УДК 62–50

© 1993 г. В.Б. Колмановский, Н.И. Королева

О СИНТЕЗЕ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИИ

Строится синтез оптимального управления билинейными системами с запаздыванием в управлении и координатах путем сведения к решению линейной краевой задачи. Приводится биологический пример. Оптимальное управление билинейными системами с запаздыванием только в фазовых координатах изучено в [1].

1. Постановка задачи. Рассмотрим билинейную систему с последействием

$$\dot{X}(t) = A_0(t)X(t) + A_1(t)X(t-h) + A_2(t)u(t-h_1) +$$

$$+ A(t)X(t) + B(t)u(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \ X(t) \in R^n, \ u \in R \tag{1.1}$$

Элементы A, A_i, B – кусочно-непрерывные ограниченнные функции, запаздывания h и h_1 положительны, момент $T > 0$ задан.

Начальные условия имеют вид

$$X_0 = \varphi \in C[-h, 0], \quad u_0 = \psi \in D[-h_1, 0] \tag{1.2}$$

где $C[-h, 0]$ – пространство непрерывных функций на отрезке $[-h, 0]$, $D[-h_1, 0]$ – пространство кусочно-непрерывных ограниченных функций с равномерной метрикой, функции φ и ψ заданы; $X_t = X(t+\theta)$, $-h \leqslant \theta \leqslant 0$; $u_t = u(t+\zeta)$, $-h_1 \leqslant \zeta \leqslant 0$.

Систему (1.1) можно рассматривать при $A_0(t) \equiv 0$, если осуществить замену переменных $X = Z(t, 0)Y$, где $Z(t, s)$ – матрица Коши уравнения $\dot{X}(t) = A_0(t)X(t)$. Поэтому ниже считается $A_0 = 0$.

Критерий качества имеет вид

$$J = X'(T)N_1X(T) + \int_{t_0}^{T} [X'(t)N_2(t)X(t) + u'(t)N_0(t)u(t) +$$

$$+ F(t, X_t, u_t)]\, dt, \quad N_0 > 0 \tag{1.3}$$

где штрих – знак транспонирования, N_i неотрицательно-определенные, кусочно-непрерывные ограниченные матрицы.

Непрерывный неотрицательный функционал

$$F: R \times C[-h, 0] \times D[-h_1, 0] \to R$$

его конкретный вид приводится ниже, полученный с использованием критерия обобщенной работы [2], модифицированного для систем с запаздыванием [3], позволяет свести уравнение Беллмана к линейному.

Допустимым управлением называется любая кусочно-непрерывная функция $\mathbf{u}$: $[t_0, T] \to R$ такая, что для любых $(t, \varphi, \psi) \in [t_0, T] \times C[-h, 0] \times D[-h_1, 0]$ существует решение уравнения (1.1) на отрезке $[t, T]$ с начальными условиями $X_t = \varphi$, $u_t = \psi$ при управлении $\mathbf{u}$. Множество всех допустимых управлений обозначим W.

Задача оптимального управления состоит в определении такого допустимого управления, которое минимизирует критерий качества (1.3).

2. Условия оптимальности. Определим функционал Беллмана V: $[t_0, T] \times C[-h, 0] \times D[-h_1, 0] \to R$ следующим образом. Пусть $X(\cdot; t, \varphi, \psi; u) : [t, T] \to R^n$, $(t \in [t_0, T]$, $\varphi \in C[-h, 0]$, $\psi \in D[-h_1, 0]$, $u \in W)$ – решение уравнения (1.1) при управлении u с начальными условиями $X(t+\theta; t, \varphi, \psi; u) = \varphi(\theta)$, $-h \leqslant \theta \leqslant 0$, $u(t+\zeta) = \psi(\zeta)$, $-h_1 \leqslant \zeta \leqslant 0$.

Обозначим $X_\tau(t, \varphi, \psi; u) = X(\tau + \cdot; t, \varphi, \psi; u) : [-h, 0] \to R^n$

Тогда

$$V(t, \varphi, \psi) = \inf_{U \in W} \{X'(T; t, \varphi, \psi; u) N_1 X(T; t, \varphi, \psi; u) +$$

$$+ \int_t^T X'(s; t, \varphi, \psi; u) N_2(s) X(s; t, \varphi, \psi; u) + u'(s) N_0(s) u(s) +$$

$$+ F(s, X_s(t, \varphi, \psi; u), u_s) ds\}$$

Отметим, что обычно функционал Беллмана не зависит от управления. Однако для системы вида (1.1) с запаздыванием в управляющем устройстве минимальное значение критерия качества (1.3) однозначно зависит от предшествующих значений управления.

