^-$ ). Поверхность  $\Gamma$  разделяет области  $Z_1$ ,  $Z_2$ .

На четвертом этапе область  $Z_2$  заполняется оптимальными траекториями путем интегрирования в обратном времени системы (2.5) с начальными условиями  $z = z^0$ ,  $p = p(z^0)$ ,  $z^0 \in \Gamma$ .

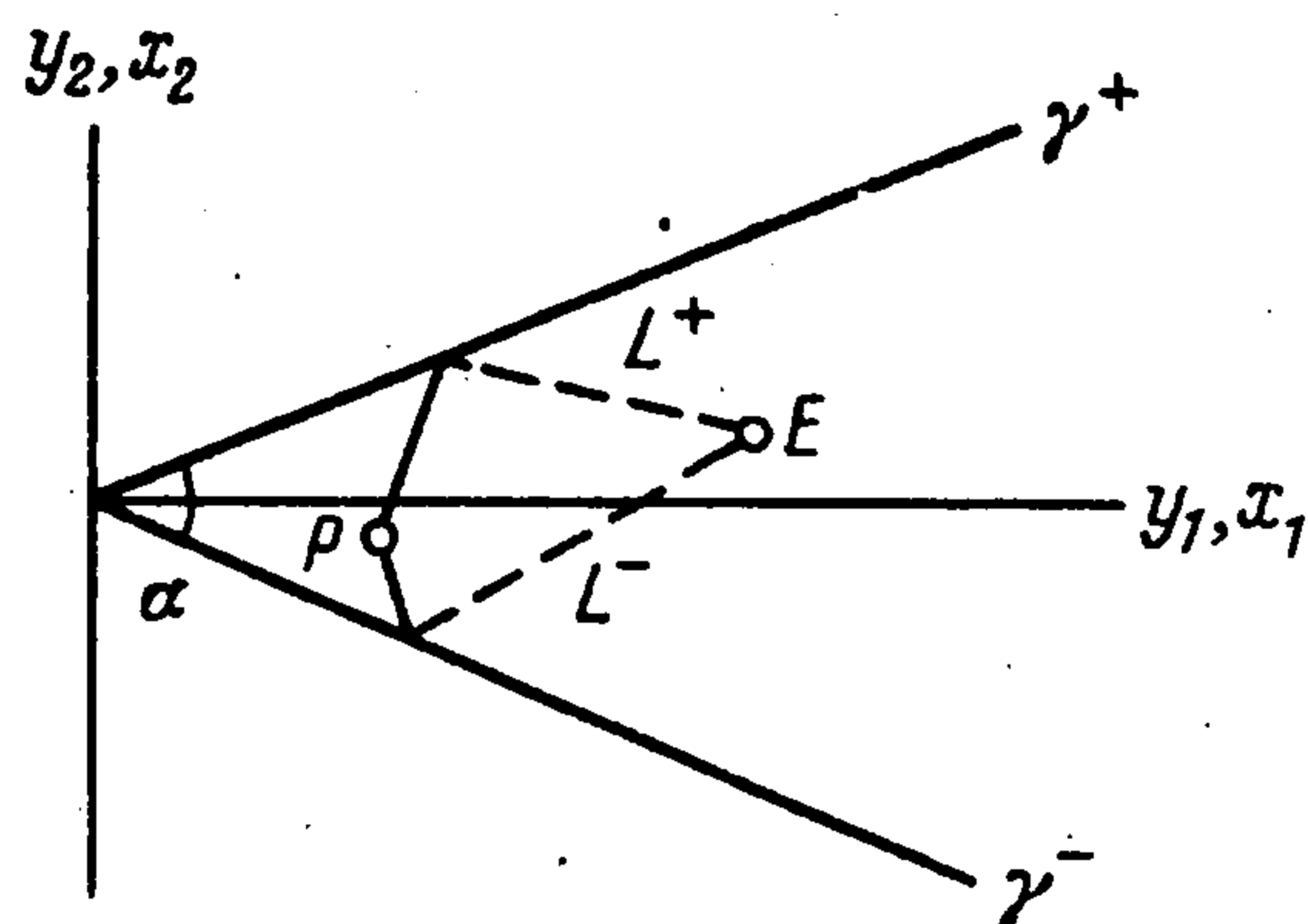
**4. Задача сближения на двумерном конусе.** Рассмотрим в качестве  $N$  выпуклую коническую поверхность  $K + \{O\}$  ( $K$  — конус без вершины  $O$ ) в трехмерном евклидовом пространстве, метрика которого переносится на  $M$ . Для описания движения игроков на конусе можно ввести евклидову систему локальных координат следующим образом. Сложим конус по произвольной паре противоположных образующих  $\gamma^+$ ,  $\gamma^- \subset K$  в плоский двусторонний угол, величину которого обозначим  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . Рассмотрим в плоскости этого угла декартову прямоугольную систему координат с началом в вершине конуса и осью абсцисс, совпадающей с биссектрисой угла (фиг. 2). Координаты  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  точек  $P$  и  $E$  доставляют евклидову систему локальных координат, уравнения движения в которых имеют вид

$$P: x' = u, \quad |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \leq 1; \quad E: y' = v, \quad |v| \leq v, \quad v > 1 \quad (4.1)$$

