

поскольку  $\Phi_t(F) = F$ . Очевидно, группа скользящих  $\Gamma$  накрытия  $\Phi$  — подгруппа в  $R$ . Условия теоремы (см. (2.1)), однако, запрещают нетривиальные накрытия такого типа над многообразием  $V$ . Остается заключить, что  $\Phi$  — изоморфизм. Поэтому на  $V$  возникает глобальная координата  $t$ , которая монотонно возрастает вдоль траекторий системы (1.3). Такая ситуация, разумеется, несовместима с полной управляемостью.

Теорема доказана.

Заметим, что единственное место в доказательстве, которое не проходит в бесконечно дифференцируемом случае — это соотношение (2.2). Оно выполнено, однако, если пучок  $IO_V$  конечно порожден над  $O_V$ . (Здесь  $O_V$  — кольцо ростков бесконечно гладких функций).

В заключение приведем пример, показывающий, что от условия (2.1) нельзя полностью отказаться. Для этого модифицируем пример (1.5) следующим образом. Возьмем  $V = T^2 = R^2/Z^2$  — двумерный тор,  $f = \alpha e_1 + e_2$ ,  $g = e_2$ ,  $u \in R$ . Здесь  $e_1, e_2$  — координатные орты в  $R^2 = T_x V$ ,  $\alpha$  — иррациональная константа. Очевидно,  $\text{rank}_x I(gu)|_x = 1$  и условие (1.6) не выполнено. Тем не менее система (1.3) в этом случае является вполне управляемой, что следует из плотности интегральной кривой поля  $f$  в  $V$  (более общий результат такого рода см. в [6]).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
2. Haynes G.W., Hermes H. Nonlinear controllability via Lie theory // SIAM J. of Control. 1970. V. 8. № 4. P. 450–460.
3. Lobry C. Controllabilite des systemes nonlineares // SIAM J. of Control. 1970. V. 8. № 4. P. 573–605.
4. Тамура И. Топология слоений. М.: Мир, 1979. 317 с.
5. Haefliger A. Variétés feuilletées // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1962. V. 16. № 4. P. 367–397.
6. Lobry C. Controllability of nonlinear systems on compact manifolds // SIAM J. of Control. 1974. V. 12. No. 1. P. 1–4.

Москва

Поступила в редакцию  
16.V.1991

УДК 532.5+539.3

© 1993 г. П.Я. Кочина, О.И. Шишорина

## ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УРАВНЕНИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Приводятся дополнения к ранее предложенному способу построения уравнений эмпирических кривых в области механики материалов, основанному на применении дробно-линейных преобразований [1, 2]. Даются новые примеры их использования в некоторых задачах фильтрации, взятых из книги П.Я. Полубариновой-Кочиной [3].

1. Пусть дана кривая

$$y = f(x) \quad (1.1)$$

в промежутке  $0 \leq x \leq X$ , причем  $f(0) = y_0$ ;  $f(X) = Y$ .

Применим дробно-линейное преобразование

$$\xi = x/(X - x), \quad \eta = y/(Y - y) \quad (1.2)$$

которое переводит уравнение (1.1) в некоторое уравнение

$$\eta = \Phi(\xi) \quad (1.3)$$

Будем называть (1.3) образом кривых (1.1), а кривые (1.1) — прообразом линий (1.3).

Преобразование (1.2) интерпретируется [1, 2] как "отношение того, что пройдено, к тому, что осталось пройти".

Применив преобразование (1.2) к большому числу разнообразных кривых указанного выше типа, на плоскости  $\xi, \eta$ , как правило, получим прямые линии. Предположим, что уравнение (1.3) приведено к уравнению прямой

$$\eta = A + B\xi \quad (1.4)$$

Тогда, подставляя в него выражения (1.2), после перехода к безразмерным координатам

$$\bar{x} = x/X; \quad \bar{y} = y/Y \quad (1.5)$$

получим

$$\bar{y} = \frac{A + (B - A)\bar{x}}{A + 1 + (B - A - 1)\bar{x}} \quad (1.6)$$

т.е. имеем гиперболу, проходящую через точку (1,1), с двумя параметрами  $A$  и  $B$ , геометрический смысл которых очевиден.

