ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, вып. 1, 1993

УДК 531.36:62–50

© 1993 г. Овсеевич А.И.

ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Доказывается необходимое условие полной управляемости (за произвольное время) нелинейной вещественно аналитической динамической системы, которое в линейном случае сводится к хорошо известному критерию Калмана [1]. В отличие от ранее известных нелинейных обобщений условия Калмана [2, 3] предлагаемое условие вытекает из глобальных соображений, основанных на построении полупроницаемых поверхностей для рассматриваемой динамической системы.

1. В теории линейных управляемых систем хорошо известен критерий полной управляемости Калмана [1]. Для того чтобы система

$$x^{\cdot} = Ax + Bu, \ x \in V, \ u \in U \tag{1.1}$$

где $A\colon V \to V$, $B\colon U \to V$ – линейные операторы, была вполне управляемой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n, \quad n = \dim V \tag{1.2}$$

Известны также и некоторые нелинейные аналоги условия Калмана (1.2), относящиеся к нелинейным управляемым системам вида

$$x^{\cdot} = f(x) + g(x)u, \ x \in V, \ u \in U \tag{1.3}$$

Здесь уже разумно считать V просто гладким многообразием, а не обязательно векторным пространством, f – гладким векторным полем на V, а q – гладким линейным отображением векторного пространства U в касательное расслоение TV многообразия V. Необходимое условие полной управляемости системы (1.3) в вещественно-аналитическом случае состоит в том [2, 3], что алгебра Ли векторных полей, порожденная полями f и gu, для всевозможных $u \in U$ имеет полный ранг в каждой точке $x \in V$:

$$\operatorname{rank}_x \operatorname{Lie}(f, gu) = \dim V \tag{1.4}$$

(это означает, что повторяющиеся коммутаторы полей f и gu в каждой точке $x \in V$ порождают касательное пространство T_xV). Известно, что указанное условие для системы (1.1) превращается в условие Калмана и, таким образом, является необходимым и достаточным. В общем случае условие (1.4) является лишь необходимым, как видно из следующего тривиального примера. Пусть

$$V = R^2 = Re_1 \neq Re_2, \ f = e_1, g = e_2, u \in R \tag{1.5}$$

Очевидно, условие (1.4) выполнено, однако при движении по траекториям системы (1.3) координата x_1 монотонно возрастает, что, конечно, противоречит полной управляемости.

В данной работе доказывается, что условие (1.4) можно усилить до

$$\operatorname{rank}_x I(gu) = \dim V \tag{1.6}$$

где $I(gu)$ обозначает идеал, порожденный полями gu в алгебре Ли $\operatorname{Lie}(f, gu)$, а rank_x (или $\dim_x$) размерность подпространства в касательном пространстве в точке x. Для системы (1.1) условие (1.6) опять эквивалентно условию Калмана.

Отметим, что пример (1.5) уже не укладывается в рамки условия (1.6), поскольку $I(gu)$ в этой ситуации совпадает с Re_2. В то же время небольшое усложнение примера (1.5) показывает, что условие (1.6), опять-таки не является достаточным.

Действительно, пусть

$$f(x) = \varphi(x_2)e_1, \ g = e_2$$
$$V = R^2 = \{(x_1, x_2) = x_1e_1 + x_2e_2\}, \ u \in R \tag{1.7}$$

причем $\varphi > 0$ и $\varphi' > 0$. Тогда $I(gu)$ содержит поля $g = e_2u$ $[g, f] = \varphi' e_1$ и, следовательно, условие (1.6) выполнено, а первая координата x_1 фазового вектора монотонно возрастает по времени, что противоречит управляемости.

2. Рассмотрим управляемую динамическую систему (1.3). Предположим, что V – вещественно-аналитическое многообразие, поля f и gu – вещественно-аналитичны. Предположим также, что первая группа вещественных гомологий многообразия V нулевая:

$$H_1(V, R) = 0 \tag{2.1}$$

Условие (2.1) будет использовано в следующем эквивалентном виде. Пусть $p: M \to V$ – накрытие, группа скольжений которого $\Gamma = \pi_1(V)/p_*\pi_1(M)$ является подгруппой группы вещественных чисел по сложению. Тогда p – изоморфизм.

