ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, вып. 1, 1993

УДК 531.36

 Д.В. Баландин

О НАКОПЛЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ УДАРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Рассматривается задача об отыскании наибольшего отклика динамической системы в ответ на воздействия, интеграл от модуля которых по времени ограничен. Функционал, характеризующий отклик, представляет собой максимум от функции фазовых переменных, вычисленный вдоль решения системы. Указаны типы линейных и нелинейных систем, в которых наибольший отклик вызывает в пределе мгновенный удар. Приведен также пример нелинейной системы второго порядка, в которой отклик на мгновенный удар не является наибольшим среди всех возможных откликов на воздействия, интеграл от модуля которых по времени ограничен.

При решении вопросов, связанных с проектированием и разработкой различных систем вибротехники, часто возникает задача отыскания наибольшего отклика системы в ответ на воздействия из некоторого заранее фиксированного класса. Одной из первых решенных задач данного типа является, по-видимому, известная задача Б.В. Булгакова о накоплении возмущений в линейных системах при ограниченных по модулю воздействиях [1]. В данной работе рассматриваются задачи о накоплении возмущений в линейных и нелинейных системах при воздействиях, интеграл от модуля которых по времени ограничен.

1. Общая постановка задачи. Рассмотрим динамическую систему

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ – n-мерные векторы, $\mathbf{f}$–n-мерная вектор-функция, $u = u(t)$ – скалярная функция, характеризующая внешнее воздействие. Определим класс внешних воздействий Σ, как множество кусочно-непрерывных, заданных на бесконечном полуинтервале $[0, \infty)$ функций, удовлетворяющих интегральному ограничению

$$\int_0^\infty |u(t)|dt \leqslant J_0 \tag{1.2}$$

Сформируем функционал, определяющий качество переходных процессов в системе (1.1)

$$D[u(\cdot)] = \sup_{t\in[0,\infty)} \Phi[\mathbf{x}(t, u(\cdot))] \tag{1.3}$$

где $\mathbf{x}(t, u(\cdot))$ – решение задачи Коши системы (1.1), отвечающее данному воздействию $u(t)$.

Задача состоит в определении величины наибольшего отклика

$$D^0 = \sup_{u(\cdot)\in\Sigma} D[u(\cdot)] \tag{1.4}$$

Далее с конкретизацией вида функций $\mathbf{f}$, Φ рассматривается ряд частных задач, соответствующих общей постановке (1.4).

2. О накоплении возмущений в линейных системах. Рассмотрим линейную систему

$$\mathbf{x}^{\boldsymbol{\cdot}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{0}. \tag{2.1}$$

Здесь A – $(n \times n)$-матрица, $\mathbf{x}, \mathbf{b}$ – n-мерные векторы. Предполагается, что действительные части собственных значений матрицы A отрицательны, т.е. линейная система в отсутствие внешнего воздействия устойчива. В качестве функции, фигурирующей в выражении (1.3), примем модуль скалярного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ (где $\mathbf{a}$ – произвольный постоянный вектор): $\Phi(\mathbf{x}) = |(\mathbf{a}, \mathbf{x})|$.

Считая, что $u(t)$ удовлетворяет условию (1.2), рассмотрим задачу (1.4).

Запишем решение системы (1.2) в виде

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t G(t-\tau)\,\mathbf{b}u(\tau)\,d\tau,$$

где $G(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной системы (2.1), при этом $G(0) = E$ (E – $(n \times n)$-единичная матрица).

Для скалярного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ имеем выражение

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \int_0^t \psi(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau, \quad \psi(t) = \sum_{i,j} a_i b_j g_{ij}(t)$$

(a_i, b_j – компоненты векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$; $g_{ij}(t)$ – элементы матрицы $G(t)$). Справедливо неравенство

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{x})| \leqslant \int_0^t |u(\tau)|\,|\psi(t-\tau)|\,d\tau$$

откуда следует

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{x})| \leqslant p \int_0^t |u(\tau)|\,d\tau \leqslant pJ_0, \quad p = \sup_{t \in [0, \infty)} |\psi(t)|.$$

Заметим, что в силу устойчивости линейной системы величина p ограничена. Рассмотрим воздействие

$$u^0(t) = \begin{cases} u_0, & 0 \leqslant t \leqslant \tau^* \\ 0, & t > \tau^* \end{cases} \tag{2.2}$$

причем $u_0 > 0$, $u_0\tau^* = J_0$. Вычислим значение интеграла

$$I(t, \tau^*) = \int_0^t u^0(\tau)\,\psi(t-\tau)\,d\tau.$$

При достаточно малых τ^*, используя известные теоремы анализа о свойствах интегралов, будем иметь

$$I(t, \tau^*) = \begin{cases} J_0\psi[\alpha\tau^*], & t \leqslant \tau^* \\ J_0\psi[t-\beta\tau^*], & t > \tau^* \end{cases}$$

$(\alpha = \alpha(t, \tau^*),\ \beta = \beta(t, \tau^*),\ |\alpha| \leqslant 1,\ |\beta| \leqslant 1,\ \alpha(\tau^*, \tau^*) = 1 - \beta(\tau^*, \tau^*))$.