Введем оператор

$$L_u V(t, \varphi, \psi) =$$

$$= \overline{\lim_{\Delta \to 0+}} \frac{1}{\Delta} [V(t+\Delta, X_{t+\Delta}(t, \varphi, \psi; u), v_{t+\Delta}) - V(t, \varphi, \psi)]$$

Здесь $v_{t+\Delta}$ – управление, равное u на отрезке $[t, t+\Delta]$ и равное ψ на $[t+\Delta-h, t]$. Отметим, что оператор $L_u V$ есть полная производная функционала $V(t, \varphi, \psi)$ вдоль траекторий системы (1.1) при управлении u.

Стандартное применение метода динамического программирования приводит к следующим условиям оптимальности.

Теорема. Пусть существует функционал

$$V_0 : [t_0, T] \times C[-h, 0] \times D[-h_1, 0] \to R$$

удовлетворяющий локальному условию Липшица, и функционал

$$u_0 : [t_0, T] \times C[-h, 0] \times D[-h_1, 0] \to R$$

удовлетворяющий условию Каратеодори, такие, что

$$\inf_{u \in R} \Phi(u; t, \varphi, \psi) = \Phi(u_0; t, \varphi, \psi) \tag{2.1}$$

$$\Phi(u; t, \varphi, \psi) = [L_u V_0(t, \varphi, \psi) + \varphi'(0) N_2(t) \varphi(0) + u' N_0(t) u + F(t, \varphi, \psi)]$$

$$V_0(t, \varphi, \psi) = \varphi'(0) N_1(t) \varphi(0) \tag{2.2}$$

Тогда $u_0(t, \varphi, \psi)$ – оптимальное управление, а $V_0(t, \varphi, \psi)$ – функционал Беллмана в задаче (1.1)–(1.3)

Замечание. Приведенные условия оптимальности остаются в силе и для случая $u \in R^m$. При этом A – тензор с компонентами a^i_{jl}, произведение AXu – вектор с компонентами $\sum_{j,l} a^i_{jl}$ $(i = 1, \ldots n)$ и инфимум в (2.1) вычисляется по векторному параметру $u \in R^m$.

3. Построение решения. Будем искать решение задачи (2.1), (2.2) в виде

$$V_0(t,\varphi,\psi)=\varphi'(0)P(t)\varphi(0)+\varphi'(0)\int_{-h}^{0}Q(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\int_{-h}^{0}\varphi'(\tau)Q'(t,\tau)d\tau\varphi(0)+\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\varphi'(\tau)R(t,\tau,\tau_1)\varphi(\tau_1)d\tau d\tau_1+$$

$$+\varphi'(0)\int_{-h_1}^{0}L(t,\rho)\psi(\rho)d\rho+\int_{-h_1}^{0}\psi'(\rho)L'(t,\rho)d\rho\varphi(0)+$$

$$+\int_{-h}^{0}\int_{h_1}^{0}\varphi'(\tau)K(t,\tau,\rho)\psi(\rho)d\tau d\rho+\int_{-h}^{0}\int_{-h_1}^{0}\psi'(\rho)K'(t,\tau,\rho)\varphi(\tau)d\tau d\rho+$$

$$+\int_{-h_1}^{0}\int_{-h_1}^{0}\psi'(\rho)M(t,\rho,\rho_1)\psi(\rho_1)d\rho d\rho_1,\quad P(t)\geqslant 0 \qquad (3.1)$$

Все матрицы в (3.1) предполагаются кусочно-непрерывно дифференцируемыми ограниченными функциями. Подставим (3.1) в выражение (2.1) и найдем управление u_0, доставляющее инфимум. Получим

$$u_0(t,\varphi,\psi)=-N_0^{-1}(t)\,\{\,[C'(t)P(t)+L'(t,0)]\,\varphi(0)+$$

$$+\int_{-h}^{0}[K'(t,\tau,0)+C'(t)Q(t,\tau)]\,\varphi(\tau)d\tau+\int_{-h_1}^{0}[M'(t,\tau,0)+C'(t)L(t,\tau)]\,\psi(\rho)d\rho\,\} \qquad (3.2)$$

$$C(t)=(A(t)\varphi(0)+B(t))$$

Положим теперь в функционале (2.1)

$$F(t,X_t,u_t)=N_0^{-1}(t)\{\,[C'(t)P(t)+L'(t,0)]\,X(t)+\int_{-h}^{0}[K'(t,\tau_1,0)+$$

$$+C'(t)Q(t,\tau)]\,X(t+\tau)d\tau+\int_{-h_1}^{0}[M'(t,\tau,0)+C'(t)L(t,\tau)]\,u(t+\tau)d\tau\,\}^2 \qquad (3.3)$$

