УДК 531.36:534.1

© 1993 г. Матвеев М.В., Тхай В.Н.

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОБРАТИМЫХ СИСТЕМ

На периодические системы, инвариантные относительно замены $t \to -t$, $\mathbf{x} \to \mathbf{M}(-t)\mathbf{x}$, $\mathbf{M}^2(t) \equiv \mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ – единичная матрица), распространены результаты, известные [1–4] ранее для автономных обратимых систем, как в нерезонансном случае, так и при наличии внутреннего резонанса. Для одночастотных резонансов, не имеющих аналога в автономных системах, получено полное решение задачи об устойчивости в первом нелинейном приближении; при этом система с одной степенью свободы или неустойчива, или устойчива в любом конечном порядке. В задаче об устойчивости качения тяжелого однородного, близкого к симметричному, эллипсоида в главной плоскости показано, что известные условия [5] фактически гарантируют формальную устойчивость.

1. Предварительные замечания. Рассмотрим систему

$$\mathbf{x}^{\circ} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{X}(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{x}, \mathbf{X} \in \mathbf{R}^k; \quad \mathbf{X}(0, t) \equiv 0 \tag{1.1}$$

с аналитическими по $\mathbf{x}$ правыми частями. Вещественная $(k \times k)$-матрица $\mathbf{A}(t)$ и нелинейная по $\mathbf{x}$ вектор-функция $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ предполагаются ω-периодическими непрерывными функциями независимой переменной t с кусочно-непрерывными производными, так что имеет место представление рядами Фурье.

Систему (1.1) назовем обратимой с линейным автоморфизмом $\mathbf{M}(t)$, если она инвариантна относительно замены: $t \to -t$, $\mathbf{x} \to \mathbf{M}(-t)\mathbf{x}$; $\mathbf{M}(t)$ – некоторая $(k \times k)$-матрица, вообще говоря, зависящая от t.

Очевидно, в этом случае выполняются равенства

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\tau} = \mathbf{M}(\tau)\mathbf{A}(-\tau) + \mathbf{A}(\tau)\mathbf{M}(\tau), \quad \mathbf{M}(\tau)\mathbf{X}(\mathbf{x}, -\tau) + \mathbf{X}(\mathbf{M}(\tau)\mathbf{x}, \tau) \equiv 0 \tag{1.2}$$

($\tau = -t$). Данное определение обратимой системы, отличаясь от обычно принятого (см., например, [6]) лишь зависимостью $\mathbf{M}$ от t, немедленно делает свойство обратимости инвариантным по отношению к произвольному линейному преобразованию $\mathbf{x} = \mathbf{B}(t)\mathbf{y}$, $\det\mathbf{B}(t) \geqslant \epsilon > 0$. В новых переменных $\mathbf{y}$ система

$$\mathbf{y}^{\circ} = \mathbf{A}_1(t)\mathbf{y} + \mathbf{Y}(\mathbf{y}, t) \tag{1.3}$$

обладает автоморфизмом: $\mathbf{M}_1(t) = \mathbf{B}^{-1}(t)\mathbf{M}(t)\mathbf{B}(t)$.

Система (1.1) приводима [7] к (1.3) с постоянной матрицей $\mathbf{A}_1$. В случае $\mathbf{M}^2 = \mathbf{E}$ имеем также $\mathbf{M}_1^2 = \mathbf{E}$ и из соотношений

$$\frac{d\mathbf{M}_1}{d\tau} = \mathbf{M}_1(\tau)\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{M}_1(\tau), \quad \mathbf{M}_1\frac{d\mathbf{M}_1}{d\tau} + \frac{d\mathbf{M}_1}{d\tau}\mathbf{M}_1 = 0$$

учитывая постоянство матрицы $\mathbf{A}_1$, выводим $\mathbf{M}_1^{\circ} \equiv \mathbf{0}$. Следовательно, матрица $\mathbf{M}_1$ также постоянная. Этот случай и исследуется ниже.

Пусть $l_+ + l_-$ – число собственных значений матрицы $\mathbf{M}_1$, равных $+1$ и -1 соответственно. Тогда невырожденным линейным преобразованием система (1.3) приводится к виду, в котором

$$\mathbf{M}_1 = \left\| \begin{matrix} \mathbf{E}_{l_+} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_{l_-} \end{matrix} \right\|$$

($\mathbf{E}_j$ – единичная j-матрица).

Отметим, наконец, что нормализующее преобразование сохраняет [8][1] постоянный линейный автоморфизм $\mathbf{M}_1$, и, суммируя все сказанное и известные результаты [2, 8], немедленно выводим следующие свойства обратимой системы (1.1) с автоморфизмом $\mathbf{M}(t), \mathbf{M}^2(t) \equiv \mathbf{E}$.

1°. Асимптотическая устойчивость невозможна, что следует из наличия у системы (1.3), наряду с решением $\mathbf{y}(t)$, решения $\mathbf{M}_1\mathbf{y}(-t)$.

2°. Устойчивость возможна только в критическом случае m нулевых и n пар чисто мнимых характеристических показателей.

3°. Если $l_+ - l_- = m$, $l_- = n$, то в нерезонансном случае имеет место формальная устойчивость.

В случае $l_+ \geqslant l_-$ имеем систему N [2]. Очевидно, наряду с 3°, справедливы и другие свойства системы N, установленные в [2]. В противоположной ситуации, когда $l_+ < l_-$, неустойчивость может быть установлена [4, 9] уже по формам второго порядка. Отметим также, что число нулевых собственных значений матрицы $\mathbf{A}_1$ с простыми элементарными делителями будет не меньше $|l_+ - l_-|$.