Если рассматривается не одна заданная кривая (1.1), а целое семейство линий, полученных в каком-нибудь эксперименте, то обнаружим, что на плоскости  $\xi, \eta$  часто получается пучок прямых, проходящих через одну точку. Обозначив ее координаты через  $\xi^*, \eta^*$ , можем записать вместо (1.4)

$$\eta - \eta^* = B(\xi - \xi^*) \quad (A = \eta^* - B\xi^*) \quad (1.7)$$

Положим, что  $y = y_0$  при  $x = 0$ . При помощи (1.7) можно преобразовать уравнение (1.6) к виду

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_0 \xi^* + [\eta^* - (\xi^* + \eta^* + 1)\bar{y}_0] \bar{x}}{\xi^* + [\eta^* - (1 + \eta^*)\bar{y}_0 - \xi^*] \bar{x}}, \quad \bar{y}_0 = \frac{y_0}{Y} \quad (1.8)$$

Это гипербола, проходящая через точки  $(0, \bar{y}_0)$  и  $(1,1)$ . Сравнивая коэффициенты уравнений (1.6) и (1.8), видим, что  $A = \bar{y}_0 \xi^*$ ,  $A + 1 = \xi^*$ , откуда

$$\xi^* = 1/(1 - \bar{y}_0) = Y/(Y - y_0) \quad (1.9)$$

Сравнение коэффициентов при  $\bar{x}$  в (1.6) и (1.8) ничего нового не дает, и в формулу для  $\eta^*$  кроме  $y_0, Y$  войдет еще и  $B$ :

$$\eta^* = B\xi^* + A = (BY + y_0)/(Y - y_0) \quad (1.10)$$

(Заметим, что  $B$  выражается равенством, содержащим производную:  $B = Y/(XY')$ ,  $Y' = y'(X)$ .)

Из формул (1.9), (1.10) видно, что пучок прямых не всегда получается точно. Но, как уже было замечено, приближенно он получается часто, и тогда становятся известны приближенные значения  $\xi^*, \eta^*$ . Для кривых, отличных от гипербол, образы их на плоскости  $\xi, \eta$  отличаются от прямых, но это линии, имеющие асимптоты, которые в случае кривых действительно пересекаются в одной точке.

Другое преобразование

$$\xi = (x - x_0)/(X - x), \quad \eta = (y - y_0)/(Y - y) \quad (1.11)$$

переводит точку  $(x_0, y_0)$  в начало координат ( $\xi = 0; \eta = 0$ ), а точку  $(X, Y)$  — в бесконечно удаленную точку плоскости  $\xi, \eta$ . Поэтому на плоскости  $\xi, \eta$  можно рассматривать пучок прямых

