ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, вып. 1, 1993

УДК 62–50

© 1993 г. В.Е. Бербюк

СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Рассматривается нелинейная динамическая система, движение которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода. Исследуется следующая задача. Требуется построить управление в форме синтеза, т.е. в виде функции от текущих значений фазовых координат и времени, перемещающее систему за заданное время из произвольного начального фазового состояния в заданное конечное фазовое состояние. Предлагается метод решения этой задачи, основанный на использовании первых интегралов уравнений свободного движения системы и локальном сопряжении значений искомых управляющих сил в малой окрестности момента времени окончания процесса управления. При этом синтез управляющих сил осуществляется в аналитическом виде и является оптимальным в смысле минимума функционала смешанного типа [1] почти на всем отрезке времени процесса управления. Эффективность предложенного метода синтеза управления иллюстрируется примерами.

Полученные результаты являются дальнейшим развитием исследований [2–5], посвященных вопросам использования первых интегралов в задачах оптимального управления, и обобщают их на случай синтеза управления в вариационных задачах с закрепленными концами фазовой траектории.

1. Рассматривается многомерная нелинейная динамическая система, движение которой описывается уравнениями Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial K}{\partial q_i} = u_i + Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, t) \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ – обобщенные координаты системы, n – число ее степеней свободы, точкой обозначены производные по времени.

Обобщенные силы состоят из управляющих сил u_i, подлежащих определению, и слагаемых $Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, t)$, включающих все остальные внешние и внутренние силы.

Кинетическая энергия системы задана в виде квадратичной формы

$$K(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij}(\mathbf{q}) q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} \tag{1.2}$$

где A_{ij} – элементы симметрической положительно-определенной $(n \times n)$-матрицы $A(\mathbf{q})$, суммирование ведется по i, j от 1 до n.

При помощи (1.1), (1.2) уравнения движения приведем к виду

$$A(\mathbf{q})\mathbf{q}^{\cdot\cdot} + B(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, t) = \mathbf{u} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ – вектор управляющих сил, $B = (B_1, \ldots, B_n)$ – известная вектор-функция.

Вводя вспомогательный $2n$-мерный вектор $\mathbf{x} = (q_1, \ldots, q_n, q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$, уравнения движения (1.3) можно записать в форме

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + C(\mathbf{x})\mathbf{u} \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $C(\mathbf{x})$ – известные матрицы размеров $(2n \times 1)$ и $(2n \times n)$ соответственно.

Пусть заданы моменты времени начала $(t = 0)$ и окончания $(t = T)$ процесса управления и граничные условия

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.5}$$

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T \tag{1.6}$$

Сформулируем следующую задачу управления.

Задача У. Найти управление в форме синтеза $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, перемещающее систему (1.4) из произвольного начального фазового состояния (1.5) в заданное состояние (1.6) за заданное время $T < \infty$.

2. Идея предлагаемого ниже метода решения задачи У состоит в следующем. Будем считать, что почти на всем отрезке времени процесса управления, т.е. при $t \in [0, T - 2e]$, где e – малое положительное число, движение системы осуществляется при помощи управляющих сил $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t)$, доставляющих экстремальное значение некоторому функционалу $J[\mathbf{x}, \mathbf{u}]$ при дифференциальных связях (1.4) и заданном начальном состоянии (1.5). В малой окрестности момента времени окончания процесса управления, т.е. при $t \in [T - 2e, T]$, на систему действуют надлежащим образом сопряженные кусочно-постоянные управляющие силы, которые обеспечивают приведение системы в заданное конечное состояние (1.6).

В соответствии с изложенным выше решение задачи У будем искать в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t), & 0 \leqslant t \leqslant T - 2e \\ \mathbf{u}^-, & T - 2e < t < T - e \\ \mathbf{u}^+, & T - e < t \leqslant T \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t)$ – n-мерный вектор управляющих сил, являющийся решением некоторой вариационной задачи со свободным правым концом фазовой траектории для динамической системы (1.4), $\mathbf{u}^- = (u_1^-, \dots, u_n^-)$, $\mathbf{u}^+ = (u_1^+, \dots, u_n^+)$ – n-мерные постоянные векторы, компоненты которых подлежат определению.

Опишем одну из возможных процедур выбора управляющих сил $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t)$.