Пусть в системе $N(l_+ \geqslant l_-)$ имеется ровно $n = l_-$ пар чисто мнимых собственных значений $\pm\lambda_s$, удовлетворяющих условию резонанса

$$p_1\lambda_1 + \ldots + p_n\lambda_n = i2\pi\omega^{-1}q, \; q \in Z, p_j \in Z \; (j = 1,\ldots,n) \tag{1.4}$$

причем $|p_1| + \ldots + |p_n| \geqslant 1$, а одинаковым λ_s отвечают простые элементарные делители. Тогда систему (1.3) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \dot\xi = \Xi(\xi, \eta, \bar\eta, t) \\ \dot\eta = \Lambda\eta + \mathrm{H}(\xi, \eta, \bar\eta, t), \; \dot{\bar\eta} = \bar\Lambda\bar\eta + \bar{\mathrm{H}}(\xi, \eta, \bar\eta, t); \; \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \end{gathered} \tag{1.5}$$

(черта означает комплексно-сопряженную величину, ξ – действительный m – вектор, $\eta, \bar\eta$ – комплексные n-векторы) с линейным автоморфизмом $t \to -t, \eta \to \bar\eta, \bar\eta \to \eta$. В силу указанного автоморфизма, разложение нелинейных членов Ξ, H, $\bar{\mathrm{H}}$ в ряды по степеням $\xi, \eta, \bar\eta$ с ω-периодическими по t коэффициентами вида $c_* \exp(i2\pi/\omega\nu t)$, $\nu \in Z$ содержат только чисто мнимые постоянные c_*. Это свойство сохраняется и при нормализации (1.5).

В случае многочастотного резонанса, когда, по крайней мере, две компоненты вектора $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ отличны от нуля, задача об устойчивости по формам конечного порядка полностью сводится [10] к автономному случаю с $q = 0$. Учитывая теперь, что резонансные коэффициенты чисто мнимые, устанавливаем справедливость результатов [1–3] и в данной задаче.

Особенностью периодической системы является возможность одночастотного резонанса, когда в (1.4) $q \neq 0$, а все компоненты вектора $\mathbf{p}$, за исключением, скажем, p_1, нулевые. Тогда [11], в случае резонанса нечетного (первого или третьего) порядка система общего вида, как правило, неустойчива. Это справедливо и для обратимой системы (1.1).

Задача устойчивости при четных p_1 достаточно полно решена для гамильтоновых систем [12]. Оказывается, и в обратимой системе (1.1) эта задача имеет полное реше-

---

[1] См. также: *Брюно А.Д.* Множества аналитичности нормализующего преобразования: Препринт № 97. М.: ИПМ, 1974.

ние в первом нелинейном приближении, в то время как в системах общего вида удается получить [13] только достаточные условия неустойчивости и асимптотической устойчивости.

2. **Две вспомогательные леммы.** Задача об устойчивости нулевого решения ω-периодической обратимой системы (1.1) обычно возникает при исследовании локальной окрестности ω-периодического движения автономной обратимой системы, устанавливаемого теоремой Хейнбокла–Страбла [14]. Сформулируем обобщение этой теоремы в виде, необходимом для дальнейшего изложения.

Лемма 1. Всякое движение $\varphi(t)$ обратимой системы

$$\mathbf{x}^{\cdot}=\mathbf{X}(\mathbf{x},t),\ \mathbf{M}\mathbf{X}(\mathbf{x},t)+\mathbf{X}(\mathbf{M}\mathbf{x},-t)\equiv\mathbf{0},\ \mathbf{x}\in\mathbf{R}^k,\ \det\mathbf{M}\neq\mathbf{0} \tag{2.1}$$

с 2π-периодичской по $x_1,...,x_p (p\leqslant k)$ и ω-периодической по t правой частью, на котором $\varphi(\nu\omega)$, $\varphi(\nu\omega+\Delta)\in\mathbf{L}$, $2\Delta=\omega l$, $\nu\in\mathbf{Z}$, $l\in\mathbf{N}$ является ωl-периодическим в $\mathbf{X}^*=\mathbf{T}^p\times\mathbf{R}^{k-p}$ ($\mathbf{T}^p$ – p-мерный тор по $x_1,...,x_p$), если

$$\mathbf{L}=\{\mathbf{x}:\mathbf{x}=\mathbf{a},\ \mathbf{M}^{2s+1}\mathbf{a}=\mathbf{a}+2\pi\mathbf{q};\ s\in\mathbf{Z}\}$$

а целочисленный вектор $\mathbf{q}=(q_1,...,q_k)$ имеет $q_{p+1}=...=q_k=0$.

Возникает вопрос: в окрестности каких движений $\varphi(t)$ обратимой системы (2.1) уравнения возмущенного движения также будут обратимыми? Справедлива

Лемма 2. В окрестности всякого движения $\varphi(t)$, $\varphi(\omega l)\in\mathbf{I}$ при некотором $l\in\mathbf{Z}$ уравнения возмущенного движения являются обратимыми с автоморфизмом $\mathbf{M}^{2s+1}$.