$$\eta = B\xi \quad (1.12)$$

прообразом которого является гипербола

$$y = \frac{(BY - y_0)x + Xy_0 - Bx_0 Y}{(B - 1)x + X - Bx_0} \quad (1.13)$$

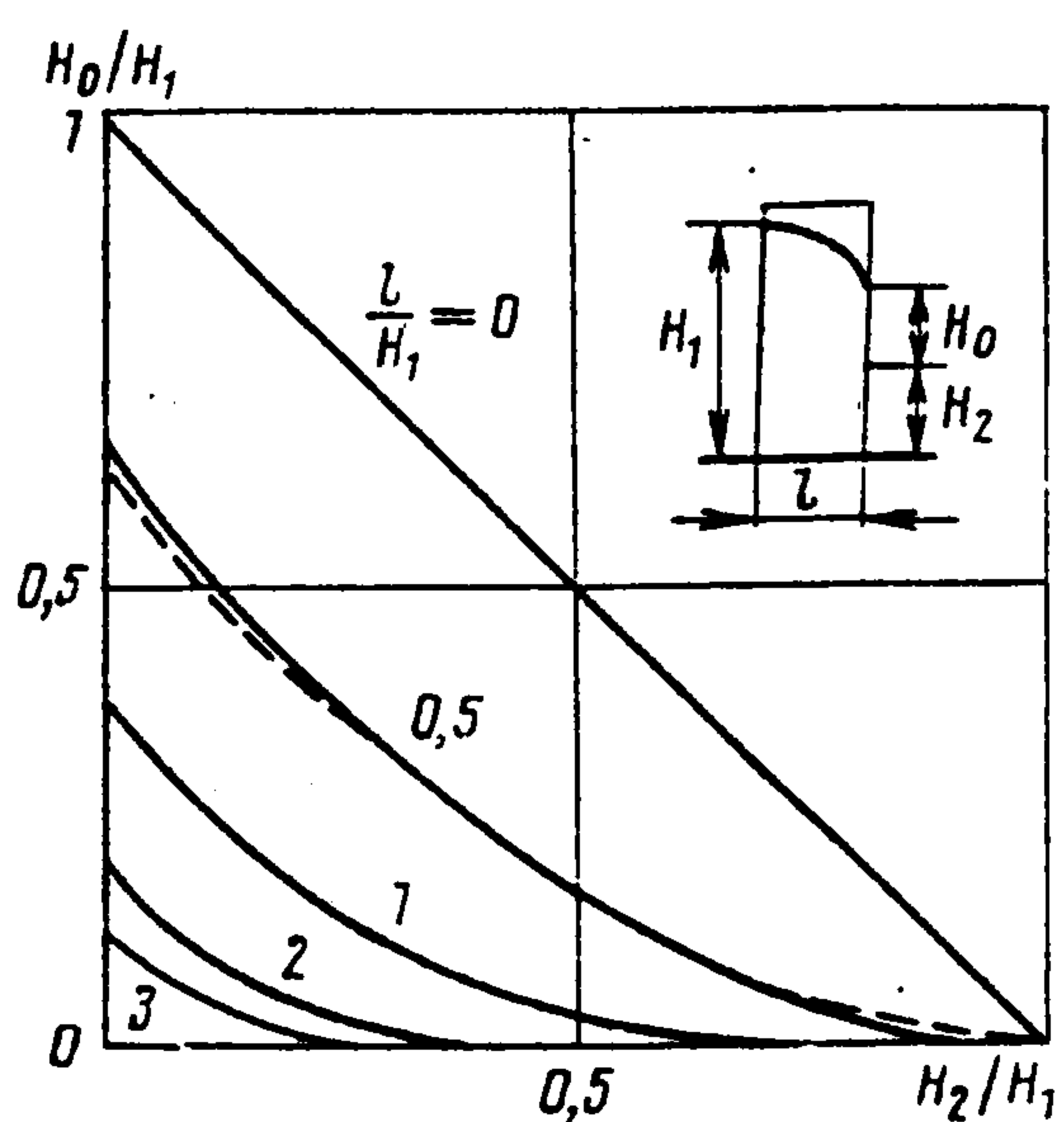
2. Приведем примеры. *Пример 1.* Были представлены [3] семейства кривых, относящихся к расчету перемычки, т.е. прямоугольной земляной плотины (фиг. 1). При перетоке воды из верхнего бьефа в нижний в теле плотины образуется свободная поверхность и в ней всегда будет иметься промежуток высачивания  $H_0$ . Их точный теоретический расчет очень сложен, некоторые кривые графиков получены точно, другие — на основе интерполирования.

За основную величину принят уровень  $H_1$  воды в верхнем бьефе.

