ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА. Том 57, вып. 1, 1993

УДК 62–50

© 1993 г. В. Г. Покотило

ОБ АДАПТИВНОМ УПРАВЛЕНИИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

Рассматривается задача гарантированного оценивания [1, 2] неизвестного конечномерного вектора. Предлагается способ формализации проблемы адаптивного управления процессом наблюдения в гильбертовом пространстве. На основании этой формализации доказывается, что решения задач программного и адаптивного управления процессом наблюдения совпадают. Работа примыкает к исследованиям [3–6].

1. Постановка задачи. Сформулируем [4] задачу управления процессом наблюдения в гильбертовом пространстве. Пусть измерение неизвестного вектора $x \in R^n$ производится в соответствии с моделью

$$y = Ax + \xi \tag{1.1}$$

где измеряемый сигнал y и неизвестное возмущение ξ – элементы гильбертова пространства H со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $A \in L(R^n, H)$ – заданный линейный непрерывный оператор, который в дальнейшем будем называть измерителем.

Информация о возмущениях ξ исчерпывается включением

$$\xi \in \Xi = E(\alpha^{-2} I, 0), \quad \alpha > 0 \tag{1.2}$$

$$E(P, u_0) = \{u: \langle (u-u_0), \ P(u-u_0) \rangle \leqslant 1\}$$

Здесь $E(P, u_0)$ – эллипсоид в гильбертовом (конечномерном) пространстве с центром u_0 и самосопряженным, неотрицательным оператором (матрицей) P, I – тождественный оператор.

Минимаксный или гарантированный подход к оценке вектора x основан на определении информационного множества $X(y)$ параметров, совместимых с измерением y. В рассматриваемом случае $X(y)$ – эллипсоид в R^n [2, 7, 8]:

$$X(y) = E(P(y), x_0), \quad P(y) = (\alpha^2 - h^2(y))^{-2} P \tag{1.3}$$

$$P = A^*A, \quad Px_0 = A^*y, \quad h^2(y) = \langle y, y \rangle - (x_0, A^*y) = \langle y, y \rangle - \langle Ax_0, y \rangle$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в R^n, а A^* – сопряженный оператор, так что $\langle y, Ax \rangle = (A^*y, x)$ для любых $y \in H$, $x \in R^n$.

Величина $h(y)$ совпадает с нормой проекции элемента y (или, что эквивалентно, ξ) на подпространство $\ker A^* = \{h \in H: A^*h = 0\}$. Очевидно, $0 \leqslant h(y) \leqslant \alpha$, и при $h(y) = \alpha$ информационное множество $X(y)$ вырождается в точку.

В предположении, что в качестве оценки вектора x выбирается центр эллипсоида (1.3), точность оценивания естественно характеризовать функцией от $P(y)$. Пусть $\Phi(\cdot)$ – заданная функция матричного аргумента и $F(A, y) = \Phi(P(y))$. Предположим, кроме того, что определено множество $\Sigma \subset L(R^n, H)$ возможных измерителей и необходимо определить элемент $A_0 \in \Sigma$, оптимизирующий точность оценивания. Для формализации этой задачи необходимо, однако, сформировать критерий, не зависящий от измерения y, которое не может быть известным до выбора A_0. По логике гарантированного подхода, необходимую свертку можно получить, промаксимизировав $F(A, y)$ по параметру y на множестве возможных выходов (1.1), (1.2). Таким образом, получаем следующую задачу выбора оптимального, программного измерителя:

$$\max_y F(A, y) = \max_y \Phi(P(y)) \to \min, \qquad A \in \Sigma \tag{1.4}$$

В (1.4) оптимизируется точность оценивания в расчете на наихудшую реализацию возмущений, что практически эквивалентно априорному подходу к оцениванию [1, 2] и оправдывает употребление термина "программный".

Допустим теперь, что измерение (1.1) и выбор A_0 можно представить в виде процессов, имеющих длительность. Тогда имеет смысл говорить о задаче адаптивной оптимизации измерений в зависимости от поступающей информации.