Условие (2.1) выполнено, например, при $V = R^n$ или S^n (n-мерная сфера) и не выполнено при $V = (S^1)^n$ (n-мерный тор).

Теорема. Условие (1.6) необходимо для полной управляемости (за произвольное время) системы (1.3).

Доказательство. Предположим противное. Пусть условие (1.6) не выполнено хотя бы в одной точке $x \in V$, а система (1.3) является вполне управляемой. Из полной управляемости следует, что $\operatorname{rank}_x I(gu)$ не зависит от точки $x \in V$.

Действительно, пусть $I \subset \operatorname{Lie}(X)$ – произвольный идеал в алгебре Ли, порожденный векторными полями X_u, зависящими от параметра $u \in U$, I_x – ограничение полей из I на касательное пространство в точке x.

Тогда, обозначая через e^{tX} фазовый поток, соответствующий полю X, а через $(e^{tX})_*$ его действие на векторные поля, получим, что если $I \subset g$ – идеал в алгебре Ли g, состоящий из векторных полей на V, а $X \in g$, IO_V – подпучок пучка векторных полей на V, порожденный идеалом I, то

$$(e^{tX})_* IO_V \subset IO_V \tag{2.2}$$

Утверждение (2.2) следует из конечной порожденности IO_V как пучка модулей над O_V, что в свою очередь вытекает из нетеровости кольца ростков аналитических функций.

Отсюда следует, что если $y = e^{tX}x$, то

$$I_y = (e^{tX})_* I_x \tag{2.3}$$

и, в частности,

$$\dim I_y = \dim I_x \tag{2.4}$$

(Заметим, кстати, что условие (1.4) немедленно вытекает из того, что $\dim g_x$ не зависит от $x \in V$ (частный случай (2.4)) и теоремы Фробениуса).

Многократно применяя в рассматриваемой ситуации соотношение (2.4) и используя условие полной управляемости, получим, что

$$\operatorname{rank}_y I(gu) = \operatorname{rank}_x I(gu) \tag{2.5}$$

для любой пары точек x, y.

Идеал $I(gu)$ имеет в алгебре Ли $\operatorname{Lie}(f, gu)$ коразмерность не более 1, поскольку элемент f и $I(gu)$ порождают $\operatorname{Lie}(f, gu)$ как векторное пространство. Теперь, используя необходимое условие (1.4) полной управляемости, соотношение (2.5) и предположение о том, что условие (1.6) не выполнено, получим, что идеал $I(gu)$ определяет на V слоение F коразмерности 1. Кроме того, имеется поле f, всюду трансверсальное к слоению и такое, что его фазовый поток $\Phi_t = e^{tf}$ (в силу (2.2)) переводит F в себя. (Если поле F не порождает однопараметрической группы, т.е. соответствующее дифференциальное уравнение решается только для малых времен, то можно заменить f на поле rf, где $r > 0$ – достаточно быстро убывающая на бесконечности гладкая (или вещественно аналитическая) функция, которая уже порождает однопараметрическую группу.)

Рассмотрим отображение

$$\begin{aligned} &\Phi: R \times L \to V \\ &\Phi(t, x) = \Phi_t(x) = e^{tf}(x) \end{aligned} \tag{2.6}$$

где L – некоторый фиксированный слой нашего слоения F.

Утверждается, что Φ – накрытие и его группа скольжений – подгруппа в группе вещественных чисел R.