Для определения коэффициентов функционала V_0 подставим (3.1)–(3.3) в (2.1), (2.2) и приравняем нулю коэффициенты при соответствующих квадратичных формах переменных φ и ψ. Получим систему уравнений

$$P^{\cdot}(t)+Q(t,0)+Q'(t,0)+N_2(t)=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\tau}\right)Q(t,\tau)+R(t,0,\tau)=0 \qquad (3.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\tau_1}\right)R(t,\tau,\tau_1)=0,\quad\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\rho}\right)K(t,\tau,\rho)=0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\partial}{\partial\rho_1}\right)M(t,\rho,\rho_1)=0,\quad\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial\rho}\right)L(t,\rho)+K(t,0,\rho)=0$$

$$0\leqslant t\leqslant T,\ -h_1\leqslant\rho,\ \rho_1\leqslant 0,\ -h\leqslant\tau,\tau_1\leqslant 0$$

Приравнивая нулю квадратичные формы переменных $X(t-h)$ и $u(t-h_1)$, получим граничные условия

$$P(T)=N_1;\ Q(T,\ \tau)=R(T,\tau,\tau_1)=L(T,\rho)=K(T,\tau,\rho)=M(T,\rho,\rho_1)\equiv 0$$

$$-h_1<\rho,\rho_1\leqslant 0,\ -h<\tau,\tau_1\leqslant 0;$$

$$-Q(t,-h)+P(t)A_1(t)=0,\qquad R(t,\tau,\rho)=R'(t,\rho,\tau)$$

$$-R(t,-h,\tau)-R'(t,\tau,-h)+2A_1'(t)Q(t,\tau)=0 \tag{3.5}$$

$$-L(t,-h_1)+P(t)A_2(t)=0,\ \ -K(t,-h,\rho_1)+A_1'(t)L(t,\rho_1)=0$$

$$-K(t,\tau,-h_1)+Q'(t,\tau)A_2(t)=0$$

$$-M(t,-h_1,\rho)-M'(t,\rho,-h_1)+2A_2'(t)L(t,\rho)=0$$

$$M(t,\rho,\rho_1)=M'(t,\rho_1,\rho),\ \ 0\leqslant t\leqslant T,\ \ -h_1\leqslant\rho,\rho_1\leqslant 0,\ \ -h\leqslant\tau,\tau_1\leqslant 0$$

При сделанных предположениях существует [4] единственное решение задачи (3.4), (3.5) в классе кусочно-непрерывно дифференцируемых ограниченных функций и $P(t)\geqslant 0$. Поэтому [3] в некоторой окрестности начальной точки $t=0$ существует решение задачи (1.1) – (1.3) при управлении (3.2). Это решение может быть продолжено на весь отрезок $[0,\ T]$ (что означает допустимость управления u_0, а следовательно, и его оптимальность).

Действительно, поскольку в силу (2.1) полная производная функционала V_0 в силу системы (1.1) при управлении u_0 неположительна, то

$$V_0(t,X_t,u_{0t})\leqslant V_0(0,\varphi,\psi)$$

Отсюда и из (2.1) вытекает, что

$$\int_0^t u_0'(s)N_0(s)u_0(s)ds\leqslant 2V_0(0,\varphi,\psi),\ \ u_0(s)=u_0(s,X_s,u_{0s})$$

Так как матрица $N_0(s)$ равномерно положительно определена, то при некоторой постоянной C

$$\int_0^t u_0^2(s)ds\leqslant CV_0(0,\varphi,\psi)$$

Таким образом, на любом отрезке $[0,\ t]$, на котором существует решение задачи (1.1) – (1.3) при управлении u_0, это управление вдоль решения равномерно по t интегрируемо с квадратом. Тогда соответствующая u_0 траектория X есть решение линейного уравнения (1.1) (с заменой u на u_0), коэффициенты которого интегрируемы с квадратом на $[0,\ T]$. Следовательно, решение $X(t)$ задачи (1.1) – (1.3) при управлении u_0 может быть продолжено на весь отрезок $[0,\ T]$.

Таким образом, решение исходной задачи оптимального управления сведено к краевой задаче (3.4), (3.5) и дается формулами (3.1), (3.2).