Пусть $v_1(\mathbf{x}, t), \dots, v_m(\mathbf{x}, t)$ $(m \leqslant 2n)$ – первые интегралы уравнений свободного движения исследуемой динамической системы

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{2.2}$$

Выберем произвольную дифференцируемую функцию $W(y_1, \dots, y_m)$ и рассмотрим функционал вида

$$J[\mathbf{x}, \mathbf{u}, W] = W\{\mathbf{v}[\mathbf{x}(T_1), T_1]\} + \frac{1}{2}\int_0^{T_1} \sum_j \{k_j \langle \nabla_x W[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)], C_j(\mathbf{x})\rangle\}^2 dt +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^{T_1} \sum_j \left[\frac{u_j(\mathbf{x}, t)}{k_j}\right]^2 dt, \quad W[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] = W[v_1(\mathbf{x}, t), \dots, v_m(\mathbf{x}, t)] \tag{2.3}$$

Здесь k_j – заданные постоянные, $C_j(\mathbf{x})$ – вектор-столбец с номером j матрицы $C(\mathbf{x})$, T_1 – заданное время процесса управления, ∇_x – оператор градиента по переменной $\mathbf{x}$, $\langle\,,\rangle$ – скалярное произведение векторов.

Первое слагаемое функционала (2.3) (терминальная часть) является функцией значений фазовых координат в момент времени $t = T_1$, второе характеризует свойства как самой динамической системы (2.2), так и ее управляющего устройства. Третий член функционала (2.3) может быть интерпретирован как затраты на управление движением динамической системы [6, 7]. Более полно физический смысл первых двух слагаемых критерия качества (2.3) может быть проявлен при конкретном выборе функции W и первых интегралов $v_i(\mathbf{x}, t)$. Например, в случае когда система (2.2) консервативна и в качестве функции $W[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]$ выбран интеграл энергии, первое слагаемое функционала (2.3) определяет полную механическую энергию системы в момент времени $t = T_1$, а второе характеризует скорость рассеивания механической энергии при управляемом движении рассматриваемой системы.

Сформулируем вспомогательную задачу управления.

Задача B. Найти управление в форме синтеза $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, t)$, доставляющее функционалу (2.3) минимальное значение при дифференциальных связях (1.4) и заданном начальном состоянии (1.5).

Известно [2, 5], что решение задачи B имеет вид

$$u_j^0(\mathbf{x}, t) = -k_j^2 \langle \nabla_x W[\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)], C_j(\mathbf{x}) \rangle, \; j = 1, \ldots, n \tag{2.4}$$

При этом оптимальное движение системы определяется решением задачи Коши (1.4), (1.5), (2.4) и имеет место соотношение

$$\min_{\mathbf{u}} J[\mathbf{x}, \mathbf{u}, W] = J[\mathbf{x}, \mathbf{u}^0, W] = W[\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, 0)] \tag{2.5}$$

Примем в формуле (2.3) $T_1 = T - 2e$ и обозначим через $\mathbf{x}(T - 2e)$ значение в момент $t = T - 2e$ решения задачи Коши (1.4), (1.5), (2.4). Пусть $q_i(T - 2e), q_i^{\cdot}(T - 2e)$ – соответствующие значения обобщенной координаты и ее скорости, отвечающие значениям компонент $x_i(T - 2e), x_{i+n}(T - 2e)$.

Определим кусочно-постоянные управления u_i, перемещающие динамическую систему (1.3) за время $2e$ из состояния $q_i(T - 2e)$, $q_i^{\cdot}(T - 2e)$ в состояние $q_i(T)$, $q_i^{\cdot}(T)$ ($i = 1, \ldots, n$), отвечающее заданному граничному условию (1.6).

Пользуясь формулой Тейлора для функций $q_i(t), q_i^{\cdot}(t)$, с точностью до членов второго порядка малости по параметру e можно записать

$$\begin{aligned} q_i(T - e) &= q_i(T - 2e) + e q_i^{\cdot}(T - 2e) + \tfrac{1}{2} e^2 q_i^{\cdot\cdot}(T - 2e) \\ q_i^{\cdot}(T - e) &= q_i^{\cdot}(T - 2e) + e q_i^{\cdot\cdot}(T - 2e), \; i = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.6}$$

(под $q_i^{\cdot\cdot}(T - 2e)$ понимаются, сообще говоря, соответствующие односторонние вторые производные).