Прежде чем сформулировать такую задачу в произвольном гильбертовом пространстве, поясним ее на примере пространства $H = L_2\ [0, 1]$.

Пусть

$$y(t) = (a(t), x) + \xi(t), \qquad t \in [0, 1]$$

$$\int_0^1 \xi^2(t)\, dt \leqslant \alpha^2, \qquad a(\cdot) \in L_2^n\ [0, 1]$$

При этом

$$P = \int_0^1 a(t)\, a^{\mathrm{T}}(t)\, dt$$

Если известно, что на интервале $[0, \tau]$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$:

$$a(t) = a_0(t), \qquad y(t) = y_0(t) \tag{1.5}$$
$$a_0(\cdot) \in L_2^n\ [0, 1], \qquad y_0(\cdot) \in L_2\ [0, 1]$$

то можно говорить о выборе допустимого измерителя, минимизирующего функцию $F_\tau(A) = \max\limits_{y(\cdot)} F(A, y(\cdot))$, где минимум и максимум вычисляются при условии (1.5). Решая такую задачу при каждом τ, можно организовать адаптивное управление измерениями.

Прежде чем вернуться к рассмотрению произвольного гильбертова пространства, заметим, что соотношения (1.5) можно трактовать как задание проекций элементов $a(\cdot)$ и $y(\cdot)$ на некоторые подпространства.

Пусть определено разложение единицы ([9], с. 352) в H, т.е. семейство проекторов $\{T_\tau, \tau \in [0, 1]\} \subset L(H, H)$, $T_0 = 0$, $T_1 = I$, $T_\tau \leqslant T_\vartheta$, $\tau \leqslant \vartheta$. Параметр $\tau \in [0, 1]$ будем отождествлять со временем и полагать, что к моменту τ реализовался сигнал $y_\tau = T_\tau y$, соответствующий выбранному измерителю $A_\tau = T_\tau A$. Будем считать также, что другой информации о возмущениях не поступает. Тогда семейство задач адаптивного управления измерениями может быть описано следующим образом:

$$\max_y \{F(A, y) : T_\tau y = y_\tau\} \to \min; \quad A \in \Sigma, \quad T_\tau A = A_\tau^\circ \tag{1.6}$$

Очевидно, что при $\tau = 0$ задачи (1.4) и (1.6) совпадают.

Проводя аналогию с теорией планирования эксперимента, задачу (1.6) можно считать реализацией идеи последовательного планирования [10]. Именно эта идея выдвигалась, например [5], в качестве основы для учета апостериорной информации. Достаточно неожиданным в связи с этим является тот факт, что в рассматриваемом случае решение задачи (1.6) не содержит новой информации об оптимальных измерителях.

2. Основной результат. Предположим, что функция $\Phi(\cdot)$, характеризующая ошибку оценивания, удовлетворяет условию

$$\Phi(\lambda P) = r(\lambda)\, \Phi(P) \tag{2.1}$$

для любого $\lambda > 0$ и некоторой монотонно неубывающей функции $r(\cdot)$. Все общепринятые критерии точности оценивания удовлетворяют этому условию. Например для $\Phi(P) = \det(P^{-1})$, характеризующей объем эллипсоида $E(P, 0)$, $r(\lambda) = \lambda^{-n}$.

Теорема. Пусть имеет место условие (2.1), A_0 – решение задачи (1.4) и в (1.6) $A_\tau^\circ = T_\tau A_0$. Тогда решения задач (1.4) и (1.6) программного и адаптивного управления процессом наблюдения совпадают.

Доказательство. Опишем вначале общую схему доказательства. В пространстве $\Omega = R^n \times H$ параметров $w = (x, \xi)$ соотношения (1.1), (1.2) можно записать в виде

$$y = Dw, \qquad w \in W_0, \tag{2.2}$$
$$D \in L(\Omega, H), \qquad Dw = Ax + \xi, \qquad W_0 = R^n \times \Xi = E(Q, 0)$$

Обозначим $W_\tau = \{w \in W_0 : y_\tau = T_\tau Dw\}$ – информационное множество параметров $w \in \Omega$, совместимых с известным сигналом y_τ.