Рассмотрим вначале один частный случай, в котором решение задачи (3.4), (3.5) может быть представлено в аналитическом виде. Предположим, что система (1.1) имеет запаздывание h_1 только в управлении

$$X^{\cdot}(t)=[A(t)X(t)+B(t)]\,u(t)+A_2(t)u(t-h_1)$$

В этом случае решение соответствующего уравнения Беллмана (2.1), (2.2) имеет вид

$$V_0(t,\varphi,\psi)=\varphi'(0)P(t)\varphi(0)+\varphi'(0)\int_{-h_1}^{0}L(t,\rho)\psi(\rho)d\rho+$$

$$+\int_{-h_1}^{0}\psi'(\rho)L'(t,\rho)d\rho\varphi(0)+\int_{-h_1}^{0}\int_{-h_1}^{0}\psi'(\rho)M(t,\rho,\rho_1)\psi(\rho_1)d\rho d\rho_1$$

Оптимальное управление $u_0(t, X_t, U_{0t})$ в силу (3.2) дается формулой

$$U_0(t, X_t, U_{0t}) = -N_0^{-1}(t)[(A(t)X + B(t)]'(P(t)X(t) +$$

$$+ \int_{-h_1}^{0} L(t, \rho)U_0(t+\rho)d\rho) + \int_{-h_1}^{0} M(t, 0, \rho)U_0(t+\rho)d\rho + L'(t, 0)X(t)]$$

Матрицы P, L, M определяются как решение уравнений

$$P^{\cdot}(t) + N(t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \rho}\right)L(t, \rho) = 0, \qquad -h_1 \leqslant \rho, \rho_1 \leqslant 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial \rho_1}\right)M(t, \rho, \rho_1) = 0 \tag{3.6}$$

с граничными условиями

$$P(T) = N_1, \quad L(T, \rho) = 0, \ M(t, \rho, \rho_1) = 0, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \quad -h_1 < \rho, \rho_1 \leqslant 0$$

$$P(t)A_2(t) - L(t, -h_1) = 0 \tag{3.7}$$

$$2A_2'(t)L(t, \rho) - M(t, -h_1, \rho) - M'(t, \rho, -h_1) = 0$$

Решение краевой задачи (3.6), (3.7) имеет вид

$$P(t) = N_1 + \int_t^T N_2(s)ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

$$L(t, \rho) = \begin{cases} P(t+\rho+h_1)A_2(t+\rho+h_1), & t+\rho+h_1 < T, \\ 0 & , t+\rho+h_1 \geqslant T, \end{cases}$$

$$M(t, \rho, \rho_1) = \begin{cases} A_2'(t+\rho+h_1)P(t+\beta+h_1)A_2(t+\rho+h_1), & \omega < 0 \\ 0 & , \quad \omega \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\omega = \max(t+\rho+h_1 - T, \ t+\rho_1+h_1 - T), \ \beta = \max(\rho, \rho_1)$$

Обратимся теперь к общему случаю (3.4), (3.5). Представим решение задачи (3.4), (3.5) в виде суммы двух: первое при $N_2 = 0$ и произвольной матрице $N_1 \geqslant 0$ и второе при $N_1 = 0$ и произвольной матрице $N_2 \geqslant 0$.

Первое решение (при $N_2 = 0$) имеет вид

$$P(t) = b'(t)N_1 b(t), \qquad Q(t, \tau) = -b'(t)N_1 b^{\cdot}(t+\tau)$$

$$R(t, \tau, \tau_1) = b'^{\cdot}(t+\tau)N_1 b^{\cdot}(t+\tau_1), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad -h \leqslant \tau, \tau_1 \leqslant 0$$

$$L(t, \rho) = b'(t)N_1 b_1(t+\rho+h_1), K(t, \tau, \rho) = -b'(t+\tau)N_1 b_1(t+\rho+h_1)$$

$$M(t, \rho, \rho_1) = b_1'(t+\rho+h_1)N_1 b_1(t+\rho_1+h_1) \tag{3.8}$$

$$b_1(t+\rho+h_1) = \begin{cases} b(t+\rho+h_1)A_2(t+\rho+h_1), & t+\rho+h_1 \leqslant \min(T, \rho+h_1) \\ 0 & , \quad t+\rho+h_1 > \min(T, \rho+h_1) \end{cases}$$

Матрица $b(t)$ – решение задачи Коши

$$b^{\cdot}(t) = -b(t+h)A_1(t+h), \qquad b(T) = I, \qquad b(s) \equiv 0, \quad s \geqslant T$$

Для построения второго решения (при $N_1 = 0$) положим $t_i = T - ih$, $(i = 0, 1, \ldots)$ и определим функции L_1, M_1, A_3, A_4. При $t_{i+1} \leqslant t \leqslant t_i$ функция $A_3(t+\tau+h) = 0$, если $-t + t_{i+1} < \tau \leqslant 0$ и $A_3(t+\tau+h) = A_1(t+\tau+h)$, если $-h \leqslant \tau \leqslant -t + t_{i+1}$. Аналогично $A_4(t +$