С другой стороны, в этих же предположениях справедливы также соотношения

$$\begin{aligned} q_i(T - e) &= q_i(T) - e q_i^{\cdot}(T) + \tfrac{1}{2} e^2 q_i^{\cdot\cdot}(T) \\ q_i(T - e) &= q_i(T) - e q_i^{\cdot\cdot}(T), \; i = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.7}$$

Потребуем непрерывности фазовой траектории системы в момент времени $t = T - e$. Это требование приводит к необходимости надлежащего сопряжения значений управлений в окрестности $t = T - e$ и позволяет определить компоненты u_i^-, u_i^+ ($i = 1, \ldots, n$). Приравнивая правые части соотношений (2.6), (2.7), имеем условия непрерывности фазовой траектории, откуда определяем компоненты ускорений

$$\begin{aligned} q_i^{\cdot\cdot}(T - 2e) &= e^{-2} [q_i(T) - q_i(T - 2e) - \tfrac{1}{2} e q_i^{\cdot}(T) - {}^3/_2\, e q_i^{\cdot}(T - 2e)] \\ q_i^{\cdot\cdot}(T) &= e^{-2} [q_i(T - 2e) - q_i(T) + \tfrac{1}{2} e q_i^{\cdot}(T - 2e) + {}^3/_2\, e q_i^{\cdot}(T)], \; i = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.8}$$

Отметим, что рассчитанные по формулам (2.8) значения $q_i^{\cdot\cdot}(T - 2e)$, вообще говоря, не будут равны соответствующим ускорениям системы в момент времени $t = T - 2e$, найденным при решении задачи Коши (1.4), (1.5), (2.4).

Вычислив по формулам (2.8) $q_i^{\cdot\cdot}(T - 2e)$, $q_i^{\cdot\cdot}(T)$, при помощи уравнений движения (1.3), получаем окончательные формулы для искомых сопряженных значений кусочно-постоянных управлений

$$\begin{aligned} u_i^- &= \sum_{j=1}^{n} A_{ij} [\mathbf{q}(T - 2e)] q_j^{\cdot\cdot}(T - 2e) + B_i [\mathbf{q}(T - 2e), \mathbf{q}^{\cdot}(T - 2e), T - 2e] \\ u_i^+ &= \sum_{j=1}^{n} A_{ij} [\mathbf{q}(T)] q_j^{\cdot\cdot}(T) + B_i [\mathbf{q}(T), \mathbf{q}^{\cdot}(T), T], \; i = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.9}$$

На основе вышеизложенного для решения задачи У получаем следующий алгоритм.

1°. Определяем тем или иным путем первые интегралы $v_1(\mathrm{x}, t), \ldots, v_m(\mathrm{x}, t)$ уравнений свободного движения (2.2).

2°. Выбираем непрерывно дифференцируемую функцию $W(y_1, \ldots, y_m)$ и по формулам (2.4) вычисляем управление $\mathrm{u}^\circ(\mathrm{x}, t)$.

3°. Решаем задачу Коши (1.4), (1.5), (2.4) и рассчитываем движение системы на отрезке времени $t \in [0, T-2e]$, где $0 < e \ll T$.

4°. По формулам (2.8) вычисляем ускорения $q_i^{\cdot\cdot}(T-2e), q_i^{\cdot\cdot}(T)$ $(i = 1, \ldots, n)$ и при помощи соотношений (2.9) рассчитываем кусочно-постоянные управления u^-, u^+, обеспечивающие приведение системы в заданное конечное фазовое состояние (1.6).

5°. Движение системы при $t \in (T-2e, T]$ вычисляем по формулам

$$q_i(t) = q_i(T-2e) + (t - T + 2e)\, q_i^{\cdot}(T-2e) + \tfrac{1}{2}(t - T + 2e)^2 q_i^{\cdot\cdot}(T-2e) \tag{2.10}$$

при $T - 2e < t \leqslant T - e$ $(i = 1, \ldots, n)$

$$q_i(t) = q_i(T) + (t - T + e)\, q_i^{\cdot}(T) + \tfrac{1}{2}(t - T + e)^2 q_i^{\cdot\cdot}(T) \tag{2.11}$$

при $T - e < t \leqslant T$ $(i = 1, \ldots, n)$

6°. Искомое управление в форме синтеза, решающее задачу У, определяется формулами (2.1), (2.4), (2.8), (2.9).

Предложенный алгоритм дает возможность построить семейство решений задачи У, зависящее как от выбора первых интегралов v_i, так и от выбора функции $W(y_1, \ldots$ $\ldots, y_m)$. Этим произволом можно воспользоваться, например, для целей дальнейшей оптимизации решений задачи У по тому или иному критерию качества. В частности, за счет выбора функции $W(y_1, \ldots, y_m)$, по-видимому, можно обеспечить выполнение тех или иных ограничений на искомое управление.

Анализ формул (2.8), (2.9) показывает, что управление u_i^-, u_i^+ порядка e^{-2} и, следовательно, вклад их в функционал (2.3) может оказаться существенным. В связи с этим функцию $W(y_1, \ldots, y_m)$ целесообразно выбирать таким образом, чтобы значение $x(T-2e)$ принадлежало достаточно малой окрестности заданного конечного состояния (1.6).