Действительно, Φ является в силу трансверсальности поля f к слоению F локальным изоморфизмом и, если $U \subset R \times L$ – открытое подмножество, изоморфное $\Phi(U)$, то $\Phi^{-1}(\Phi(U)) = \bigcup_{t \in \Gamma} \Phi_t(U) = U \times$
$\times\ \Gamma$, где $\Phi_t(\tau, x) = (\tau - t, \Phi_t(x))$, а $\Gamma \subset R$ – множество таких значений $t \in R$, что $\Phi_t(L) = L$. Причина такого разложения $\Phi^{-1}(\Phi(U))$ состоит в том, что если пересечение $\Phi_t(L) \cap L$ не пусто, то $\Phi_t(L) = L$,

поскольку $\Phi_t(F) = F$. Очевидно, группа скольжений Γ накрытия Φ – подгруппа в R. Условия теоремы (см. (2.1)), однако, запрещают нетривиальные накрытия такого типа над многообразием V. Остается заключить, что Φ – изоморфизм. Поэтому на V возникает глобальная координата t, которая монотонно возрастает вдоль траекторий системы (1.3). Такая ситуация, разумеется, несовместима с полной управляемостью.

Теорема доказана.

Заметим, что единственное место в доказательстве, которое не проходит в бесконечно дифференцируемом случае – это соотношение (2.2). Оно выполнено, однако, если пучок IO_V конечно порожден над O_V. (Здесь O_V – кольцо ростков бесконечно гладких функций).

В заключение приведем пример, показывающий, что от условия (2.1) нельзя полностью отказаться. Для этого модифицируем пример (1.5) следующим образом. Возьмем $V = T^2 = R^2/Z^2$ – двумерный тор, $f = \alpha e_1 + e_2$, $g = e_2$, $u \in R$. Здесь e_1, e_2 – координатные орты в $R^2 = T_xV$, α – иррациональная константа. Очевидно, $\mathrm{rank}_x\, I(gu)|_x = 1$ и условие (1.6) не выполнено. Тем не менее система (1.3) в этом случае является вполне управляемой, что следует из плотности интегральной кривой поля f в V (более общий результат такого рода см. в [6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
2. *Haynes G.W., Hermes H.* Nonlinear controllability via Lie theory // SIAM J. of Control. 1970. V. 8. № 4. P. 450–460.
3. *Łobry C.* Controllabilite des systemes nonlineares // SIAM J. of Control. 1970. V. 8. № 4. P. 573–605.
4. *Тамура И.* Топология слоений. М.: Мир, 1979. 317 с.
5. *Haefliger A.* Variétés feuilletées // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1962. V. 16. № 4. P. 367–397.
6. *Lobry C.* Controllability of nonlinear systems on compact manifolds // SIAM J. of Control. 1974. V. 12. No. 1. P. 1–4.

Москва

Поступила в редакцию
16.V.1991

УДК 532,5+539,3

© 1993 г. **П.Я. Кочина, О.И. Шишорина**

ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УРАВНЕНИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Приводятся дополнения к ранее предложенному способу построения уравнений эмпирических кривых в области механики материалов, основанному на применении дробно-линейных преобразований [1, 2]. Даются новые примеры их использования в некоторых задачах фильтрации, взятых из книги П.Я. Полубариновой-Кочиной [3].

1. Пусть дана кривая

$$y = f(x) \tag{1.1}$$

в промежутке $0 \leqslant x \leqslant X$, причем $f(0) = y_0$; $f(X) = Y$.

Применим дробно-линейное преобразование

$$\xi = x/(X - x), \quad \eta = y/(Y - y) \tag{1,2}$$

которое переводит уравнение (1,1) в некоторое уравнение

$$\eta = \Phi(\xi) \tag{1,3}$$

Будем называть (1,3) образом кривых (1,1), а кривые (1,1) – прообразом линий (1.3).

Преобразование (1,2) интерпретируется [1, 2] как "отношение того, что пройдено, к тому, что осталось пройти".

Применив преобразование (1,2) к большому числу разнообразных кривых указанного выше типа, на плоскости ξ, η, как правило, получим прямые линии. Предположим, что уравнение (1,3) приведено к уравнению прямой

$$\eta = A + B\xi \tag{1,4}$$