Последнее равенство в скобках следует из условия непрерывности $\psi(t)$ при $t = \tau^*$.

Имеем

$$\lim_{\tau^* \to 0} I(t, \tau^*) = J_0\psi(t).$$

Таким образом, искомая в задаче (1.4) величина

$$D^0 = J_0 \sup_{t \in [0, \infty)} |\psi(t)|.$$

Следует отметить, что был получен [2] аналогичный результат для линейной системы второго порядка.

Итак, воздействие, доставляющее наибольшее значение показателю качества линейной системы (2.1), представляет собой в пределе мгновенный удар интенсивностью J_0.

3. О накоплении возмущений в нелинейных системах второго порядка. Рассмотрим нелинейную систему второго порядка

$$x^{\cdot} = y, \; y^{\cdot} = -R(x, y) + u(t); \; x(0) = y(0) = 0 \tag{3.1}$$

Решение задачи (1.4) можно получить лишь при некоторых дополнительных условиях, наложенных на функции R, Φ. Примером являются результаты работы [3]. Далее, по существу, проводится обобщение указанных результатов.

Пусть

$$R(x, y) = f(x)y + bz(y) + \varphi(x) \tag{3.2}$$

где функции f, φ определены при $x \in (-\infty, \infty)$ и непрерывны всюду, за исключением, быть может, точки $x = 0$, в которой допускаются разрывы первого рода функции φ. Кроме того, справедливы неравенства

$$\begin{gathered} f(x) \geqslant 0, \; \varphi(x)\operatorname{sign}(x) \geqslant 0, \; \varphi(x) \not\equiv 0 \\ \varphi(x_1) \geqslant \varphi(x_2) \text{ при } x_1 > x_2, \; x_1 \neq 0, \; x_2 \neq 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Параметр $b \geqslant 0$, а $z(y)$ – характеристика типа сухого трения, определяемая при $b \neq 0$ аналогично [3]:

$$z(y) = \begin{cases} \operatorname{sign}(y), & y \neq 0 \\ v/b, & y = 0, \quad |v| \leqslant b \\ \operatorname{sign}(v), & y = 0, \quad |v| > b \end{cases}$$

$$(v = -\varphi(x) + u(t))$$

Относительно непрерывной функции $\Phi(x, y)$, характеризующей качество процесса, предполагается, что

$$\Phi(x, y_1) \geqslant \Phi(x, y_2) \text{ при } |y_1| > |y_2| \tag{3.4}$$

В частности, функцией, удовлетворяющей условию (3.4), является

$$\Phi(x, y) = |x|$$

– широко используемый на практике показатель, определяющий отклонение системы от исходного состояния.

Отметим, что система (3.1), выведенная из исходного состояния и предоставленная самой себе, в отсутствие внешнего воздействия $u(t)$ является при учете соотношений (3.2) и (3.3) диссипативной (или консервативной, если $b = 0, f(x) \equiv 0$). Таким образом, значение функции