$+ \rho + h_1) = A_2(t + \rho + h_1)$, $-h_1 \leqslant \rho \leqslant -t + t_{i+1}$; $A_4(t + \rho + h_1) = 0$, $-t + t_{i+1} < \rho \leqslant 0$, $t_{i+1} \leqslant t \leqslant t_i$. Наконец, $M_1(t_i, t + \rho - t_i, \rho) = 0$; $L_1(t_i, t + \rho - t_i) = 0$, $K_1(t_i, \tau, t + \rho - t_i) = 0$, если $-h_1 \leqslant \rho < -t + t_{i+1}$ и $K_1(t_i, \tau, t + \rho - t_i) = K(t_i, \tau, t + \rho - t_i)$, $M_1(t_i, t + \rho - t_i, \rho) = M(t_i, t + \rho - t_i, \rho)$, $L_1(t_i, t + \rho - t_i) = L(t_i, t + \rho - t_i)$, если $-t + t_{i+1} \leqslant \rho \leqslant 0$, $t_{i+1} \leqslant t \leqslant t_i$.

Тогда при $t_{i+1} \leqslant t \leqslant t_i$ справедливы рекуррентные соотношения

$$P(t) = P(t_i) + \int_t^{t_i} N_2(s)ds + \int_{t-t_i}^{0} [Q(t_i, s) + Q'(t_i, s)]\, ds + \int_{t-t_i}^{0}\int_{t-t_i}^{0} R(t_i, s, \alpha)dsd\alpha$$

$$Q(t, \tau) = [P(t_i) + \int_{t+\tau+h}^{t_i} N_2(s)ds + \int_{t-t_i}^{0} Q(t_i, s)ds + \int_{t-t_{i+\tau}}^{0} Q'(t_i, s)ds + \tag{3.9}$$

$$+ \int_{t-t_i}^{0} d\alpha \int_{t-t_{i+1}+\tau}^{0} R(t_i, s, \alpha)ds] A_3(t+\tau+h) + Q_1(t_i, t+\tau-t_i) + \int_{t-t_i}^{0} R_1(t_i, s, t+\tau-t_i)ds$$

Здесь

$$Q_1(t_i, \tau + t - t_i) = Q(t_i, \tau + t - t_i)$$

$$R_1(t_i, \tau + t - t_i, \tau_1) = R(t_i, \tau + t - t_i, \tau_1),\ -t + t_{i+1} \leqslant \tau \leqslant 0 \text{ и } Q_1(t_i, \tau + t - t_i) = 0$$

$$R_1(t_i, \tau + t - t_i, \tau_1) = 0,\ -h \leqslant \tau \leqslant -t + t_{i+1};\ -h \leqslant \tau_1 \leqslant 0,\ t_{i+1} \leqslant t \leqslant t_i$$

$$R_2(t_i, \tau + t - t_i, \tau_1 + t - t_i) = \begin{cases} R(t_i, \tau + t - t_i, \rho + t - t_i), & t_{i+1} \leqslant t \leqslant t_i, -t + t_{i+1} \leqslant \tau, \tau_1 \leqslant 0 \\ 0, & \text{если хотя бы один из аргументов } \tau, \tau_1 \\ & \text{не принадлежит интервалу } [-t + t_{i+1}, 0] \end{cases}$$

Тогда

$$R(t, \tau, \tau_1) = A_3'(t + \tau + h)[\int_{t+h+\max(\tau,\tau_1)}^{t_i} N_2(s)ds + P(t_i) + \int_{t-t_{i+1}+\tau_1}^{0} Q'(t_i, s)ds +$$

$$+ \int_{t-t_{i+1}+\tau}^{0} Q(t_i, s)ds + \int_{t-t_{i+1}+\tau}^{0} d\alpha \int_{t-t_{i+1}+\tau_1}^{0} R(t_i, s, \alpha)ds] A_3(t + \tau_1 + h) +$$

$$+ A_3'(t + \tau + h)[Q_1'(t_i, t + \tau_1 - t_i) + \int_{t-t_{i+1}+\tau}^{0} R_1(t_i, s, t + \tau_1 - t_i)ds] +$$

$$+ [Q_1(t_i, t + \tau - t_i) + \int_{t-t_{i+1}+\tau_1}^{0} R_1(t_i, t + \tau - t_i, s)ds] A_3(t + \tau_1 + h) +$$

$$+ R_2(t_i, t + \tau - t_i, t + \tau_1 - t_i) \tag{3.10}$$

Далее имеем

$$L(t, \rho) = [\int_{t+\rho+h_1}^{t_i} N_2(s)ds + P(t_i) + \int_{t-t_i}^{0} Q'(t_i, s)ds + \int_{t-t_{i+1}+\rho}^{0} Q(t_i, s)ds +$$