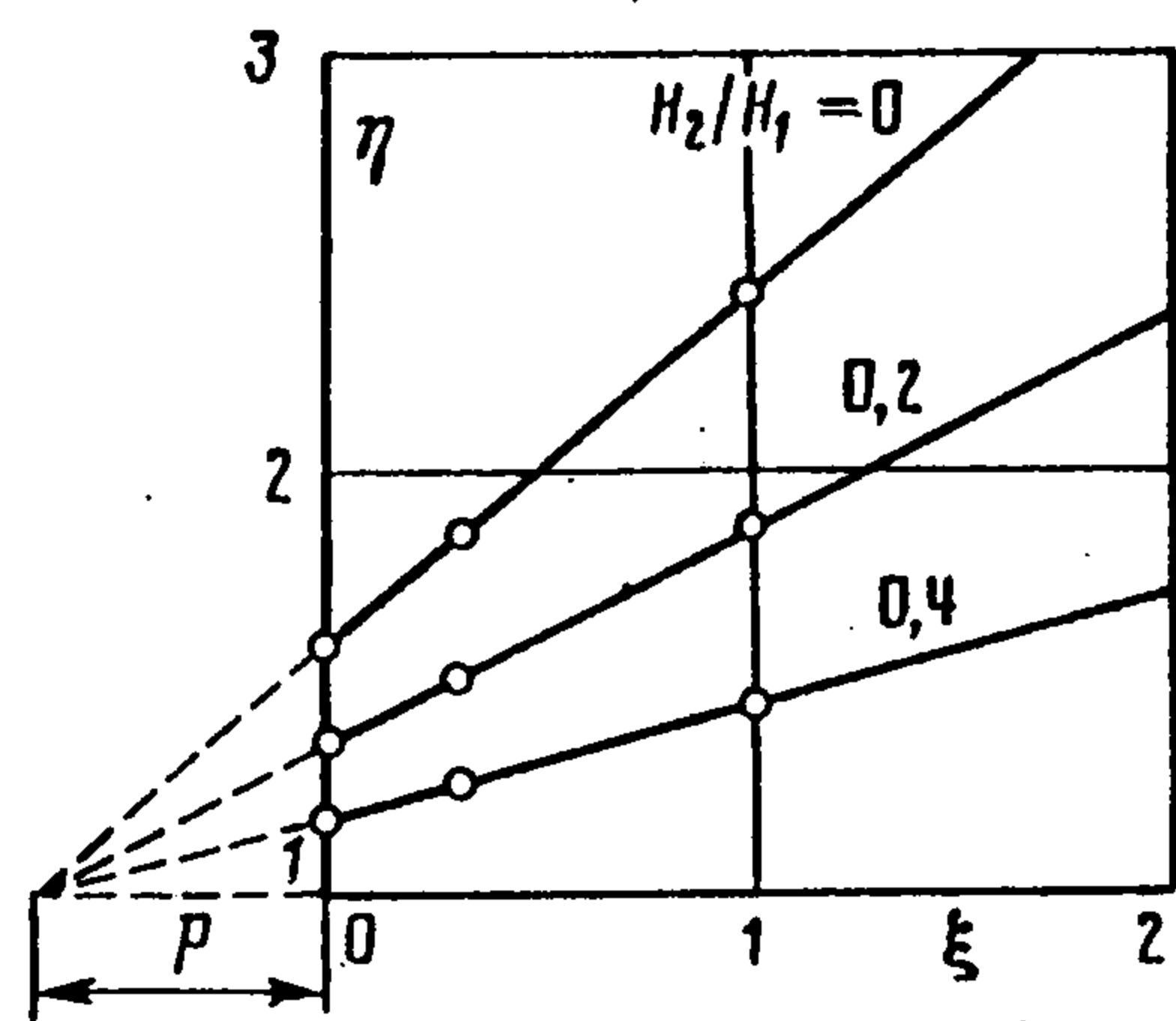
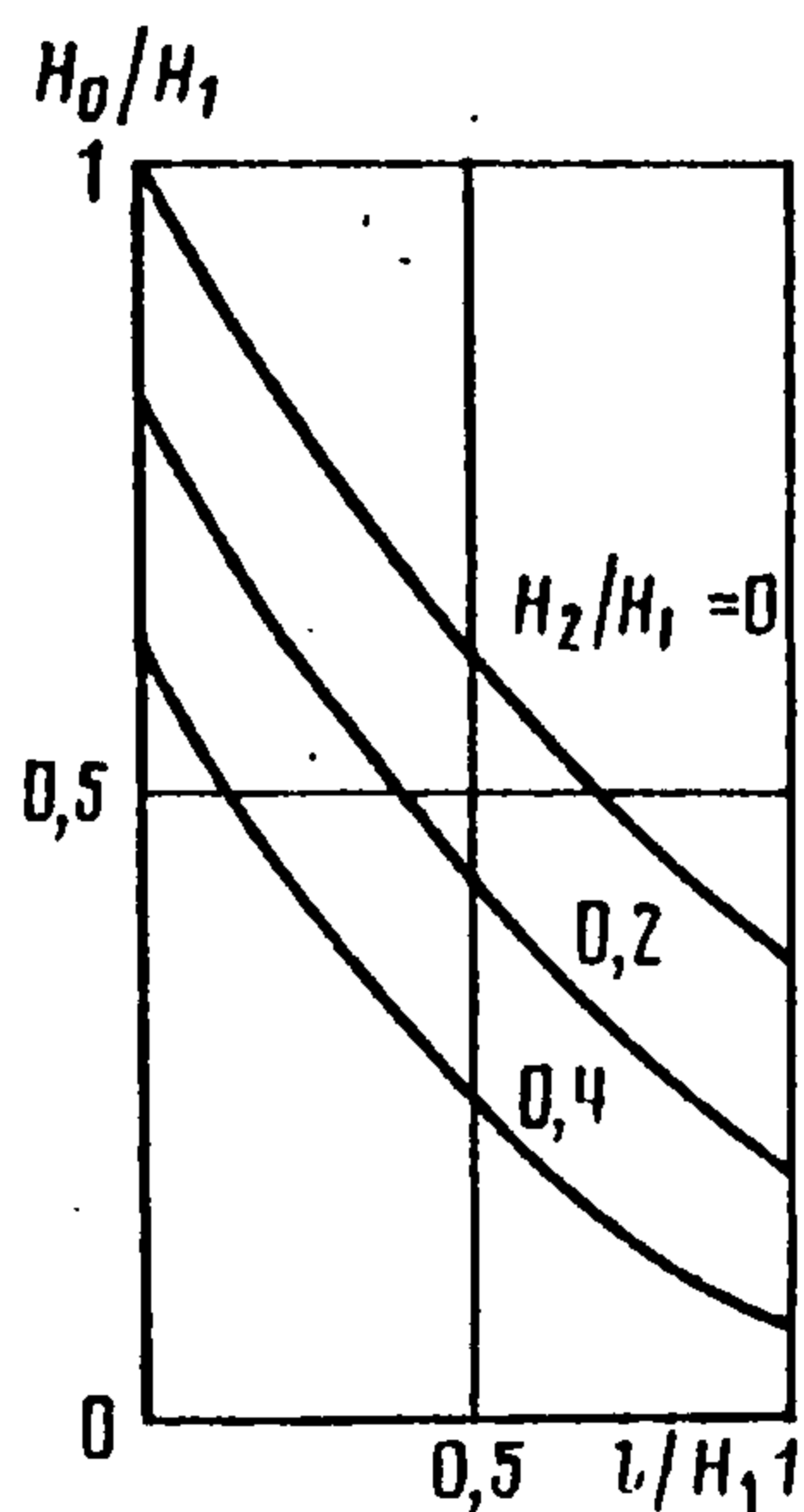
На фиг. 1 представлена зависимость  $y = H_0/H_1$  ( $H_0$  — величина промежутка высачивания) от  $x = H_2/H_1$  ( $H_2$  — глубина воды в нижнем бьефе) при разных значениях отношения  $l/H_1$ , где  $l$  — ширина перемычки.