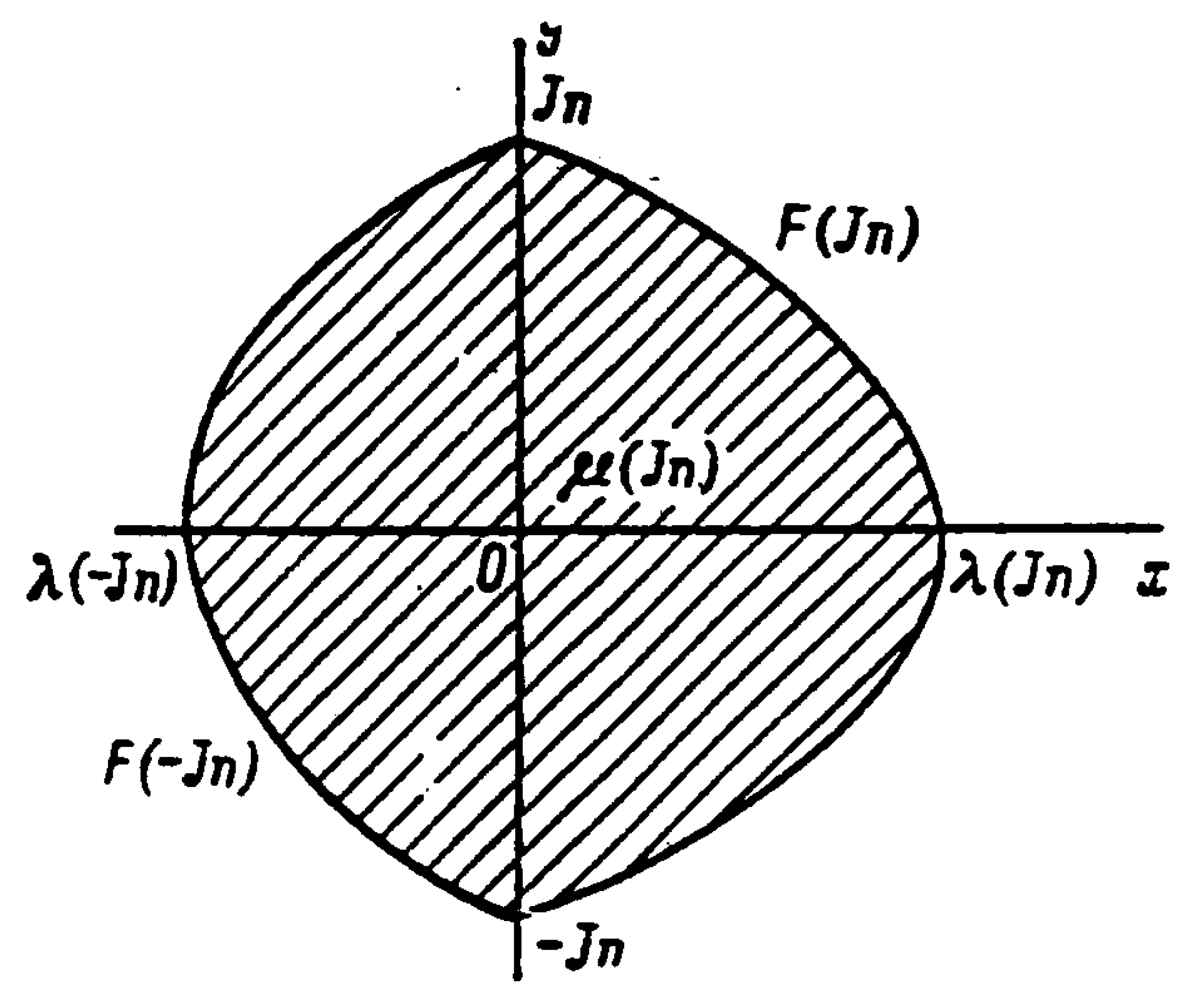
$$W(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x \varphi(x)\,dx$$

трактуемой как сумма кинетической и потенциально энергии системы, не возрастает вдоль решения системы.

Для исследования задачи (1.4) наряду с воздействиями из класса Σ будем рассматривать импульсные воздействия из класса L_0, состоящие из последовательностей дельта-функций $\delta(t)$ типа

$$\Delta_n(t) = I_1\,\delta(t - \tau_1) + \ldots + I_n\,\delta(t - \tau_n) \tag{3.5}$$

При этом $|I_1| + \ldots + |I_n| = J_n \leqslant J_0, \; I_i \neq 0, \; \tau_{i+1} > \tau_i$



Фиг. 1

Аналогично [3] показывается, что для воздействия $u(\cdot) \in \Sigma$ найдется импульсное воздействие $\Delta(\cdot) \in L_0$, такое, что

$$D[\Delta(\cdot)] \geqslant D[u(\cdot)] \tag{3.6}$$

Можно доказать, что искомое в задаче (1.4) значение

$$D^0 = \max \{ D[\Delta^+(\cdot)], D[\Delta^-(\cdot)] \} ; \ \Delta^{\pm}(t) = \pm J_0 \delta(t) \tag{3.7}$$