Подробный вывод этих и некоторых других соотношений данного раздела дан в [3]. Указанное преобразование конуса не меняет длину геодезической линии. Это позволяет трактовать игру сближения на конусе как эквивалентную игру на двустороннем угле. Геодезическими линиями на угле, доставляющими локальные минимумы  $L^\pm$  в (1.7), являются два семейства двузвенных ломаных с длинами:

$$L^\pm(z) = [|x|^2 + |y|^2 - 2(x_1 y_1 - x_2 y_2) \cos \alpha \mp 2(x_2 y_1 + x_1 y_2) \sin \alpha]^{1/2} \quad (4.2)$$

где  $(x_1, x_2)$ ,  $(y_1, y_2)$  — локальные евклидовы координаты точек  $P$ ,  $E$ . Функции (4.2) определяют решение первого этапа алгоритма из разд. 3. Они получены в предполо-



Фиг. 2

жении, что точки  $P$  и  $E$  расположены на разных листах угла, чего можно добиться подходящим выбором образующих  $\gamma^\pm$ .

Введем в рассмотрение автомодельные переменные  $\rho, \varphi, \tau$ , которые связаны с исходными переменными следующими соотношениями:  $\rho = r/R, dt/d\tau = R$ , где  $r, R$  — расстояния от вершины игроков  $E, P$  соответственно,  $\varphi$  — угол между ними на плоской развертке конуса. Отметим, что автомодельное время  $\tau$  связано с исходным неинтегрируемым дифференциальным соотношением. Уравнения движения и функционал в автомодельных переменных записываются в виде [3]

$$\rho' = v_1 - \rho u_1, \quad \varphi' = v_2/\rho - u_2, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq \nu$$

$$J = \min_{0 \leq \tau < \infty} \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi} \exp\left(\int_0^\tau u_1(\xi) d\xi\right)$$

Минимизируемая величина в функционале  $J$  при  $\tau = 0$  равна отношению  $L/R$ .

Отметим следующую трактовку автомодельных переменных. Введем в плоскости развертки конуса комплексные координаты игроков  $z_P, z_E$ :  $z_P = z_P^0 e^{i\psi_P}, z_E = z_E^0 e^{i\psi_E}$ . Тогда отношение  $w = z_E/z_P = \rho e^{i(\psi_E - \psi_P)}$  представляет собой комплексное число, модулем и аргументом которого являются автомодельные переменные  $\rho, \varphi$ .

Множество  $B$  в автомодельных переменных является точкой с координатами  $\rho = \rho_B, \varphi = \alpha$ . Уравнение для  $\rho_B$  можно получить при помощи соотношений (4.2) и (3.1). Для этого заметим, что благодаря вращательной симметрии конуса любую точку многообразия можно привести к виду  $(x_1, 0, y_1, 0)$ . Выбором единицы измерения длины можно один из параметров  $x_1, y_1$  приравнять данной величине, например,  $y_1 = 1$ . Тогда  $x_1 = 1/\rho_B$  и уравнение для  $\rho_B$  принимает вид