Отметим, что содержателен также случай, когда $e = 0$ и управление на всем отрезке времени $t \in [0, T]$ вычисляется по формуле (2.4). Тогда, естественно, нет гарантии, что при произвольно выбранной функции $W(y_1, \ldots, y_m)$ будут удовлетворены конечные условия (1.6). Однако можно надеяться, что за счет надлежащего выбора $W(y_1, \ldots, y_m)$ управление вида (2.4) переведет исследуемую систему в заданное конечное состояние.

3. В качестве иллюстрации эффективности предложенного в разд. 2 алгоритма рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Пусть движение материальной точки массы m вдоль горизонтальной оси осуществляется под воздействием силы с потенциалом $P(q)$ и управления $u(q, q^{\cdot}, t)$.

Уравнения движения имеют вид

$$mq^{\cdot\cdot} = -dP(q)/dq + u(q, q^{\cdot}, t) \tag{3.1}$$

Требуется построить управление в форме синтеза $u(q, q^{\cdot}, t)$, перемещающее точку за время $T < \infty$ из заданного начального состояния

$$q(0) = q_0, \quad q^{\cdot}(0) = q_0^{\cdot} \tag{3.2}$$

в конечное состояние

$$q(T) = q_T, \quad q^{\cdot}(T) = q_T^{\cdot} \tag{3.3}$$

Применим к решению этой задачи алгоритм, описанный в разд. 2.

Введем новые переменные $x_1 = q$, $x_2 = q^{\cdot}$. В переменных x_1, x_2 уравнение (3.1) и граничные условия (3.2), (3.3) примут вид

$$x_1^{\cdot} = x_2,\ x_2^{\cdot} = -(dP(x_1)/dx_1 + u(\mathrm{x}, t))/m \tag{3.4}$$

$$x_i(0) = x_{i0},\ i = 1, 2 \tag{3.5}$$

$$x_i(T) = x_{iT},\ i = 1, 2 \tag{3.6}$$

Будем искать управление $u(\mathrm{x}, t)$ в виде (2.1). При $u = 0$ уравнения (3.4) имеют первый интеграл – интеграл энергии

$$v(\mathrm{x}) = ½mx_2^2 + P(x_1) \tag{3.7}$$

Примем $T_1 = T - 2e$, $0 < e \ll T$, $W[v(\mathrm{x})] = v(\mathrm{x})$, где $v(\mathrm{x})$ определяется формулой (3.7). Тогда функционал (2.3) запишется в виде

$$J[\mathrm{x}, u, W] = \frac{1}{2} mx_2^2(T-2e) + P[x_1(T-2e)] + \frac{1}{2}\int_0^{T-2e} x_2^2(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{T-2e} u^2(\mathrm{x}, t)\,dt \tag{3.8}$$

Терминальная составляющая функционала (3.8) представляет собой значение полной механической энергии системы в момент $t = T - 2e$, третье слагаемое в (3.8) характеризует рассеивание механической энергии при управляемом движении, четвертое – затраты на управление.

Выберем $u^{\circ}(\mathrm{x}, t)$ в формуле (2.1) таким, чтобы функционал (3.8) принимал минимальное значение при дифференциальных связях (3.4) и заданном начальном состоянии (3.5). Это управление определяется формулой (2.4) и при учете (3.4), (3.7) его можно записать в виде

$$u^{\circ}(\mathrm{x}, t) = -x_2(t) \tag{3.9}$$

Пусть $q(T - 2e)$, $q^{\cdot}(T - 2e)$ – значения обобщенной координаты и ее скорости, отвечающие значению $\mathrm{x}(T - 2e)$ решения задачи Коши (3.4), (3.5) при $u(\mathrm{x}, t) = u^{\circ}(\mathrm{x}, t)$. Используя формулы (2.6) – (2.8) при $i = 1$, определяем компоненты ускорений $q^{\cdot\cdot}(T - 2e)$, $q^{\cdot\cdot}(T)$. При помощи формул (2.9) для $i = 1$ и уравнения (3.1) для сопряженных значений управления u^-, u^+ получаем соотношения

$$u^- = mq^{\cdot\cdot}(T-2e) + dP[q(T-2e)]/dq,\quad u^+ = mq^{\cdot\cdot}(T) + dP[q(T)]/dq \tag{3.10}$$

Движение системы при найденном управлении (2.1), (3.9), (3.10) для $t \in (T - 2e, T]$ определяется формулами (2.10), (2.11) при $i = 1$.