Рассмотрим на фазовой плоскости (x, y) две траектории, отвечающие воздействиям в виде мгновенных одиночных ударов с интенсивностями J_n и $-J_n$:

$$\Delta_1^{\pm}(t) = \pm J_n \delta(t)$$

Выделим начальные участки этих траекторий, лежащие соответственно в первом и третьем квадрантах фазовой плоскости, которые обозначим $F(+J_n)$ и $F(-J_n)$. Пусть каждая из этих кривых задается уравнением:

$$y = y_0^{\pm}(x, \pm J_n)$$

Заметим, что $y_0^{\pm}(0, \pm J_n) = \pm J_n$. Согласно [4] при учете (3.2) и (3.3) корни уравнений

$$y_0^{\pm}(x, \pm J_n) = 0$$

которые будем обозначать $\lambda(\pm J_n)$ принимают конечные значения. Отобразим кривые $F(\pm J_n)$ симметрично относительно оси абсцисс в четвертый и во второй квадранты фазовой плоскости (фигура). Таким образом, получим замкнутую кривую, которую обозначим $\Gamma(J_n)$. Область фазовой плоскости, охватываемую кривой $\Gamma(J_n)$ и содержащую точку (0, 0), обозначим $\mu(J_n)$. Вследствие непересекаемости фазовых траекторий, отвечающих воздействиям в виде мгновенных одиночных ударов с интенсивностями J_n и J_{n+1} (а также $-J_n$ и $-J_{n+1}$), получим: при $J_{n+1} > J_n$ кривая $\Gamma(J_n)$ целиком лежит в области $\mu(J_{n+1})$.

Покажем далее, что фазовая траектория, отвечающая воздействию типа (3.5) $\Delta_n(t)$, не выходит за пределы множества $\mu^*(J_n)$, определяющего замыкание области $\mu(J_n)$.

Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ данное утверждение является при учете (3.3) следствием диссипативности системы (3.1). Предположим, что утверждение справедливо при $n = m$ и покажем, что оно справедливо при $n = m + 1$. Иными словами, необходимо показать, что если фазовая траектория, отвечающая воздействию $\Delta_m(t)$, не выходит за пределы $\mu^*(J_m)$, то фазовая траектория, отвечающая воздействию

$$\Delta_{m+1}(t) = \Delta_m(t) + I_{m+1} \delta(t - \tau_{m+1})$$

не выходит за пределы $\mu^*(J_{m+1})$, при этом $J_{m+1} = J_m + |I_{m+1}|$. Имеем [3]

$$y_0^+(x, +J_{m+1}) - y_0^+(x, +J_m) > |I_{m+1}|, \ \forall x \in (0, \lambda(+J_m)]$$

$$|y_0^-(x, -J_{m+1})| - |y_0^-(x, -J_m)| > |I_{m+1}|, \ \forall x \in [\lambda(-J_m), 0)$$

Следовательно, любая точка фазовой плоскости, непосредственно перед $(m + 1)$ ударом, принадлежащая $\mu^*(J_m)$, в результате удара не выйдет за пределы $\mu^*(J_{m+1})$, а при $t > \tau_{m+1}$ фазовая траектория, отвечающая $\Delta_{m+1}(t)$, вследствие диссипативности системы (3.1) не выйдет за пределы множества $\mu^*(J_{m+1})$. Поскольку $J_m \leqslant J_0$, фазовая траектория, отвечающая произвольному воздействию $\Delta(\cdot) \in L_0$, не выйдет за пределы множества $\mu^*(J_0)$. Согласно неравенству (3.4) для любой точки (x_0, y_0), принадлежащей $\mu^*(J_0)$, найдется точка (x_0^*, y_0^*), принадлежащая либо $F(+J_0)$, либо $F(-J_0)$, такая, что

$$\max\{D[\Delta^+(\cdot)], D[\Delta^-(\cdot)]\} \geqslant D[\Delta(\cdot)], \forall \Delta(\cdot) \in L_0$$

Таким образом, при учете (3.6) получим

$$\max\{D[\Delta^+(\cdot)], D[\Delta^-(\cdot)]\} \geqslant D[u(\cdot)], \forall u(\cdot) \in \Sigma$$

Для установления равенства (3.7) достаточно рассмотреть воздействие вида (2.2), обозначаемое $u_+^0(t)$ при $u_0 > 0$ и $u_-^0(t)$ при $u_0 < 0$ (при этом $|u_0|\tau^* = J_0$). Устремляя τ^* к нулю, получим

$$\max\{\lim_{\tau^*\to 0} D[u_+^0(\cdot)], \lim_{\tau^*\to 0} D[u_-^0(\cdot)]\} = \max\{D[\Delta^+(\cdot)], D[\Delta^-(\cdot)]\}$$

Итак, доказано, что наибольшее значение показателю качества системы (3.1) доставляет в пределе мгновенный удар с интенсивностью $+J_0$ либо $-J_0$.