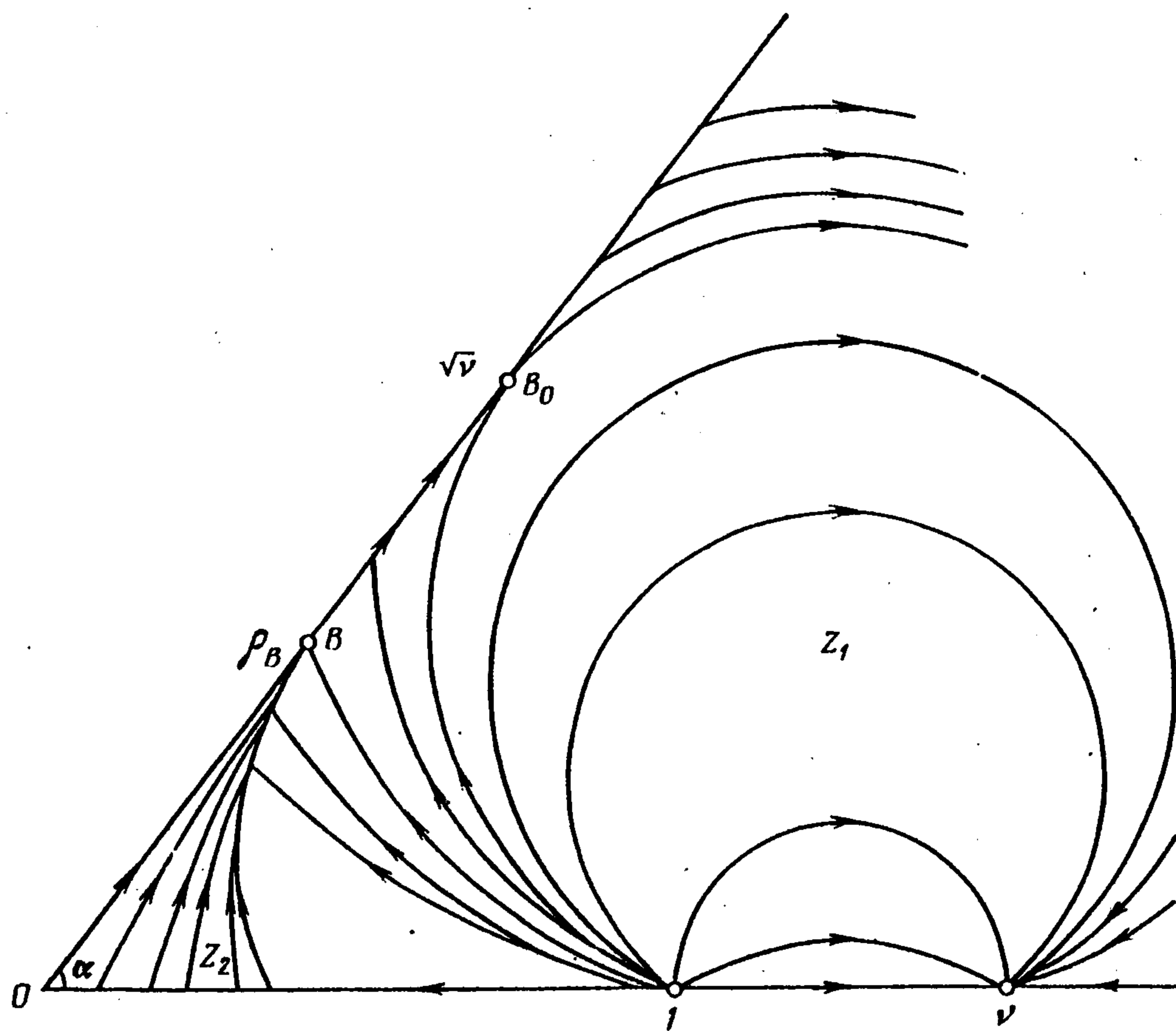
$$-|1 - \rho \cos \alpha| + \nu |\rho - \cos \alpha| = 0 \quad (4.3)$$

В области  $\Pi_1 = \{(\alpha, \nu), \pi/2 < \alpha \leq \pi, \nu > -1/\cos \alpha\}$  значений параметров уравнение (4.3) корня не имеет, а в области  $\Pi_2 = \Pi \setminus \Pi_1, \Pi = \{(\alpha, \nu): 0 \leq \alpha \leq \pi, \nu > 1\}$ , корень неединственен. Анализ на основе необходимых условий оптимальности показывает, что в области  $\Pi_2$  в оптимальную конструкцию может быть включен только один корень, задаваемый формулой

$$\rho_B = (1 + \nu \cos \alpha)/(\nu + \cos \alpha), \quad (\alpha, \nu) \in \Pi_2 \quad (4.4)$$

На разделяющей кривой  $\Pi_* = \{(\alpha, \nu), \alpha \geq \pi/2, \nu = -1/\cos \alpha\}$  выполнено равенство  $\rho_B = 0$ .

Решение (4.4) имеет следующий геометрический смысл. Рассмотрим движение игроков вдоль противоположных образующих  $\gamma^+, \gamma^-$ , причем игрок  $P$  движется в сторону вершины, а  $E$  — от нее. Расстояния игроков до вершины являются линей-



Фиг. 3

ными функциями времени:  $R = R_0 - t$ ,  $r = r_0 + vt$ . При таком движении выполнено равенство  $L^+(z) = L^-(z) = (r^2 + R^2 - 2rR\cos\alpha)^{1/2}$ . Подставив в  $L(r, R)$  зависимости  $r(t)$ ,  $R(t)$  и минимизируя  $L$  по времени, получим, что в точке минимума  $t = t^*$  выполнено условие  $r(t^*)/R(t^*) = \rho_B$ .