Для доказательства этой леммы примем без ограничения общности $\varphi(0)\in\mathbf{L}$ и перейдем к уравнениям возмущенного движения

$$\mathbf{y}^{\cdot}=\mathbf{Y}(\mathbf{y},t)\equiv\mathbf{X}(\mathbf{y}+\varphi(t),t)-\mathbf{X}(\varphi(t),t)$$

Имеем $\mathbf{M}^{2s+1}\varphi(0)=\varphi(0)+2\pi\mathbf{q}$ для некоторого $\mathbf{q}$. Значит, в предположении единственности решения будет $\mathbf{M}^{2s+1}\varphi(t)=\varphi(-t)+2\pi\mathbf{q}$. Отсюда, учитывая периодичность $\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ по $x_1,...,x_p$, получим

$$\mathbf{M}^{2s+1}\mathbf{X}(\mathbf{y}+\varphi(t),t)=-\mathbf{X}(\mathbf{M}^{2s+1}(\mathbf{y}+\varphi(t)),-t)=-\mathbf{X}(\mathbf{M}^{2s+1}\mathbf{y}+\varphi(-t),-t)$$

$$\mathbf{M}^{2s+1}\mathbf{X}(\varphi(t),t)=-\mathbf{X}(\mathbf{M}^{2s+1}\varphi(t),-t)=-\mathbf{X}(\varphi(-t),-t)$$

т.е.

$$\mathbf{M}^{2s+1}\mathbf{Y}(\mathbf{y},t)+\mathbf{Y}(\mathbf{M}^{2s+1}\mathbf{y},-t)=\mathbf{0}$$

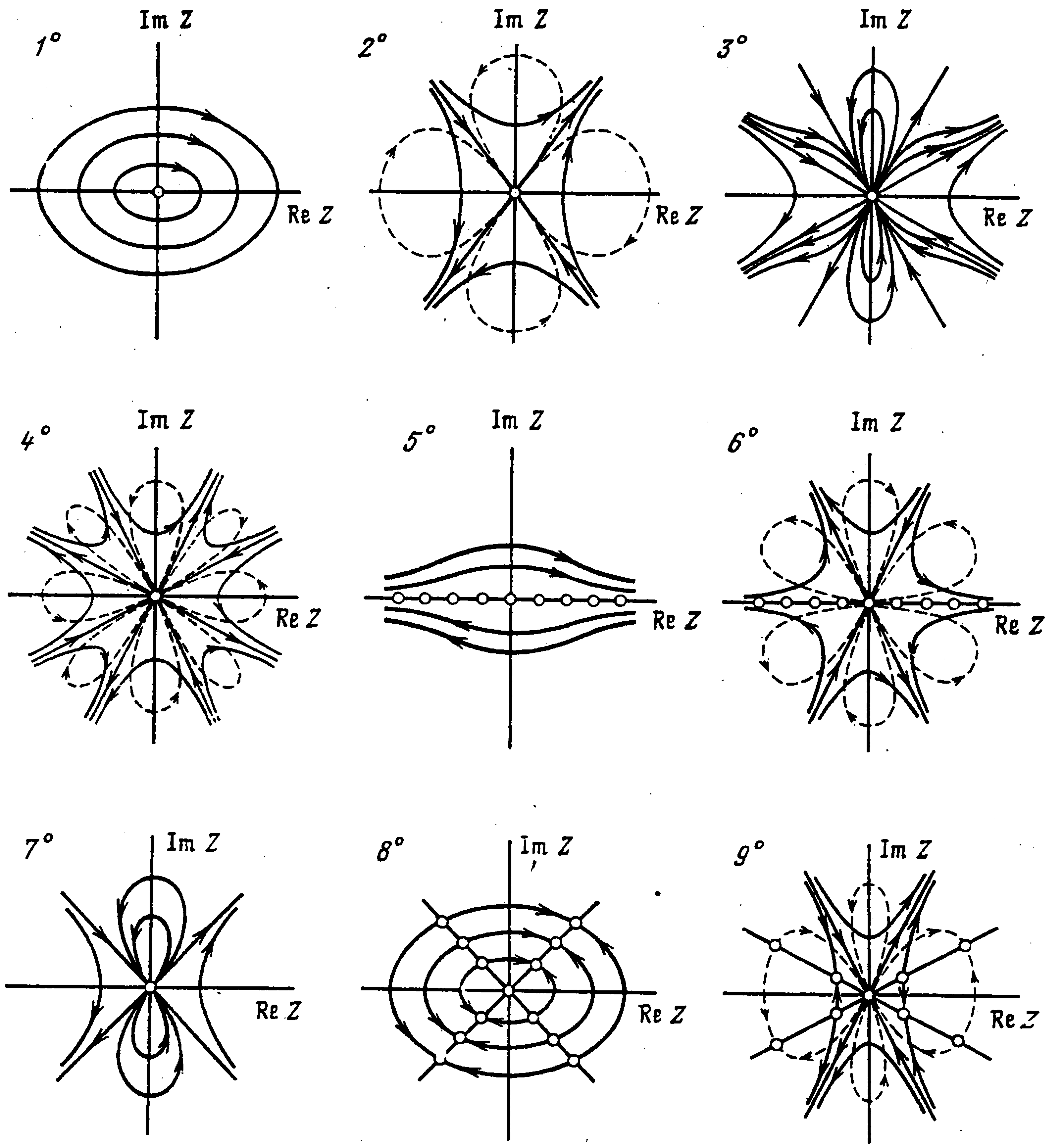
3. **Система с одной степенью свободы.** Рассмотрим случай системы с одной степенью свободы, когда $m=0$, $n=1$.