Здесь  $Y = 0$ , поэтому преобразование (1.2) неприменимо. В преобразовании (1.11) положим  $x_0 = 0, Y = 0, X = 1$ . Тогда из (1.13) получим уравнение с одним параметром  $B$ :

$$y = \frac{y_0(1 - x)}{1 + (B - 1)x}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

При  $B = 1$  получается прямая  $y = y_0(1 - x)$ . При  $y_0 = 0,61$ ,  $B = 2,22$  – кривая, которая выделена для сравнения штрихами (фиг. 1).

*Пример 2.* Для той же перемычки на фиг. 2 представлена зависимость  $y = H_0/H_1$  от  $x = l/H_1$  при различных  $H_2/H_1$ . Взята часть этих кривых, до  $l/H_1 = 1$  (обычно перемычки бывают узкими,  $l/H_1 < 1$ ). Оказалось, что дробно-линейное преобразование (1.2) дает пучок прямых, центр которого находится в точке  $\xi = -0,7$ ,  $\eta = 1$ . Это подтверждает, что кривые семейства фиг. 2 близки к гиперболам.

3. Было выяснено [1, 2, 4]<sup>1</sup> геометрическое значение параметров  $A$  и  $B$  и обнаружен ряд свойств гипербол вида (1.6) и более общих. Здесь дадим другой вывод некоторых их свойств, используя понятие ангармонического отношения.