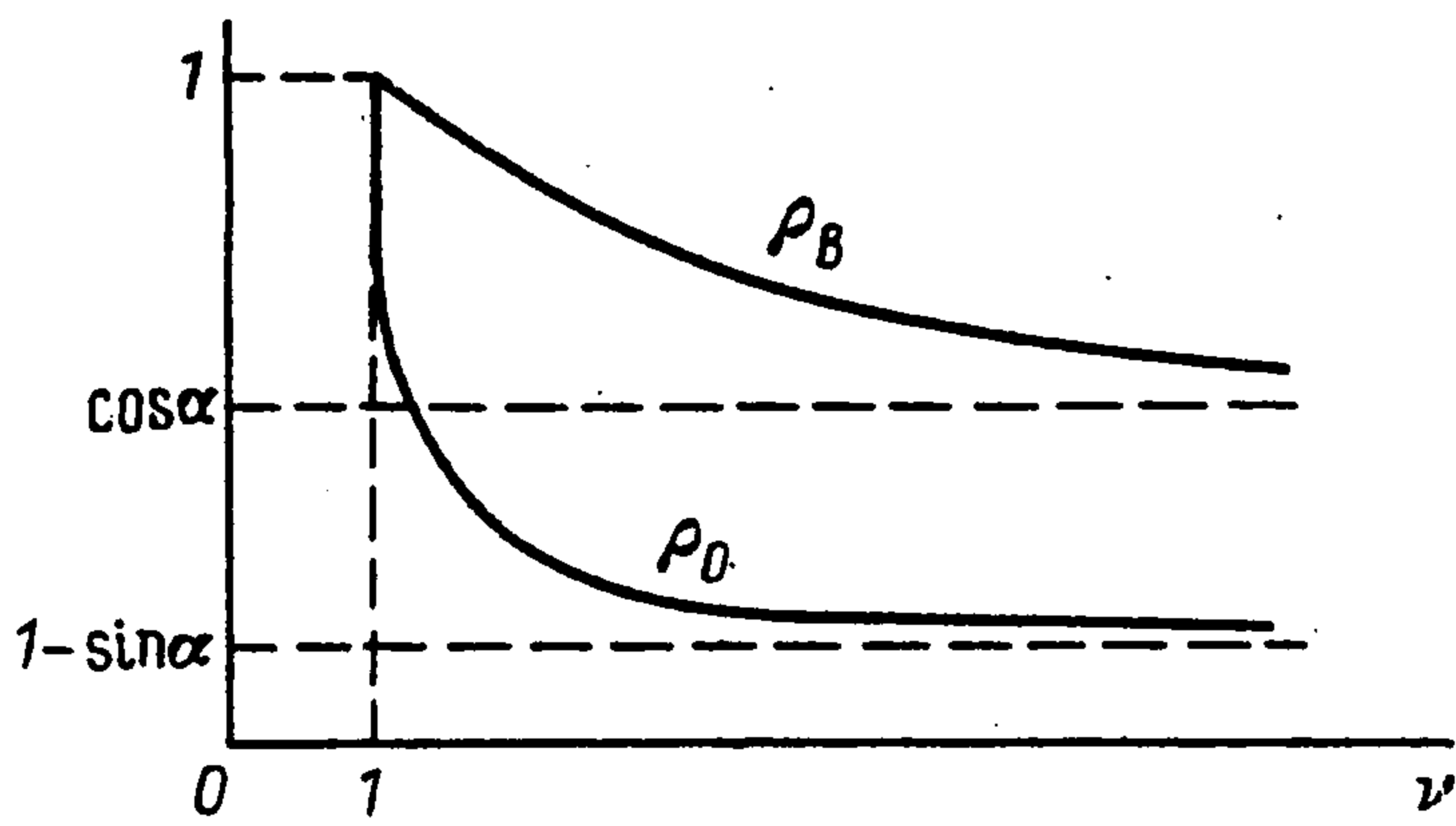
Для области  $\Pi_1$ , где уравнение (4.3) корня не имеет, область  $Z_2$  пуста, ценой является начальное расстояние между игроками, алгоритм разд. 3 завершен.

Для области  $\Pi_2$  следует выполнить третий и четвертый этап алгоритма. Сначала необходимо интегрировать систему особых характеристик (3.6) с функциями (3.5) (при  $n = 2$ ) и (4.2) со стандартными начальными значениями  $z_B = (1/\rho_B, 0, 1, 0)$  и  $p_B = 1/2(q_B^+ + q_B^-)$ . В силу симметрии многообразия все остальные траектории, составляющие поверхность  $\Gamma$ , получатся путем простого пересчета из стандартной, см. [4]. Затем для заполнения области  $Z_2$  следует выпустить в обратном времени из точек поверхности  $\Gamma$  решения системы (2.5) первого порядка с функцией (3.5).