Резонанс четвертого порядка $4\lambda_1=i2\pi\omega^{-1}q$. Проведем нормализацию системы (1.5) до членов K-го порядка включительно. Тогда, используя прежние обозначения, имеем

$$\eta_1^{\cdot}=\lambda_1\eta_1+i\eta_1\sum_{\substack{\alpha\geqslant 1\\ 3\leqslant 2\alpha+4\beta+1\leqslant K}}C_{\alpha\beta}(\eta_1\bar\eta_1)^{\alpha}(\bar\eta_1e^{\lambda_1t})^{4\beta}+... \tag{3.1}$$

(невыписанные члены имеют порядок выше K относительно $\eta_1,\bar\eta_1$, C – действительные постоянные, а сопряженное уравнение опущено). Если в (3.1) выполнить замену $\eta_1=z_1e^{\lambda_1t}$, то в переменных $z_1,\bar z_1$

$$z_1=iz_1\sum_{\substack{\alpha\geqslant -1\\ 3\leqslant 2\alpha+4\beta+1\leqslant K}}C_{\alpha\beta}(z_1\bar z_1)^{\alpha}\ \bar z_1^{4\beta}+...$$



И, наконец, после перехода к полярным координатам $z_1 = r_1^{1/2} e^{i\theta_1}$ получим

$$\dot r_1 = 2C_{-1,1} r_1^2 \sin\theta + 2 \sum_{\substack{\alpha \geqslant -1 \\ 5 \leqslant 2\alpha + 4\beta + 1 \leqslant K}} C_{\alpha\beta} r_1^{\alpha + 2\beta + 1} \sin\beta\theta + \ldots; \quad \theta = 4\theta_1 \tag{3.2}$$

$$\dot\theta = 2(C_{1,0} + C_{-1,1}\cos\theta) r_1 + 2 \sum_{\substack{\alpha \geqslant -1 \\ 4 \leqslant 2\alpha + 4\beta + 1 \leqslant K - 1}} C_{\alpha\beta} r_1^{\alpha + 2\beta} \cos\beta\theta + \ldots$$

Отсюда видно, что при $|C_{1,0}| < |C_{-1,1}|$ укороченная до первых нелинейных членов модельная система имеет растущее решение в виде луча, что приводит к неустойчивости по формам третьего порядка.

Пусть $|C_{1,0}| > |C_{-1,1}|$. Тогда из второго уравнения (3.2) видно, что при достаточно малом r_1 угол θ меняется монотонно со временем.

Система обратима с автоморфизмом $t \to -t, r_1 \to r_1, \theta \to -\theta$. Множество L из леммы 1 для (3.1) состоит из лучей $\theta = 0, \pi$. Поэтому при монотонном изменении угла θ траектория автономной укороченной до членов K-го порядка (K – любое конечное) системы (полученной из (3.2) отбрасыванием невыписанных членов), пересекает лучи $\theta=0$, $\theta=\pi$ и представляет собой периодическое движение.

Теорема 1. Если в системе с одной степенью свободы при одночастотном резонансе четвертого порядка выполняется неравенство $|C_{1,0}| < |C_{-1,1}|$, то система неустойчива по Ляпунову. При противоположном знаке неравенства имеет место устойчивость в любом конечном порядке.

Резонанс второго порядка $2\lambda_1 = i2\pi\omega^{-1}q$, Анализ, подобный изложенному выше, справедлив и в этом случае. Система, аналогичная (3.2), имеет вид

$$\frac{1}{2} r_1^{\cdot} = (C_- \sin\theta + C_{-1,2}\sin 2\theta) r_1^2 \sum_{\substack{\alpha \geqslant -1 \\ 5 \leqslant 2\alpha+2\beta+1 \leqslant K}} C_{\alpha\beta} r_1^{\alpha+\beta+1} \sin\beta\theta + \ldots \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{2} \theta^{\circ} = (C_{1,0} + C_+\cos\theta + C_{-1,2}\cos 2\theta) r_1 + \sum_{\substack{\alpha \geqslant -1 \\ 4 \leqslant 2\alpha+2\beta+1 \leqslant K-1}} C_{\alpha\beta} r_1^{\alpha+\beta} \cos\beta\theta + \ldots$$

$$\theta = 2\theta_1, C_\pm = C_{0,1} \pm C_{2,-1}$$

Теорема 2. Если в системе с одной степенью свободы при одночастотном резонансе второго порядка выполняются неравенства

$$D = C_+^2 + 8C_{-1,2}C_* \geqslant 0, \quad |C_+ | - D^{1/2}| < 4 | C_{-1,2}| \tag{3.4}$$

$(C_* = C_{1,0} - C_{-1,2})$, то система, как правило (если среди корней квадратного $2C_{-1,2}\kappa^2 + C_+\kappa + C_* = 0$ и линейного $2C_{-1,2}\kappa + C_- = 0$ уравнений нет равных), неустойчива по Ляпунову. При противоположном знаке хотя бы одного неравенства будет устойчивость в любом конечном порядке.