Ангармоническими (или двойными, или сложными) отношениями четырех точек на прямой  $A_1, A_2, A_3, A_4$  (фиг. 3) называют отношение вида [5]

$$W = (A_1 A_2 A_3 A_4) = (A_1 A_3 / A_2 A_4) : (A_1 A_4 / A_2 A_3)$$

Ангармоническое отношение является частным случаем вурфа (Wurf) – упорядоченной совокупности точек. Примем для краткости название вурф для ангармонического отношения.

Полагая  $A_1 = x_0$ ,  $A_2 = x$ ,  $A_3 = x_1$ ,  $A_4 = X$ , рассмотрим вурфы для абсцисс и ординат гиперболы

$$y = (ax + b)/(cx + d) \quad (3.1)$$

дуга которой изображена на фиг. 3:

$$W_x = \frac{x_1 - x_0}{x - x_1} : \frac{X - x_0}{x - X} = \frac{(x_1 - x_0)}{(X - x_0)} \cdot \frac{(X - x)}{(x_1 - x)} \quad (3.2)$$

$$W_y = \frac{y_1 - y_0}{y - y_1} : \frac{Y - y_0}{y - Y} = \frac{(y_1 - y_0)}{(Y - y_0)} \cdot \frac{(Y - y)}{(y_1 - y)}$$

В рассматриваемых здесь задачах точка  $x_1, y_1$  вспомогательная, интерес представляют лишь точки  $(x_0, y_0), (x, y), (X, Y)$ .

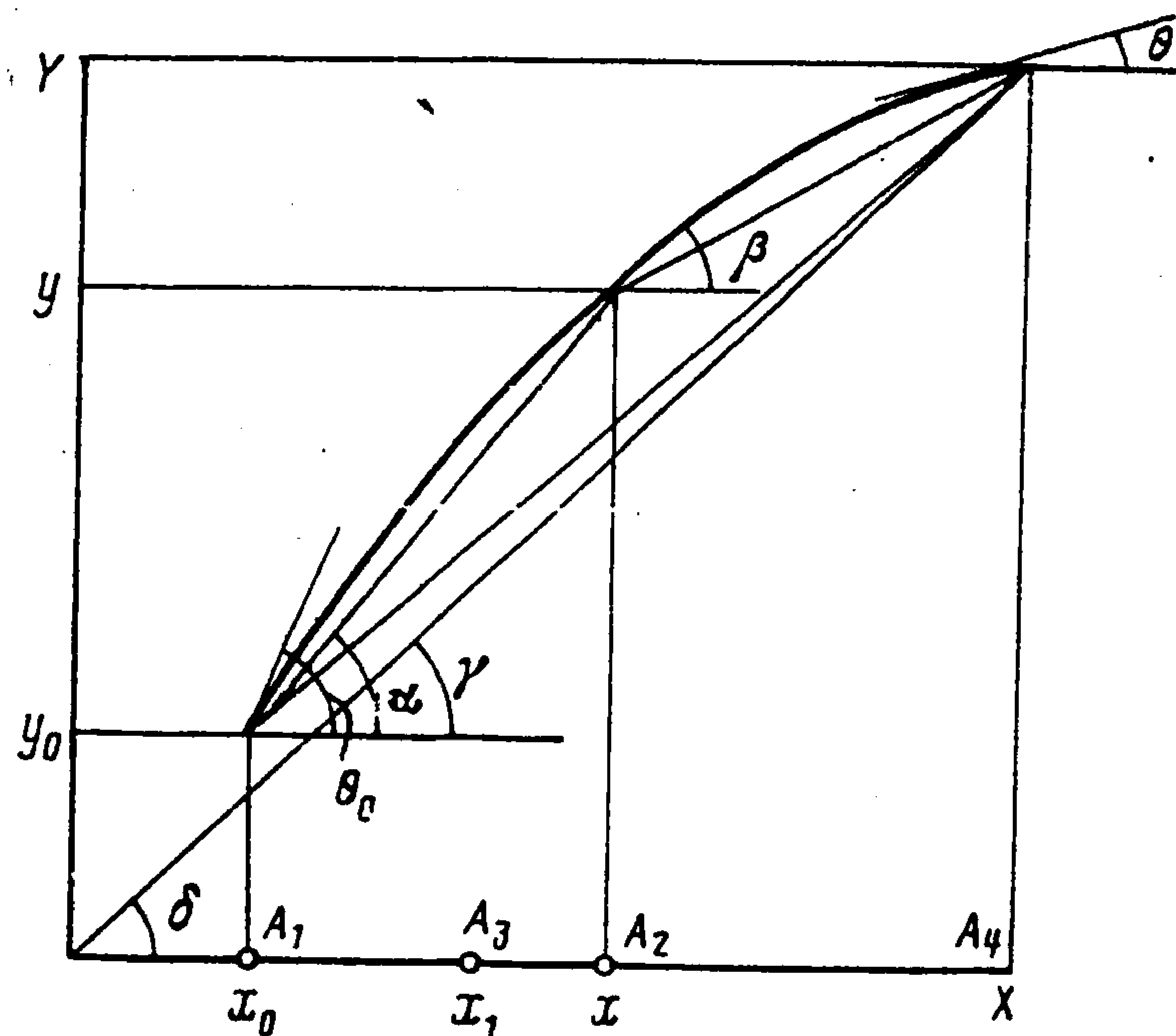
Запишем предельное выражение отношения вурфов при  $x_1 \rightarrow x_0$  (тогда  $y_1 \rightarrow y_0$  и дробь  $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$  даст производную  $f'(x_0)$ )