$$+ \int_{t-t_i}^{0} d\alpha \int_{t-t_{i+1}+\rho}^{0} R(t_i, s, \alpha)ds] A_4(t + \rho + h_1) + L_1(t_i, t + \rho - t_i) +$$

$$+ \int_{t-t_i}^{0} K_1(t_i, s, t + \rho - t_i)ds \tag{3.11}$$

$$K(t, \tau, \rho) = A_3'(t + \tau + h)[\int_{t+\max(\tau+h,\, \rho+h_1)}^{t_i} N_2(s)ds + P(t_i) + \int_{t-t_{i+1}+\rho}^{0} Q(t_i, s)\, ds +$$

$$+ \int_{t-t_{i+1}+\tau}^{0} Q'(t_i, s)ds + \int_{t-t_{i+1}+\tau}^{0} d\alpha \int_{t-t_{i+1}+\rho}^{0} R(t_i, s, \alpha)ds] A_4(t + \rho + h_1) +$$

$$+A_3'(t+\tau+h)[L_1(t_i,t+\rho-t_i)+\int\limits_{t-t_{i+1}+\tau}^{0}K_1(t_i,s,t+\rho-t_i)ds]+$$

$$+[Q_1'(t_i,t+\tau-t_i)+\int\limits_{t-t_{i+1}+\rho}^{0}R_1(t_i,s,t+\tau-t_i)ds]\times$$

$$\times A_4(t+\rho+h_1)+K_2(t_i,t+\tau-t_i,t+\rho+t_i) \tag{3.12}$$

Наконец,

$$M(t,\rho,\rho_1)=A_4'(t+\rho+h_1)[\int\limits_{t+h_1+\max(\rho,\rho_1)}^{t_i}N_2(s)ds+P(t_i)+\int\limits_{t-t_{i+1}+\rho}^{0}Q'(t_i,s)ds+$$

$$+\int\limits_{t-t_{i+1}+\rho}^{0}Q(t_i,s)ds+\int\limits_{t-t_{i+1}+\rho}^{0}d\alpha\int\limits_{t-t_{i+1}+\rho_1}^{0}R(t_i,s,\alpha)ds]A_4(t+\rho_1+h_1)+A_4(t+\rho+h_1)\times$$

$$\times[L_1(t_i,t+\rho_1-t_i)+\int\limits_{t-t_{i+1}+\rho}^{0}K_1(t_i,s,t+\rho_1-t_i)ds]+[L_1'(t_i,t+\rho-t_i)+$$

$$+\int\limits_{t-t_{i+1}+\rho_1}^{0}K_1'(t_i,s,t+\rho-t_i)ds]A_4'(t+\rho_1+h_1)+M_2(t_i,t+\rho-t_i,t+\rho_1-t_i) \tag{3.13}$$

$$M_2(t_i,t+\rho-t_i,t+\rho_1-t_i)=\begin{cases}M(t_i,t+\rho-t_i,t+\rho_1-t_i),\ t_{i+1}\leqslant t\leqslant t_i,\ -t+t_{i+1}\leqslant\rho,\rho_1\leqslant 0\\ 0,\ \text{если хотя бы один из аргументов }\rho,\rho_1\\ \text{не принадлежит интервалу }[-t+t_{i+1},0]\end{cases}$$

Рекуррентные формулы (3.9)–(3.13) позволяют получить второе решение задачи (3.4), (3.5) последовательно на интервалах $[t_{i+1},t_i]$, $(i=0,1,\ldots)$. Суммируя это решение с (3.8), получаем общее решение. В частности, при $T-h\leqslant t\leqslant T$ имеем