Полученный вид систем (3.2), (3.3) позволяет выполнить на фазовой плоскости элементарный анализ модельной системы, полученной учетом только первых нелинейных членов. Например, в случае резонанса второго порядка качественная картина фазовых кривых на комплексной плоскости во всех невырожденных и некоторых вырожденных случаях приведена на фигуре при следующих значениях параметров:

1°. $|\kappa_{1,2}| > 1$, $\mathrm{Im}\kappa_{1,2} = 0$ или $\mathrm{Im}\kappa_{1,2} \neq 0$
2°. $|\kappa_1| < 1$, $|\kappa_2| > 1$, $\mathrm{Im}\kappa_{1,2} = 0$
3°. $|\kappa_{1,2}| < 1$, $\mathrm{Im}\kappa_{1,2} = 0$, $(2C_{-1,2}\kappa_1 + C_-)(2C_{-1,2}\kappa_2 + C_-) > 0$
4°. $|\kappa_{1,2}| < 1$, $\mathrm{Im}\kappa_{1,2} = 0$, $(2C_{-1,2}\kappa_1 + C_-)(2C_{-1,2}\kappa_2 + C_-) < 0$
5°. $\kappa_1 = 1$, $|\kappa_2| > 1$
6°. $\kappa_1 = 1$, $|\kappa_2| < 1$, $(2C_{-1,2} + C_-)(2C_{-1,2}\kappa_2 + C_-) < 0$
7°. $\kappa_1 = \kappa_2$, $|\kappa_{1,2}| < 1$
8°. $|\kappa_1| < 1$, $|\kappa_2| > 1$, $2C_{-1,2}\kappa_1 + C_- = 0$
9°. $|\kappa_{1,2}| < 1, 2C_{-1,2}\kappa_1 + C_- = 0$.

Невырожденными считаются случаи, когда корни $\kappa_{1,2}$ квадратного уравнения различны и ни один из них не равен корню линейного уравнения или ± 1 (случаи 1° – 4°). Пи этом в некоторых случаях (например, 2°, 4°) траектории при $t \to \pm\infty$ могут либо уходить в бесконечность (показаны сплошными линиями на фигуре), либо стремиться к нулю (показаны штрихами). Конкретный вид этих траекторий определяется знаком производной по θ от коэффициента при r_1 в уравнении для θ на луче (например, если на растущем луче производная отрицательна, то в его окрестности решения уходят в бесконечность, в противном случае – стремятся к нулю).

Обобщение на случай $m \geqslant 1$, $n = 1$. При наличии нулевых корней, отвечающих переменным ξ, в нормальной форме (3.2) или (3.3) добавится дифференциальное уравнение для вектора ξ, в котором нет членов до K-го порядка включительно. Правая часть уравнения для θ содержит дополнительное слагаемое, обращающееся в нуль при $\xi = 0$.

Ясно, что система третьего приближения имеет растущие решения на $\xi = 0$ при выполнении условий их существования для случая $m = 0$. Пусть эти условия не выполняются. Так как $\xi = \mathrm{const}$ – первые интегралы укороченной системы, то в случае неустойчивости на соответствующей траектории возрастает r_1. Поэтому, если траектория соединяет точки внутри δ – окрестности и вне ϵ – окрестности, то на ней $\|\xi\| < \delta$ и при $r_1^2 \sim \delta$ величина θ определяется слагаемым, зависящим только от r_1, т.е. сохраняет знак. Следовательно, по лемме 1 это будет периодическое движение. Если это множество периодических движений приводит к неустойчивости, то в силу произвольной малости δ существует периодическое движение с произвольно большим периодом. Но такое движение должно существовать и при $m = 0$, что невозможно по предположению.

Теорема 3. Теоремы 1 и 2 сохраняют справедливость при произвольном $m > 0$.

4. Многомерные системы. Пусть в системе (1.5) имеет место одночастотный резонанс 4-го порядка. Тогда после нормализации модельная система первого нелинейного приближения имеет вид

$$
\begin{aligned}
&r_1^{\cdot} = 2C_{-1,1} r_1^2 \sin\theta \\
&\theta^{\cdot} = 2\left[\alpha(\xi) + \sum_{\mu=2}^{n} a_\mu r_\mu\right] + 2(C_{1,0} + C_{-1,1}\cos\theta) r_1 \\
&r_s^{\cdot} = 0, \ \ \xi_j^{\cdot} = 0 \ \ (s = 2, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, m)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

($\alpha(\xi)$ – полином второго порядка по ξ без свободного члена). Очевидно, при $|C_{1,0}| < |C_{-1,1}|$ система (4.1), как и исходная, неустойчива, так как при выполнении этого условия она обладает на многообразии $r_s = 0$, $\xi_j = 0$ ($s = 2, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$) растущим решением в виде луча. При противоположном знаке неравенства устойчивость системы (4.1) гарантируется знакоопределенностью интеграла

$$
\Phi = (C_{1,0} + C_{-1,1}\cos\theta) r_1^2 + r_1\left[\alpha(\xi) + \sum_{\mu=2}^{n} a_\mu r_\mu\right] + \gamma\left(\sum_{j=2}^{m} \xi_j^2 + \sum_{\mu=2}^{n} r_\mu^2\right) (\gamma - \mathrm{const})
$$

Теорема 4. Необходимым и достаточным (с точностью до знака равенства) условием устойчивости модельной системы при одночастотном резонансе 4-го порядка является неравенство $|C_{1,0}| < |C_{-1,1}|$.