$$\frac{W_y}{W_x} = \left[ f'(x_0) \frac{Y - y}{X - x} \right] : \frac{Y - y_0}{X - x_0} \quad (3.3)$$

Если  $y = f(x)$  – уравнение гиперболы (3.1), то

$$y' = f'(x) = (ad - bc)/(cx + d)^2$$

<sup>1</sup> См. также Кочина П.Я., Шишорина О.И. Дробно-линейные преобразования и их применения: Препринт № 307. М., Ин-т проблем механики АН СССР. 1987. 57 с.



Фиг. 3

Произведя все подстановки

$$Y = \frac{aX + b}{cX + d}, \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad y_0 = \frac{ax_0 + b}{cx_0 + d}$$

в выражении (3.3), установим, что  $W_y/W_x = 1$ .

На фиг. 3 видно геометрическое значение дробей

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{Y - y}{X - x} = \operatorname{tg} \beta, \quad \frac{Y - y_0}{X - x_0} = \operatorname{tg} \gamma$$

а также, что  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \theta_0$ ,  $f'(X) = \operatorname{tg} \theta$ . Поэтому (3.3) дает

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta \quad (3.4)$$

Чтобы получить выражение  $\operatorname{tg} \theta$  – углового коэффициента касательной к рассматриваемой гиперболе на другом конце промежутка  $A_1 A_4$ , поменяем местами  $x$  и  $x_1$ ,  $y$  и  $y_1$  в формулах (3.2). Перейдя к пределу  $x \rightarrow X$ ,  $y \rightarrow Y$ , окончательно найдем

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma / \operatorname{tg} \alpha$$

Из (3.4) и (3.5) вытекает, что

$$\operatorname{tg} \theta_0 \operatorname{tg} \theta = y'(x_0) y'(X) = \operatorname{tg}^2 \gamma, \quad \operatorname{tg} \theta_0 / \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}^2 \alpha / \operatorname{tg}^2 \beta$$

Полученные соотношения дают возможность находить более трудно определяемые значения угловых коэффициентов касательных  $\operatorname{tg} \theta_0$ ,  $\operatorname{tg} \theta$  через тангенсы углов хорд  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \beta$ ,  $\operatorname{tg} \gamma$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шишорина О.И. К эффекту взаимодействия источников концентрации напряжений / Физика и механика деформации и разрушения, М.: Атомиздат, 1978, Вып. 5, С. 118–123.
2. Шишорина О.И. Экспериментальное исследование особенностей концентрации напряжений в двухфакторных задачах / Материалы 8-й Всесоюз. конф. по методу фотоупругости, Таллин: Ин-т кибернетики АН ЭССР, 1979, Т. 1, С. 109–111.
3. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод, М.: Наука, 1977, 664 с.
4. Шишорина О.И., Кочина П.Я. Дробные преобразования и их приложения к выявлению закономерностей процессов деформирования // Машиноведение, 1986, № 3, С. 47–55.
5. Математическая энциклопедия, М.: Советская энциклопедия, 1979, Т. 2, С. 27.

Москва

Поступила в редакцию  
1.VII.1991