$$P(t)=N_1+\int\limits_t^T N_2(r)dr,\quad Q(t,\tau)=P(t+\tau+h)A_3(t+\tau+h)$$

$$R(t,\tau,\tau_1)=A_3'(t+\tau+h)P(t+h+\max(\tau,\tau_1))A_3(t+\tau_1+h)$$

$$L(t,\rho)=P(t+\rho+h_1)A_4(t+\rho+h_1)$$

$$M(t,\rho,\rho_1)=A_4'(t+\rho+h_1)P(t+h_1+\max(\rho,\rho_1))A_4(t+\rho_1+h_1)$$

$$K(t,\tau,\rho)=A_3'(t+\tau+h)P(t+\max(h+\tau,h_1+\rho)]A_4(t+\rho+h_1)$$

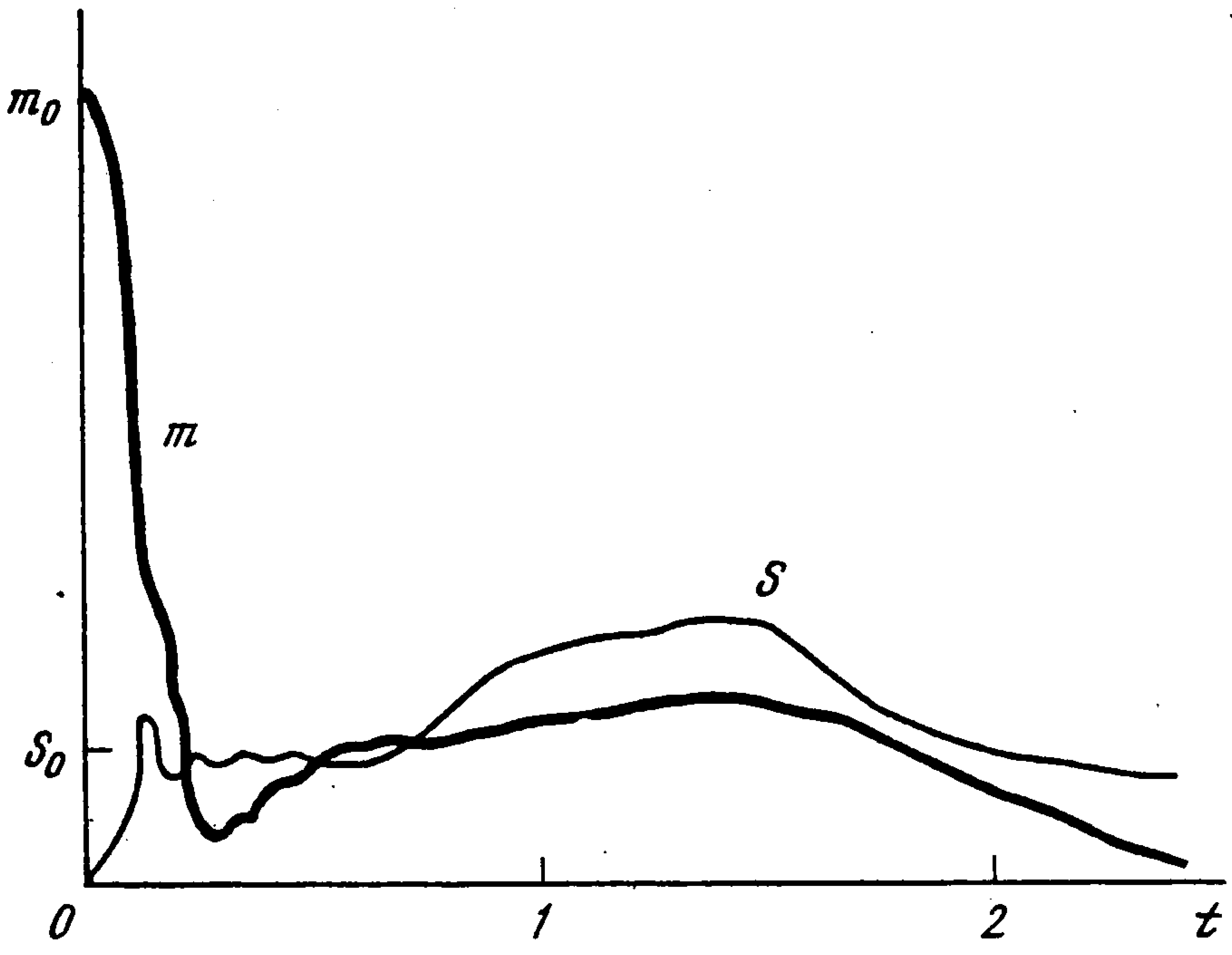
4. Некоторые обобщения. Полученные результаты могут быть модифицированы и для иных управляемых систем. Приведем одно из таких обобщений для системы вида

$$X^{\cdot}(t)=A_1(t)X(t-h)+A_2(t)u(t-h_1)+(A(t,X_t)+B(t))u(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T \tag{4.1}$$

Здесь функционал $A:R\times C[-h_2,0]\to R$ измерим по совокупности аргументов, кусочно-непрерывен по t и удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу, через X_t в $A(t,X_t)$ обозначен отрезок траектории $X_t=X(t+\tau)$, $-h_2\leqslant\tau\leqslant 0$.

Решение уравнения (4.1) определяется начальными условиями (1.3) и $X_0=\varphi\in C[-\max(h_1,h_2),0]$.