Гораздо сложнее анализ устойчивости при резонансе 2-го порядка. Модельная система в этом случае имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\xi_j^{\cdot} = 0 \quad (j = 1, \ldots, m) \\
&\frac{1}{2} r_1^{\cdot} = \left[\beta(\xi) + \sum_{\mu=2}^{n} b_\mu r_\mu + (C_- + 2C_{-1,2}\cos\theta) r_1\right] r_1 \sin\theta \\
&\frac{1}{2} r_s^{\cdot} = C_s r_s r_1 \sin\theta \ \ (s = 2, \ldots, n)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

$$
\frac{1}{2}\theta^{\cdot} = \alpha(\xi) + \beta(\xi)\cos\theta + \sum_{\mu=2}^{n} (a_\mu + b_\mu \cos\theta) r_\mu + (C_{1,0} + C_+\cos\theta + C_{-1,2}\cos 2\theta) r_1
$$

($\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ – полиномы второго порядка от ξ без свободных членов; a_μ, b_μ, C_s – действительные постоянные). Эта система обладает линейным автоморфизмом $t \to -t$, $\xi \to \xi, \mathbf{r} \to \mathbf{r}, \theta \to -\theta$.

Очевидно, при выполнении условия (3.4) система неустойчива и имеет растущее решение в виде луча. Пусть условие (3.4) не выполнено. Из (4.2) видно, что каждое из многообразий $r_j = 0$ ($j = 1, \ldots, n$) инвариантно, причем $r_1 = 0$ состоит только из стационаров и периодических движений вида $r_s = \text{const}$, $\xi_j = \text{const}$ $(s = 2,...,n;\ j = 1,...,m)$. Кроме того, в разд. 3 установлено, что на многообразии $r_s = 0$ $(s = 2,..., n)$ нет решений, вызывающих неустойчивость. Следовательно, на таких траекториях $r_1 r_\alpha \neq 0$ хотя бы для одного $\alpha = 2,...,n$.

Оказывается, система (4.2) на каждом из многообразий

$$\mathrm{W}_\alpha = \{\xi, \mathbf{r}\ :\ \xi = 0, r_j = 0\ (j = 2,...,n,\ j \neq \alpha),\ r_1 r_\alpha \neq 0\}$$

может иметь растущее решение в виде луча. Для его существования достаточно, чтобы система

$$\begin{aligned} &b_\alpha \kappa_\alpha + (C_- - C_\alpha + 2C_{-1,2}\cos\theta_*)\kappa_1 = 0 \\ &(a_\alpha + b_\alpha \cos\theta_*)\kappa_\alpha + (C_{1,0} + C_+\cos\theta_* + C_{-1,2}\cos 2\theta_*)\kappa_1 = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

имела положительное решение относительно κ_1, κ_α при некотором $\sin\theta_* \neq 0$. Очевидно, что если система (4.3) имеет это решение при $+\theta_*$, то она будет иметь его и при $-\theta_*$. Таким образом, каждому решению κ_1, κ_2 системы (4.3) отвечают два луча $\theta = \pm\theta_*$, по одному из которых решение уходит на бесконечность $(C_\alpha \sin\theta_* > 0)$, а по другому – асимптотически стремится к нулю. Соответствующие условия на коэффициенты системы нетрудно вывести.

Рассмотрим случай, когда система (4.3) не совместна ни при каком α, т.е. многообразия W_α не содержат решений вида лучей. Все траектории на интегральном многообразии

$$\mathrm{V}_k = \{\xi, \mathbf{r}\ :\ r_1 \neq 0,..., r_k \neq 0,\ r_{k+1} = ... = r_n = 0\ (1 \leqslant k \leqslant n)\}$$

подразделяются на три типа: 1) $\sin\theta$ обращается в нуль на траектории по крайней мере дважды; 2) $\sin\theta$ обращается в нуль только один раз (при $t = t_*$); 3) $\sin\theta \neq 0$ на траектории. В первом случае, согласно лемме 1, имеем периодическое движение. Случай 2 при $t > t_*$ (или $t < t_*$) сводится к случаю 3.

Исследуем случай 3, отметив предварительно, что переменную r_μ, отвечающую $C_\mu = 0$, можно присоединить к переменным ξ. Если среди чисел C_2 ,..., C_k есть перемена знака, то при условии

$$J = \int_0^T r_1(t)\sin\theta(t)\,dt = \infty \tag{4.4}$$

решение обязательно неограниченно; T – время существования решения. Если же $C_2,...,C_k$ одного знака, то решение или неограниченно $(JC_s = +\infty)$, или асимптотически стремится к стационарному значению $\xi = \text{const}$ $(JC_s = -\infty)$. В случае конечного J решение является асимптотическим к стационарному на множестве $\theta = 0$. При этом необходимо $r_1 \sin\theta \to 0$ и при $r_1 \to 0$ хотя бы одна из переменных $r_s \to \infty$ $(s = 2,...,k)$, что невозможно по предположению. Следовательно, $\sin\theta \to 0$, причем стационарное значение не принадлежит семейству $\xi = \text{const}$, $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. В противном случае из свойства обратимости (4.2) имеем периодическое движение и J не существует.

Покажем, что при отсутствии решений в виде лучей имеет место устойчивость по Ляпунову. Система (4.2) однородна с точностью до замены несущественных переменных ξ. Поэтому устойчивость будет следовать из ограниченности множества всех траекторий, начинающихся на некоторой δ_* – сфере S_*.

Предположим сначала, что среди чисел $C_2,...,C_k$ нет равных, причем без ограничения общности примем $0 < C_2 < C_3 < ... < C_k$. Из уравнений для r_s $(s = 2,...,n)$ следует, что для любого $K > 1$ при $r_i = K r_i^*$ имеем также $r_j = K^{C_j/C_i} r_j^*$ $(i,\ j = 1,...,k)$, где $(\xi^*, \mathbf{r}^*) \in \mathrm{S}_*$.