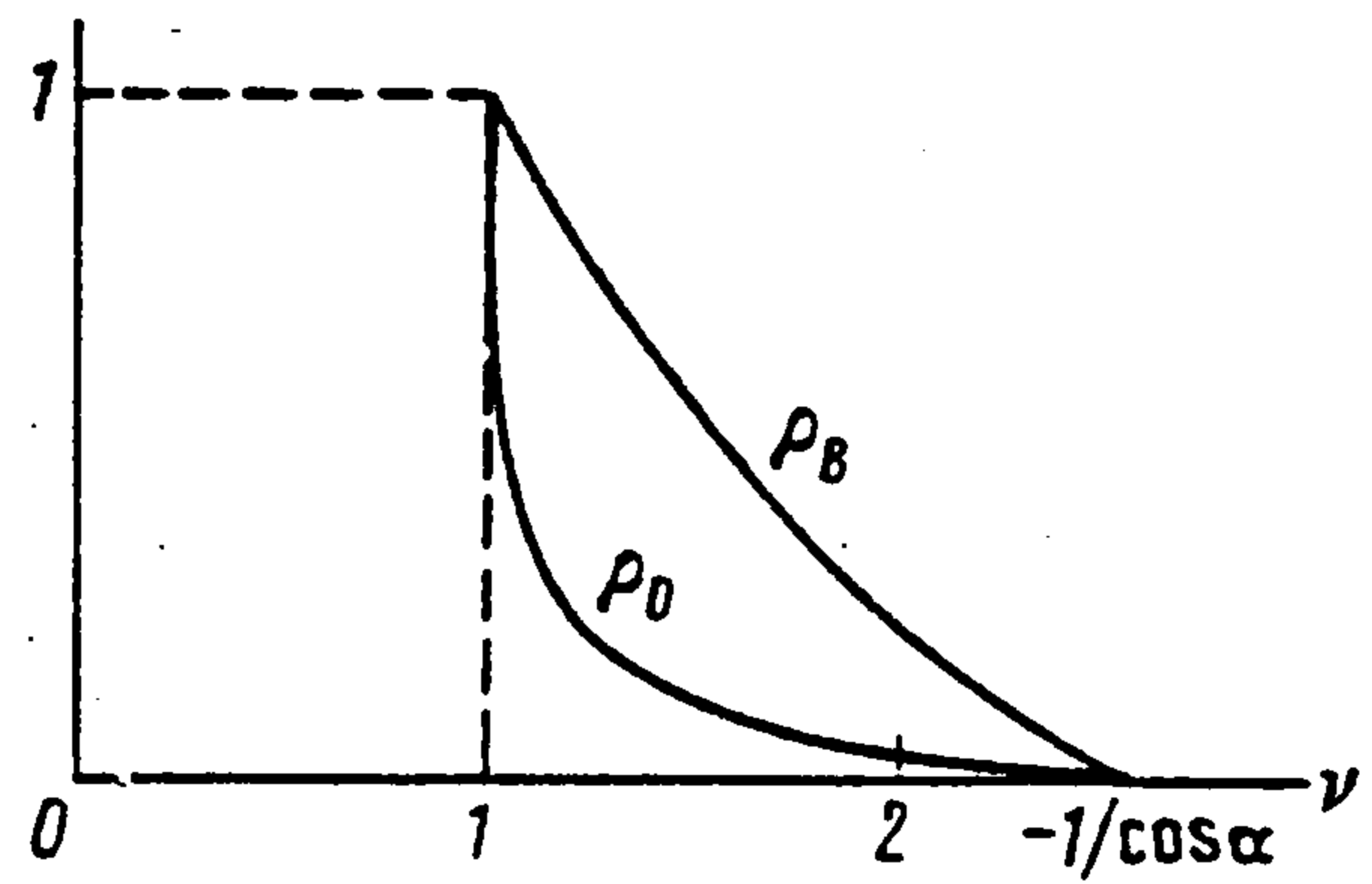
На фиг. 3 представлена в полярных координатах  $\rho, \varphi$  симметричная половина картины синтеза для области  $\Pi_2$ . Кривая  $BD$  — особая поверхность  $\Gamma$ . Выход к точке  $D(\rho = \rho_0, \varphi = 0)$  происходит за конечное время. При движении по ней расстояние между игроками сохраняется постоянным. Если игрок  $E$  в некоторой точке кривой  $BD$  перейдет к движению по геодезической  $BD$ , то расстояние между игроками начнет увеличиваться. Однако траектория при этом отклонится во вторичную область, и окончательный результат для игрока  $E$  будет хуже. Проводилось численное моделирование подобных задач.

Отрезок  $OD$  является рассеивающей кривой, в концах которой проверены обобщенные необходимые условия оптимальности (2.2).

На фиг. 3 изображены первичные траектории, соответствующие движению игроков вдоль геодезических линий, их соединяющих. Они подходят либо к особой поверхности  $\Gamma$  либо за бесконечное время к точке  $\rho = v, \varphi = 0$ . Начинаются первичные движения в окрестности точки  $\rho = 1, \varphi = 0$  либо на рассеивающей части луча  $\varphi = \alpha$ ,



Фиг. 4



Фиг. 5

$\rho \geq \sqrt{\nu}$ . Используя условия качания (3.7), можно получить, что первичная траектория касается луча  $\varphi = \alpha$  при  $\rho = \sqrt{\nu}$ .