Пример 2. Требуется определить управление $u = u(\mathrm{x})$, перемещающее динамическую систему вида

$$x_1^{\cdot} = x_2,\ x_2^{\cdot} = u \tag{3.11}$$

из заданного начального фазового состояния (3.5) в заданное конечное состояние (3.6) за заданное время $T < \infty$. Решение сформулированной задачи может быть получено при помощи описанного в разд. 2 алгоритма в случае $e = 0$.

При $u = 0$ уравнения (3.11) имеют первый интеграл $v(\mathrm{x}) = x_2$. Рассмотрим функционал вида

$$J[u, W] = W[x_2(T)] + \frac{1}{2}\int_0^T \left\{ \left(\frac{u}{k}\right)^2 + k^2\left[\frac{\partial W(x_2)}{\partial x_2}\right]^2 \right\} dt \tag{3.12}$$

где $W(x_2)$ – заданная непрерывно дифференцированная функция, k – заданный параметр.

Известно [2, 5], что управление

$$u^{\circ}(x) = -k^2\,\partial W(x_2)/\partial x_2 \tag{3.13}$$

доставляет абсолютный минимум функционалу (3.12) при дифференциальных связях (3.11) и заданном начальном состоянии (3.5). Оптимальное движение системы определяется решением задачи Коши (3.11), (3.5), при $u = u^{\circ}(x)$. Покажем, что функцию $W(x_2)$ можно выбрать таким образом, чтобы это решение удовлетворяло конечным условиям (3.6).

Пусть

$$W(x_2) = ax_2^2 + bx_2 \tag{3.14}$$

где a, b – параметры, подлежащие определению.

Решение задачи Коши (3.11), (3.5), (3.13), (3.14) при $u = u^{\circ}(x)$ имеет вид

$$x_1(t) = x_{10} - bt/(2a) + a_1(1 - \exp(-2k^2at)) \tag{3.15}$$

$$x_2(t) = -b/(2a) + 2k^2aa_1\exp(-2k^2at);\ a_1 = (2ax_{20} + b)/(4k^2a^2)$$

Потребуем выполнения условий (3.6). Тогда из (3.15), (3.6) получаем соотношения, связывающие параметры a, b

$$x_{10} + a_1(1 - \exp(-2k^2aT)) - bT/(2a) = x_{1T} \qquad (3.16)$$

$$2k^2 a a_1 \exp(-2k^2aT) = x_{2T} + b/(2a)$$

Рассмотрим для простоты случай

$$x_{20} = 0, \; x_{2T} \neq 0 \qquad (3.17)$$

Тогда из (3.16), (3.17) следуют выражения

$$b = 2ax_{2T}/(F(a) - 1), \; \exp(-2k^2aT) = F(a)$$

$$F(a) = 1 - 2k^2 x_{2T}T/(x_{2T}/a + 2k^2(x_{1T} - x_{10})) \qquad (3.18)$$

Анализ поведения функций $F(a)$ и $\exp(-2k^2aT)$ в области $a > 0$ показывает, что второе уравнение (3.18) всегда имеет положительный корень $a = a^* > 0$, как только выполнено условие

$$Tx_{2T}/(x_{1T} - x_{10}) < 1 \qquad (3.19)$$

После определения a^* параметр b рассчитывается по первой формуле (3.18). Таким образом, управление в форме синтезе вида

$$u^\circ(x) = -k^2(2ax_2 + b)$$

где параметры a, b определяются формулами (3.18), перемещает динамическую систему (3.11) в предположениях (3.17), (3.19) из начального состояния (3.5) в конечное состояние (3.6) и доставляет абсолютный минимум функционалу

$$J[u] = ax_2^2(T) + bx_2(T) + \frac{1}{2}\int_0^T \left[\left(\frac{u}{k}\right)^2 + k^2(2ax_2 + b)^2\right]dt$$

Отметим, что в силу формулы (2.5) и предположения (3.17) имеем $J[u^\circ] = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 528 с.
2. *Бербюк В.Е.* Использование первых интегралов в задачах синтеза оптимальных систем управления // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 17–23.
3. *Бербюк В.Е.* Оптимизация управляемых вращений твердого тела с упругим стержнем с помощью первых интегралов свободной системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 8–16.
4. *Бербюк В.Е.* Использование первых интегралов в задаче оптимального управления линейной системой с квадратичным функционалом // Математические методы и физико-механические поля. Киев: Наук. думка, 1988. Вып. 28. С. 66–70.
5. *Бербюк В.Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев: Наук. думка, 1989. 187 с.
6. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
7. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.

Львов

Поступила в редакцию
21.II.1992