Поэтому для любого $\nu > 0$ имеем $r_j < \nu r_i, i \neq j$, если $r_j^* < \nu K^{1 - C_j/C_i} r_i^*$.

Положим $i = 2$, $j \neq 2$. При достаточно малом $\nu = \nu_2$ и произвольном $K = K_2$ решения с $(\xi^*, \mathbf{r}^*) \in \mathrm{U}_2 = \{ \xi^*, \mathbf{r}^* : r_j^* < \nu_2 K_2^{1-C_j/C_2} r_2^*;\ \ j = 3,...,k \}$ удовлетворяют условию $r_j < \nu_2 r_2$ $(j = 3,...,k)$, и знак $\theta^{\cdot}$ на них определяется (за исключением, быть может, некоторой малой окрестности $\theta^{\cdot} = 0$) слагаемыми с r_1 и r_2. Пусть K_2 выбрано.

При произвольных $\nu_3 > 0$, $K_3 \geqslant 1$ определим множество

$$\mathrm{U}_3 = \{ \xi^*,\ \mathbf{r}^* : r_3^* \geqslant \nu_2 K_2^{1-C_3/C_2} r_2^*,\ r_j^* < \nu_3 K_3^{1-C_j/C_3} r_3^*;\ j = 4,...,k \}$$

При достаточно малом ν_3 и произвольном K_3 на решениях с $(\xi^*, \mathbf{r}^*) \in \mathrm{U}_3$ знак $\theta^{\cdot}$ определяется r_1, r_2, r_3, а при достаточно большом $K_3 > K_2$ – только r_1 и r_3, если только $K_2^* r_3^* \leqslant r_3 \leqslant K_3 r_3^*$ ($K_2 < K_2^*$ – некоторое число). Это следует из условия $C_3 > C_2$ и уравнений для r_2 и r_3. Продолжая этот процесс, разбиваем $\mathbf{S}_*$ на множества U_s $(s = 2,...,k)$ такие, что для $(\xi^*, \mathbf{r}^*) \in \mathrm{U}_s$ при $K_{s-1}^* r_s^* \leqslant r_s \leqslant K_s r_s^*$ знак $\theta^{\cdot}$ определяется слагаемыми только с r_1 и r_s, причем числа K_{s-1}^*, K_s не зависят от выбора конкретной точки на U_s.

Для решения с $(\xi^*, \mathbf{r}^*) \in \mathrm{U}_\alpha$ при $K_{\alpha-1}^* r_\alpha^* \leqslant r_\alpha \leqslant K_\alpha r_\alpha^*$ возможны два случая: а) $|\theta^{\cdot}| > 2\epsilon r_1$, ϵ – некоторое положительное число; б) решение попадает в множество $|\theta^{\cdot}| \leqslant 2\epsilon r_1$. В первом случае, оценивая $dr_j/d\theta$ $(j = 1,...,k)$ выводим, что $r_\alpha^* \leqslant r_\alpha \exp[C_\alpha(\theta - \theta^*)/\epsilon]$ $(\theta^* = \mathrm{const})$. Следовательно, при достаточном большом $K_\alpha \sin\theta$ обратится в нуль дважды, и по лемме 1 такие движения из U_s периодические.

Вычислим, считая ϵ достаточно малым, производную от $\theta^{\cdot}$ в случае б. Имеем

$$\theta^{\cdot\cdot} = \varphi(\theta^{\cdot}) [r_\alpha + g(r_1,...,r_k, \xi_1,...,\xi_m, \theta)] r_1 \sin\theta,\ \ |g| \ll r_\alpha$$

где φ – полином второго порядка от $\cos\theta$. Можно показать, что $\varphi(\theta^{\cdot})$ может обращаться в нуль либо при выполнении условий существования луча, либо в вырожденных случаях $(\varphi(0) = 0$ или $\varphi(\pi) = 0)$. Исключая эти случаи из рассмотрения и оценивая $dr_j/d\theta^{\cdot}$, $(j = 1,...,k)$, придем к выводу, что решение или покинет область $|\theta^{\cdot}| \leqslant \epsilon r_1$ (после чего имеет место случай а), или достигнет точки покоя. Таким образом, все решения на U_α оказываются ограниченны.

Пусть теперь среди чисел $C_2, ..., C_n$ есть равные между собой $C_{\alpha_1}, ..., C_{\alpha_\gamma}$. Тогда система (4.2) может иметь решения в виде лучей на

$$\mathrm{W}_{\alpha_1 ... \alpha_\gamma} = \{ \xi, \mathbf{r} : \xi = 0,\ r_j = 0 (j = 2,...,n;\ j \neq \alpha_i, i = 1,...,\gamma) \}$$

В этом случае

$$\varphi(\theta) = \sum_{j=1}^{\gamma} [a_{\alpha_j}(C_{\alpha_j} - C_-) + b_{\alpha_j}(C_{1,0} - C_{-1,2}) + b_{\alpha_j}(C_{\alpha_j} + C_+ - C_-)\cos\theta] \kappa_{\alpha_j}$$

где κ_{α_j} – некоторые положительные постоянные, и луч $\theta = \theta^*$ существует, если $\varphi(\theta_*) = 0$, $\sin\theta_* \neq 0$ и

$$\sum_{j=1}^{\gamma} (a_{\alpha_j} + b_{\alpha_j}\cos\theta_*) \kappa_{\alpha_j} + (C_{0,1} + C_+ \cos\theta_* + C_{-1,2}\cos 2\theta_*) = 0 \qquad (4.5)$$

При отсутствии лучей устойчивость можно доказать и в этом случае.