Критерий качества имеет вид (1.3) с функционалом F, даваемым выражением (3.3), всюду в котором $C(t)$ заменено на $A(t,X_t)$. Оптимальное управление имеет вид (3.2) с заменой $C(t)$ на $A(t,\varphi)$. Функционал Беллмана (3.1) остается без изменений. Отсюда вытекает, в частности, что, хотя оптимальное управление и траектория зависят от h_2, функционал (3.2) не зависит от него. Значит, при $h=0$ оптимальное значение критерия



качества вообще не зависит от значений начальной функции $\varphi(s)$, $s < 0$, хотя и траектория, и оптимальное управление существенно зависят от него.

5. Пример. Рассмотрим модель управляемого процесса микробиологического роста бактерий в замкнутом сосуде при условии переноса питательных веществ из одной точки в другую за некоторое конечное время и образование при этом выходного продукта. Такой процесс описывается билинейной моделью с запаздыванием в управляющем воздействии, которое определяется интенсивностью подачи питательных веществ в биореактор

$$\begin{aligned} m^{\cdot}(t) &= \gamma(t)m(t) - U(t)m(t) - m(t-\tau) + \mu_1(t)U(t-\rho) \\ S^{\cdot}(t) &= \frac{\gamma(t)}{K_1}m(t) - U(t)S(t) + S_r U(t) + \mu_2(t)U(t-\rho) \end{aligned} \tag{5.1}$$

При учете взаимодействия клеточной массы с питательной средой первое уравнение характеризует баланс микробиологической массы в замкнутом сосуде, второе описывает процесс производства синтезируемого продукта. В рассматриваемой модели (5.1) будем использовать обозначения [5]: $m(t)$ – концентрация микробиологической массы, бактериальной культуры, $S(t)$ – концентрация выходного продукта, $U(t)$ – интенсивность подачи питательных веществ, необходимых для поддержания жизнедеятельности бактерий, $\gamma(t)$ – коэффициент скорости роста клеточной массы, K_1 – параметр скорости роста выходного продукта, $m(t-\tau)$ – слагаемое, характеризующее потерю жизнеспособности бактерий за конечное время τ, S_r некоторая постоянная концентрация выходного продукта, $U(t-\rho)$ – интенсивность подачи питательных веществ в предшествующий момент времени для поддержания жизнедеятельности бактерий, $\mu_1(t)U(t-\rho)$, $\mu_2(t)U(t-\rho)$ – концентрации питательных веществ соответственно в биомассе и в выходном субстрате в предшествующий момент времени.

В начальный момент времени t_0 происходит закачка бактериальной массы в замкнутый сосуд, поэтому естественно предположить отсутствие выходного субстрата и микробиологической массы с питательными веществами до момента времени t_0

$$\begin{aligned} &S(t_0) = 0 \\ &m(t_0) = m_0, \quad m(t_0+\theta) = 0, \ -\tau \leqslant \theta < 0 \\ &U(t_0+\vartheta) = 0, \ -\rho \leqslant \vartheta < 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

В этих условиях надо достичь фиксированного уровня выходного продукта S_0 за конечное время и минимизировать расход питательных веществ. Выберем критерий качества, соответствующий поставленной задаче, в виде

$$J = \beta_1(S(T)-S_0)^2 + \beta_2 m(T)^2 + \int_{t_0}^{T} ((S(t)-S_0)^2 + \alpha U^2(t) + F(t, S, m_t, U_t))dt \tag{5.3}$$

На фигуре показан вид фазовых траекторий для $m(t)$ и $S(t)$ при оптимальном управлении, построенном в соответствии с предложенным методом модифицированного функционала качества.

Численное решение поставленной задачи проводилось для следующих значений параметров:

$$t_0 = 0,\ T = 3,\ \tau = 1,\ S_r = 3{,}5,\ S_0 = 1{,}5,\ \rho = 0{,}2,$$

$$K_1 = 52,\ \gamma(t) = 0{,}05,\ \beta_1 = \beta_2 = 1,\ \alpha = 1,\ m_0 = 10$$

Графики показывают стремление S и m к заданным значениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колмановский В.Б., Королева Н.И.* Об оптимальном управлении некоторыми билинейными системами с последействием // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 238–243.
2. *Красовский А.А.* Обобщение решения задачи оптимизации управления при неклассическом функционале // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 4. С. 808–811.
3. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
4. *Колмановский В.Б., Майзенберг Т.Л.* Оптимальное управление стохастическими системами с последействием // Автоматика и телемеханика. 1973. № 1. С. 47–61.
5. *Williamson D.* Observation of bilinear systems with applications to biological control // Automatica. 1977. V. 13. N 3. p. 243–254.

Москва

Поступила в редакцию
20.III.1992