Основываясь на том, что дополнительной информации о возмущениях не поступает, можно полагать, что $T_\tau \xi \in \Xi$.

Пусть $W_\tau(y)$ – информационное множество в (2.2) при замене W_0 на W_τ, а $X_\tau(y)$ – проекция $W_\tau(y)$ на R^n. Очевидно, в рассматриваемом случае W_τ, $W_\tau(y)$ и $X_\tau(y)$ – эллипсоиды. Если $X_\tau(y) =$

$= E\,(P_T\,(y), x_T^0)$, то задачу (1.6) можно представить в виде

$$\max_{y \in DW_T} \quad \Phi\,(P_T\,(y)) \Rightarrow \min;\, A \in \Sigma_T = \{ A \in \Sigma,\ T_T A = A_T^0 \} \tag{2.3}$$

Оказывается, что

$$\max \{ \Phi\,(P_T\,(y)) \colon y \in DW_T \} = \rho^{-2}\,(y_T)\,\Phi\,(P) \tag{2.4}$$

где $\rho\,(\cdot)$ – некоторая скалярная функция.

Таким образом, функционалы в задачах (2.3) и (1.4) различаются только скалярным множителем, зависящим от предыстории (реализовавшегося к моменту τ сигнала). Этот факт и устанавливает справедливость теоремы.

Перейдем к обоснованию (2.4). W_T представляет собой пересечение эллипсоида W_0 с аффинной плоскостью решений уравнения

$$T_T D w = D_T w = y_T \tag{2.5}$$

Обозначим

$$L_T = \ker D_T = \{ w \in \Omega \colon D_T w = 0 \}$$

Лемма. В координатах (x, ξ) вид оператора Γ_T ортогонального проектирования на подпространство L_T определяется выражением

$$\Gamma_T = \left\| \begin{matrix} M_T & -M_T A_T^* \\ -M_T A_T^* & A_T M_T A_T^* + (I - T_T) \end{matrix} \right\|, \qquad M_T = (I + A_T^* A_T)^{-1} \tag{2.6}$$

Доказательство. По определению оператора ортогонального проектирования для $w = (x, \xi) \in \Omega$:

$$\langle w - \Gamma_T w,\, w - \Gamma_T w \rangle = \min_{u \in L_T} \langle w - u,\, w - u \rangle \tag{2.7}$$

Если $u = (q, \epsilon) \in \Omega$, $u \in L_T$, то $A_T q + T_T \epsilon = 0$.

При фиксированном q общее решение по ϵ этого уравнения представляется в виде

$$\epsilon_T = -A_T q + (I - T_T)\,\sigma, \quad \sigma \in H \tag{2.8}$$

Следовательно, нахождение Γ_T эквивалентно минимизации квадратичной формы

$$B\,(q, \sigma) = (x - q, x - q) + \langle \xi - \epsilon_T, \xi - \epsilon_T \rangle = (x, x) + \langle \xi, \xi \rangle +$$

$$+ (q, (I + A_T^* A_T)\,q) + \langle \sigma, (I - T_T)\,\sigma \rangle - 2\,(q, x - A_T^* \xi) - 2 \langle \xi, (I - T_T)\,\sigma \rangle$$

Записывая необходимые условия минимума $B\,(q, \sigma)$ по q и σ, получим

$$(I + A_T^* A_T)\,q - (x - A_T^* \xi) = 0, \qquad (I - T_T)\,\sigma - (I - T_T)\,\xi = 0$$

Отсюда следует, что минимум $B\,(\cdot, \cdot)$ достигается в точке

$$q_T = (I + A_T^* A_T)^{-1} (x - A_T^* \xi), \qquad \sigma_T = (I - T_T)\,\xi \tag{2.9}$$

Из соотношений (2.7), (2.8), получаем

$$\Gamma w = (q_T, \epsilon_T), \quad \epsilon_T = -A_T\,(I + A_T^* A_T)^{-1} (x - A_T^* \xi) + (I - T_T)\,\xi \tag{2.10}$$

Соотношения (2.9), (2.10) эквивалентны (2.6). Лемма доказана.