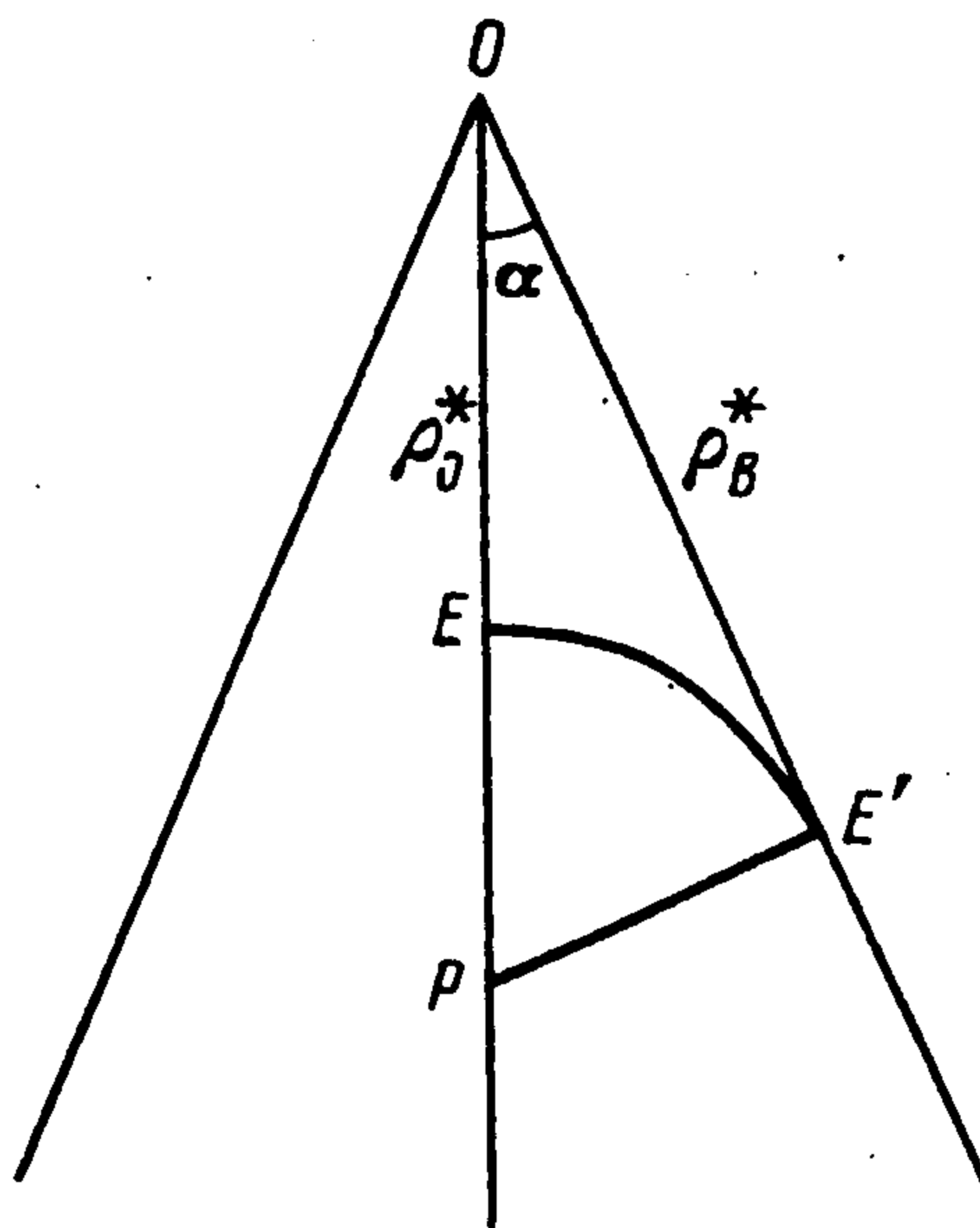
Первичные траектории можно строить как отображение  $z \rightarrow \rho, \varphi$  интегральных кривых системы (2.4). Параметрическое представление для них в полярных координатах  $\rho, \varphi$  отличается от соотношений (2.11) [3] только знаком для  $\operatorname{tg} \varphi$ . Используя комплексную трактовку автомодельных переменных, можно показать, что образы всех регулярных движений являются окружностями в плоскости  $\rho, \varphi$ . Действительно, первичные и вторичные регулярные движения игроков в комплексной плоскости развертки конуса осуществляются по прямым  $z_P(t) = z_P^0 + u^0 t$ ,  $z_E = z_E^0 + v^0 t$ . Здесь  $z_E^0, z_P^0, u^0, v^0$  — комплексные координаты и скорости игроков,  $t$  — вещественное время. Это следует из замечания в конце разд. 2. Для однородной комплексной переменной, введенной выше, получаем