Теорема 4. Пусть в системе (4.2) все ненулевые коэффициенты C_s разбиваются на β групп равных между собой $C_{\alpha_1}, ..., C_{\alpha_\gamma}$. Тогда необходимым и достаточным (с точностью до равенств) условием устойчивости (4.2) является выполнение в неотрицательном конусе $\kappa_{\alpha_j} \geqslant 0$ $(j = 1,...,\gamma)$ для всех β групп одного из условий: 1) уравнение (4.5) не имеет корней, 2) для каждого корня θ_* уравнения (4.5) имеем $\varphi(\theta_*) \neq 0$. В случае неустойчивости (4.2) имеет растущее решение в виде луча и исходная система неустойчива по формам третьего порядка.

5. Пример. Рассмотрим задачу об устойчивости качений тяжелого однородного эллипсоида в главном сечении. В качестве переменных выберем x, y, z – координаты точки контакта и p, q, r – проекции угловой скорости в системе координат, жёстко связанной с эллипсоидом и осями, направленными по осям последнего. Уравнения движения [15] являются обратимыми [2] и обладают тремя линейными автоморфизмами (одна из пар (x, p), (y, q), (z, r) меняет знак). При движении в плоскости x, y имеем $p = q = 0$, $z = 0$. Если r обращается в нуль дважды, то по лемме 1 имеем периодическое движение – колебания около положения равновесия. Второй возможный случай $r \neq 0$ [16]. Здесь обращается в нуль x (или y), и по лемме 1 движение также является периодическим – качение в одном направлении.

Ниже предположим, что движение происходит без подскока и отметим, что задача об устойчивости этого движения решена в линейном приближении [2].

Множество L леммы 2 состоит из точек, где одна из указанных пар обращается в нуль. Поэтому уравнения возмущенного движения в окрестности качения также являются обратимыми с периодическими правыми частями. Если вместо переменных x, y ввести обобщенные полярные координаты $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$ (a, b, c – полуоси эллипсоида) и перейти к новому времени φ, то в первом приближении уравнения для p, q, z отделяются и являются 2π-периодическими по φ.

В силу обратимости эта линейная система третьего порядка имеет возвратное характеристичное уравнение ([17], с. 71). Поэтому один из его корней равен единице, а два других определяются из уравнения $\kappa^2 - 2A\kappa + 1 = 0$ и $|\kappa_{1,2}| = 1$, если $|A| < 1$. В случае эллипсоида, близкого к симметричному ($a = a_0(1 - \epsilon)$, $b = a_0(1 + \epsilon)$, $\epsilon \ll 1$) число A и, следовательно, $\kappa_{1,2}$ можно найти разложением по ϵ. Оказывается, условие [5], примененное к такому эллипсоиду, с точностью до членов порядка ϵ^2 гарантирует $|A| < 1$, если под ω понимать среднюю угловую скорость качения. Поэтому условие устойчивости имеет вид

$$\omega^2 > a_0 \frac{(a_0^2 + c^2)(a_0 - c)}{14 a_0^4} g + a\epsilon^2 + \ldots \quad (g = 9{,}81\ldots)$$

По свойству 3° из разд. 1 качение при выполнении этого условия будет формально устойчивым, если только нет резонанса. Аналогичные выражения справедливы и для корней $\kappa_{1,2}$. К сожалению, все эти выражения довольно сложны и привести их здесь не представляется возможным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тхай В.Н.* Об устойчивости механических систем под действием позиционных сил // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 40–48.
2. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.
3. *Куницын А.Л., Матвеев М.В.* Об устойчивости одного класса обратимых систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6.
4. *Тхай В.Н.* О поведении обратимой механической системы на границе области устойчивости // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 5. С. 707–712.
5. *Миндлин И.М.* Об устойчивости движения тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Инж. журн. 1964. Т. 4. Вып. 2. С. 225–230.
6. *Moser J.* Stable and random motions in dynamical systems // Ann. Math. Stud. 1973. № 77. 199 p.
7. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 386 с.
8. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
9. *Медведев С.В., Тхай В.Н.* Об устойчивости в одном критическом случае // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 6. С. 963–969.
10. *Куницын А.Л.* Нормальная форма и устойчивость периодических систем при внутреннем резонансе // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 431–438.
11. *Куницын А.Л., Ташимов Л.Т.* К задаче об устойчивости периодического движения при внутреннем резонансе // Аналитические методы механики в задачах динамики летательных аппаратов. М.: МАИ, 1982. С. 13–21.
12. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
13. *Куницын А.Л., Ташимов Л.Т.* Некоторые задачи устойчивости нелинейных резонансных систем. Алма-Ата: Гылым, 1990. 195 с.
14. *Heinbockel J.H., Struble R.A.* Periodic solutions for differential systems with symmetries // Soc. Industr. Appl. Math. 1965. V. 13. № 2. P. 425–440.
15. *Маркеев А.П.* К геометрической интерпретации Пуансо движения твердого тела в случае Эйлера.: Проблемы механики управляемого движения: Нелинейные динамические системы. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1982. С. 123–131.
16. *Тхай В.Н.* Периодические движения однородного эллипсоида на шероховатой плоскости // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 6. С. 24–30.
17. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.II.1992

[2] *Поликша В.В.* Некоторые задачи устойчивости в критических случаях и их приложение в динамике катящегося тела: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук: 5.01.90, М., 1989. 179 с.