4. Контрпример. Рассмотренные в разд. 2,3 динамические системы представляют собой примеры систем, в которых наибольший отклик на воздействия из класса Σ доставляет мгновенный удар. В связи с этим возникает вопрос, существуют ли системы, не обладающие данным свойством. Приведем простой пример системы (контрпример к рассмотренным выше системам), для которой можно указать воздействие из класса (1.2), отклик на которое превышает отклик на мгновенный удар.

Рассмотрим систему второго порядка

$$x^{\cdot} = y,\ y^{\cdot} = -ky\,|y| - by + u(t);\ x(0) = y(0) = 0 \tag{4.1}$$

Существенным отличием от нелинейной системы (3.1) (при учете (3.2) и (3.3)) является наличие в правой части (4.1) члена $-ky\,|y|$, определяющего квадратичное трение. За показатель качества примем величину максимального отклонения, т.е.

$$D[u(\cdot)] = \sup_{t\in[0,\infty)} |x(t, u(\cdot))|$$

Определим сначала величину максимального отклонения D_+ в случае воздействия мгновенного удара $\Delta(t) = J_0\delta(t)$. Поделив второе уравнение системы (4.1) на первое, получим

$$dy/dx = -k\,|y| - b,\ y(0) = J_0$$

(действие мгновенного удара учтено в новых начальных условиях). Интегрируя последнее уравнение, найдем

$$x = -\int_{J_0}^{y} \frac{dy}{k|y| + b}$$

Искомое значение максимального отклонения D_+ достигается при $y = 0$. Следовательно,

$$D_+ = k^{-1} \ln[(kJ_0 + b)/b]$$

Теперь определим величину максимального отклонения, отвечающего воздействию типа (2.2). Интегрируя второе уравнение системы (4.1) на отрезке $[0, \tau^*]$, получим обратную зависимость

$$t(y) = \frac{1}{(b^2 + 4ku_0)^{1/2}} \ln\left[\frac{(y - y_+)y_-}{(y - y_-)y_+}\right] \tag{4.2}$$

$$y_\pm = -[b \pm (b^2 + 4ku_0)^{1/2}]/(2k)$$

Найдем теперь $x^* = x(\tau^*)$. Поскольку $x^\cdot = y$, то

$$x^* = \int_0^{\tau^*} y(t)\,dt = \int_0^{y^*} y \frac{dt}{dy}\, dy$$

где $y^* = y(\tau^*)$. После взятия последнего интеграла получим

$$x^* = \frac{1}{(b^2 + 4ku_0)^{1/2}} [y_+ \ln \frac{y^* - y_+}{-y_+} - y_- \ln \frac{y^* - y_-}{-y_-}]$$

Определим y^* из равенства (4.2), имея в виду, что $t(y^*) = \tau^* = J_0/u_0$:

$$y^* = y_+ y_- (R-1)/(y_+ R - y_-),\ R = \exp [J_0(b^2 + 4ku_0)^{1/2}/u_0]$$

Устремляя далее u_0 к нулю (произведение $u_0\tau^*$ при этом сохраняется и равно J_0), получим

$$\lim_{u_0 \to 0} y^* = 0, \quad \lim_{u_0 \to 0} x^* = J_0/b$$

Следовательно, максимальное отклонение D^* как отклик на бесконечно малое по величине воздействие типа (2.2) равно J_0/b.

Сравним D_+ и D^*:

$$D_+/D^* = \ln(\alpha + 1)/\alpha < 1, \quad (\alpha = kJ_0/b)$$

Рассмотренный пример показывает, что максимальное отклонение в системе (4.1) как отклик на мгновенный удар не является наибольшим среди всех возможных откликов на воздействия, интеграл от модуля которых по времени ограничен.

Было бы интересно выяснить, при каких условиях в нелинейной системе общего вида наибольший отклик на воздействия из рассматриваемого класса достигается при мгновенном ударе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков Б.В.* О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // Докл. АН СССР. 1946. Т. 51. № 5. С. 339–342.
2. *Болотник Н.Н.* Задачи оптимальной амортизации для классов внешних воздействий // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 4. С. 34–41.
3. *Баландин Д.В.* Оптимизация противоударных амортизаторов для класса внешних воздействий // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 53–60.
4. *Баландин Д.В.* Оптимизация противоударных амортизационных систем. – Автореферат... канд. дисс. – М.: ИПМ АН СССР, 1990. 24 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
29.X.1991