Пусть теперь x_T – произвольное решение системы уравнений

$$A_T^* A_T x_T = A_T^* y_T$$

(Если $A_T^* A_T$ – невырожденная матрица, то $x_T = (A_T^* A_T)^{-1} A_T^* y_T$.) Тогда $w_T = (x_T, y_T - A_T x_T) \in \Omega$ является решением уравнения (2.5) и $\Gamma_T Q w_T = 0$.

Действительно, используя координатные представления операторов Q (см. (1.2), (2.2)) и Γ_T (см. (2.6)), получим

$$\Gamma_T Q w_T = (M_T\,(A_T^* A_T x_T - A_T^* y_T),\quad A_T M_T\,(A_T^* A_T x_T - A_T^* y_T)) = 0$$

Представив общее решение уравнения (2.5) в виде $w = w_T + v$, $v \in L_T$, получаем

$$W_T = \{ w = w_T + v, \quad v \in L_T, \quad v \in V_T \} \tag{2.11}$$

$$V_T = E\,(\beta^{-2}\,(y_T)\,Q, 0) = \beta\,(y_T)\,W_0$$

$$\beta^2\,(y_T) = (1 - \langle w_T, Q w_T \rangle) = (1 - \langle y_T - A_T x_T, y_T - A_T x_T \rangle)$$

Введем переменные

$$f = y - y_T + (I - T_T) A x_T, \quad z = x - x_T, \quad \eta = \xi - y_T + A_T x_T$$

Для $v = (z, \eta) \in \Omega$ имеем

$$T_T D v = A_T (x - x_T) + T_T \xi - y_T + A_T x_T = A_T x + T_T \xi - y_T = 0$$

Следовательно, $v = (z, \eta) \in L_T$, и в силу (2.2), (2.6), (2.11) $X_T(y)$ совпадает с информационным множеством $Z(f)$ для системы

$$f = Az + \eta, \quad \eta \in E(\gamma^{-2} I, 0), \quad \gamma = \gamma(y_T) = \alpha\beta(y_T)$$

Соотношение (2.4) следует, таким образом, из (1.3) и (2.1). Теорема доказана.

Содержание теоремы можно проиллюстрировать при помощи следующего простейшего примера. Пусть производятся два измерения неизвестного числа x:

$$y = (y_1, y_2) \in R^2, \quad y_i = a_i x + \xi_i, \quad i = 1, 2, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 1$$

Ясно, что длина отрезка $X(y)$ существенно зависит от реализовавшихся значений y_1 и y_2. Однако размеры эллипсоида, получаемого сечением цилиндра

$$W_0 = \{ (x, \xi_1, \xi_2) \in R^3 : \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 1 \}$$

плоскостью

$$\Pi_1 = \{ (x, \xi_1, \xi_2) \in R^3 : y_1 = a_1 x + \xi_1 \}$$

очевидно, не зависят от y_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. *Гусев М.И.* Многокритериальные задачи оптимизации измерений для динамических систем в условиях неопределенности // Эволюционные системы в задачах оценивания. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 21–30.
4. *Kurzhanski A., Pschenichnyi B.N., Pokotilo V.G.* Optimal inputs for guaranteed identification. // IIASA, Intern. Inst. Appl. Syst. Analysis. 1989. WP–89–108. 9p.
5. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Карлов В.И.* Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1989. 311 с.
6. *Костоусова Е.К., Хапалов А.Ю.* Об аппроксимации задачи выбора состава измерения параметров теплового поля // Оценивание динамики управляемых движений. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1988. С. 65–81.
7. *Witsenhausen H.S.* Sets of possible states of linear systems given perturbed observations. // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. V AC – 13. P. 556–558.
8. *Bertsekas D., Rhodes I.B.* Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty. // IEEE Trans. Automat. Control. 1971. V. AC–16. N 2. P. 117–128.
9. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
10. Математическая теория планирования эксперимента / Под редакцией С.М. Ермакова. М.: Наука, 1983. 391 с.

Киев

Поступила в редакцию
9.VIII.1991