$$w = (z_E^0 + v^0 t) / (z_P^0 + u^0 t)$$

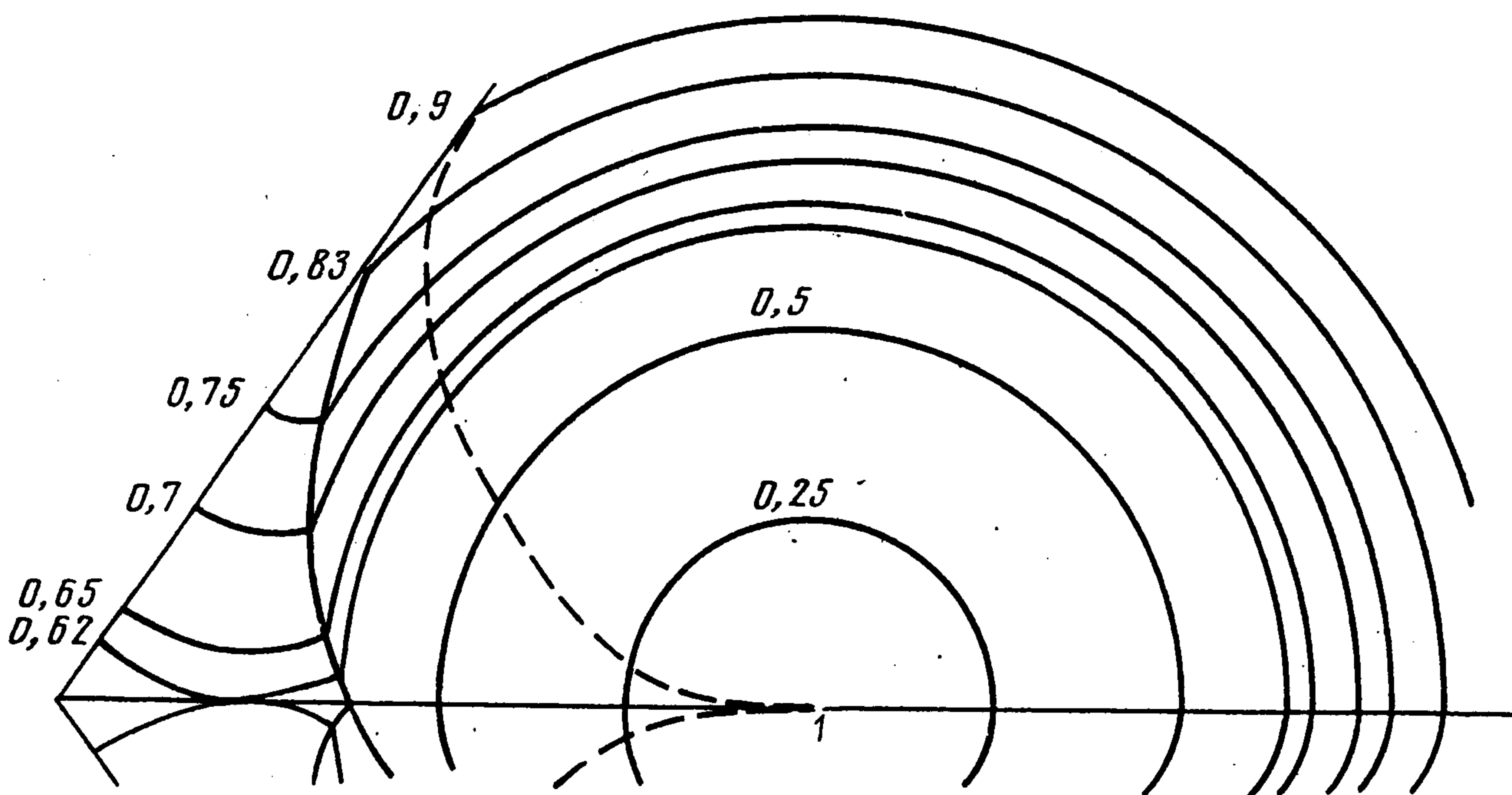
Это дробно-линейное преобразование переводит вещественную ось  $z$ -плоскости в окружности на  $w$ -плоскости. Для первичных движений центры этих окружностей расположены на прямой, перпендикулярной оси  $\varphi = 0$  и проходящей через точку  $\rho = (1 + \nu)/2$ .

Зависимости  $\rho_B(\nu), \rho_0(\nu)$ , построенные численно при фиксированном  $\alpha$ , представлены на фиг. 4 для значения  $\alpha = 2 \operatorname{arctg}^{1/2}$  из интервала  $[0, \pi/2]$  и на фиг. 5 для  $\alpha = 2 \operatorname{arctg}^{3/2}$  из интервала  $[\pi/2, \pi]$ . Обозначим через  $\rho_B^*, \rho_0^*$  пределы  $\rho_B, \rho_0$  при  $\nu \rightarrow \infty$  и при  $\alpha < \pi/2$ . Как видно из формулы (4.4),  $\rho_B^* = \cos \alpha$ . Покажем, что  $\rho_0^* = 1 - \sin \alpha$ . Рассмотрим начальную позицию игроков, соответствующую точке  $D$ , фиг. 3. При достаточно больших значениях  $\nu$  за время движения фазовой точки от  $D$  к  $B$  на фиг. 3 игрок  $P$  пройдет достаточно малое расстояние. Предельное движение игроков по сингулярной траектории при  $\nu = \infty$  состоит в следующем: игрок  $P$  стоит на месте, а игрок  $E$  движется, оставаясь на равном расстоянии от  $P$ . На плоской развертке конуса, представленной на фиг. 6, траектория точки  $E$  будет дугой окружности. Длина отрезка  $OE'$  на фиг. 6 равна  $\rho_B^*$ , длина  $OP$  равна единице, т.е. позиция  $PE'$  принадлежит множеству  $B$ . Поскольку  $\rho_B^* = \cos \alpha$ , то отрезок  $PE'$  имеет длину, равную  $\sin \alpha$ , и перпендикулярен  $OE'$ , а дуга окружности  $EE'$  касается отрезка  $OE'$  в точке  $E'$ . Точка  $E$  задает начальное положение убегающего игрока, длина отрезка  $OE$  равна предельному значению  $\rho_0^* = 1 - \sin \alpha$ .

Отметим, что при  $\nu \rightarrow \infty$  рассматриваемой игровой задаче можно сопоставить следующую предельную задачу оптимального управления для игроков  $E$  при неподвижном игроке  $P$ . Целью игрока  $E$  является достижение некоторой точки на конусе, достаточно удаленной от вершины по сравнению с расстоянием  $OP$ . Игрок  $E$  может реализовать любую непрерывную траекторию с произвольным законом движения



Фиг. 6



Фиг. 7

вдоль нее; при этом он стремится максимизировать минимальное расстояние от точки  $P$ .

Решение предельной задачи можно построить, пользуясь простыми геометрическими рассуждениями. Если в начальный момент игрок  $E$  находится вне криволинейного треугольника  $OEE'$ , фиг. 6, то оптимальный результат равен начальному расстоянию  $PE$ . Результат для начальных положений точки  $E$  внутри треугольника  $OEE'$  не зависит от точки  $E$  и равен  $\sin \alpha$ . При этом траектория игрока  $E$  должна проходить через точку  $E'$ , не проникая внутрь касательной окружности.

На фиг. 7 в автономных переменных построены линии уровня цены для  $\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ ,  $\nu = 2$  из области параметров  $\Pi_2$  (эти линии симметричны относительно горизонтальной оси). Так как для области  $Z_1$  цена равна начальному расстоянию между игроками, то линиями уровня являются окружности  $1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi = \text{const}$  с центром в точке  $\rho = 1$ ,  $\varphi = 0$ . В области  $Z_2$  линии уровня построены численно. Знание линий уровня цены игры позволяет в каждой точке фазового пространства найти приближенное значение оптимальных управлений обоих игроков, т.е. построить оптимальный синтез.

5. Случай  $\nu = 1$ . Задача сближения при  $\nu = 1$  интересна тем, что является промежуточной между задачами преследования и сближения и сочетает в себе их свойства.

При  $\nu = 1$  множества  $B_0$  и  $B$  совпадают,  $\rho_B = 1$ , и поверхность  $\Gamma_1$  полностью является рассеивающей. Существует первичная траектория  $-\Gamma_*$  (окружность), касающаяся луча  $\varphi = \alpha$  в точке  $\rho_B$ . Расчеты показывают, что к этой траектории приближается особая кривая  $BD$  при  $\nu \rightarrow 1 + 0$ . Алгоритм построения особой поверхности из разд. 3 оказывается неработоспособным при  $\nu = 1$ , так как уравнения (3.3), (3.6) теряют смысл в точках множества  $B$ .

Завершить картину синтеза, т.е. заполнить оптимальными вторичными траекториями криволинейный треугольник  $BOD$  ( $B = (1, \alpha)$ ),  $D = (1, 0)$ ), здесь позволяет следующее предположение. Упомянутая первичная траектория  $\Gamma_*$  является границей первичной области, а все вторичные траектории касаются ее в точке  $B$ , т.е. образуют интегральную воронку траекторий, втекающих из вторичной области в точку  $B$ . Градиент  $p$  цены игры разрывен и не может быть непрерывно доопределен из вторичной области на множество  $B$ . Однопараметрическое семейство (3.8) предельных значений градиента функции  $V(x_1, x_2, y_1, y_2)$  в точке  $z_B = (1, 0, 1, 0)$  имеет вид

$$p(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} (a, \lambda, a, \lambda), \quad |\lambda| \leq 1, \quad a = \operatorname{tg} \alpha / 2$$

$$p(0) = p_B = 1/2 (q^+ + q^-), \quad p(\pm 1) = q^\pm \quad (5.1)$$

Из точки  $z_B$  в обратном времени исходит однопараметрическое семейство регулярных траекторий  $z(\tau, \lambda) = z_B - F_p(p(\lambda))\tau$ ,  $\tau \geq 0$ . В силу (5.1) траектория  $z(\tau, \pm 1)$  совпадает с первичной касательной траекторией — окружностью  $\Gamma_*$  в плоскости  $\rho, \varphi$ , а зависимость  $z(\tau, 0)$  в переменных  $\rho, \varphi$  соответствует движению по отрезку  $OB$  (фиг. 3).

Промежуточные траектории  $z(\tau, \lambda)$  при  $0 < \lambda < 1$  образуют интегральную воронку и позволяют заполнить треугольник  $OBD$ , фиг. 3.

Как было отмечено, все регулярные траектории в полярных координатах  $\rho, \varphi$  являются окружностями. В рассматриваемом случае  $\nu = 1$  все вторичные регулярные траектории проходят через точку  $B$ , касаясь в нем прямой  $OB$ , которая является предельным элементом этого семейства — окружностью с бесконечным радиусом. Центры окружностей этого семейства лежат на прямой, перпендикулярной  $OB$  и проходящей через точку  $B$ . Выражение для радиуса имеет вид:  $R = a/\lambda$ ,  $a = \operatorname{tg} \alpha / 2$ . При  $\lambda = \pm 1$  получаем граничные первичные траектории (окружность  $\Gamma_*$ ), значение  $\lambda = 0$  соответствует прямолинейной траектории  $OB$ .

Построения разд. 4, 5 опираются на необходимые условия оптимальности (2.1)–(2.3), (3.1)–(3.7). Вопросы достаточности требуют специальных исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. Меликян А.А., Овакимян Н.В. Особые траектории в задаче простого преследования на многообразии // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 54–62.
3. Меликян А.А. Необходимые условия оптимальности на поверхности разрыва одного типа в дифференциальной игре // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1981. № 4. С. 10–18.

Москва

Поступила в редакцию  
13.IX.1991